



Matematica Applicata per le Scienze - MApS



GUIDA AI PIANI DI STUDIO

La modellistica è spesso sviluppata in ambiti molto diversi attraverso strumenti matematici comuni basati sulle equazioni differenziali ordinarie ed alle derivate parziali. Questi modelli puntano a predire l'evoluzione nel tempo di un fenomeno a partire da alcune condizioni iniziali. Basti pensare ai modelli che descrivono le reazioni chimiche e la formazioni di pattern particolari in natura o la dinamica dell'aria intorno alle ali di un aeroplano, solo per citare alcuni classici esempi. La grande novità degli ultimi 50 anni è data dall'enorme sviluppo della modellistica differenziale in medicina, biologia e nelle scienze economiche e scienze. La capacità predittiva di questi modelli serve infatti a descrivere vari fenomeni come la crescita cellulare, il traffico su una rete (stradale o Internet), la formazione delle opinioni in un social network e a definire il corretto prezzo delle opzioni nei mercati finanziari o il controllo ottimale del movimento di un robot.

Lo studio di questi modelli, lineari e non lineari, ha anche motivato lo sviluppo di teorie avanzate per l'analisi dei sistemi corrispondenti insieme alla costruzione e all'analisi dei metodi numerici che permettono di ottenere soluzioni approssimate con un alto grado di accuratezza. Nelle applicazioni infatti è raro trovare una soluzione di problemi complessi in forma analitica ed è molto più frequente l'uso di uno schema numerico per ottenere una soluzione approssimata del problema. Perché la soluzione calcolata sia effettivamente utile occorre però sapere quale sia il suo grado di affidabilità, cioè occorre rispondere ad alcune domande fondamentali: il modello che abbiamo scelto descrive le caratteristiche fondamentali del sistema? Che tipo di soluzione ci dobbiamo aspettare e sotto quali condizioni? La soluzione approssimata è vicina alla soluzione esatta? Possiamo stimare l'errore che commettiamo usando uno schema numerico? Come si implementa effettivamente uno schema numerico in modo efficiente per ottenere questa approssimazione in tempi rapidi e con limitate risorse di calcolo? La risposta a queste domande è fondamentale per poter utilizzare la modellistica matematica in ambito industriale e tecnologico. Per questo motivo che la costruzione dei modelli e dei metodi numerici è andata spesso di pari passo ed alcuni importanti matematici hanno sviluppato algoritmi di soluzione per i problemi che stavano studiando (ad esempio Gauss, Eulero, Lagrange, Godunov). In alcuni casi hanno partecipato anche alla progettazione degli strumenti di calcolo, come von Neumann che partecipò alla costruzione del primo grande calcolatore elettronico (ENIAC) alla fine della seconda guerra mondiale.

Il recente sviluppo degli strumenti tecnologici, l'ampliamento delle reti di comunicazione e di calcolo, l'aumento della potenza dei processori ha aperto nuove frontiere alle applicazioni della matematica in campi anche lontanissimi ed offre soluzioni semplici

accessibili a tutti. Solo guardando quello che avete sul cellulare potete farvi un'idea della potenza di questi metodi che usate quotidianamente senza pensarci troppo e che in passato avrebbero richiesto l'uso di grandi centri di calcolo. Quando cercate la strada migliore per tornare a casa, quando ritoccate una foto o quando cercate un'informazione su WEB attraverso delle parole chiave state usando alcuni di questi algoritmi. Altre applicazioni, più complesse e basate su una notevole mole di dati, sono ormai alla portata dei nuovi sistemi di calcolo parallelo e distribuito e delle Graphic Processing Unit (dette GPU).

OBIETTIVI

*L'obiettivo di questo curriculum è quello di **formare persone capaci di analizzare e valutare un modello avendo anche una approfondita conoscenza delle tecniche numeriche per ottenere una soluzione quantitativa del problema.** Si tratta di una formazione avanzata che può essere utilizzata in molti ambiti (economico/finanziario, medico, biologico, fisico e ingegneristico) e che può anche portare allo sviluppo di nuovi metodi ed algoritmi. I laureati in questa area, presente da molti anni nella laurea in Matematica Applicata alla Sapienza, trovano facilmente lavoro sia in ambito industriale che in ambito accademico nelle migliori università italiane e straniere proprio perché hanno competenze varie, tra di loro complementari, per affrontare e risolvere i problemi legati alla modellistica matematica. A questo scopo, molti dei corsi prevedono esercitazioni in laboratorio e lo sviluppo di progetti. È anche incoraggiata la scelta di corsi fuori dell'area matematica per approfondire almeno un'area legata alle applicazioni.*

Il curriculum MApS fornisce le basi per la formazione matematica avanzata attraverso i corsi di **Istituzioni** da 9 CFU in **analisi matematica, analisi numerica, fisica matematica e probabilità**. Inoltre è previsto il corso da 6 CFU di **elementi di fisica teorica** che completa la formazione sulla fisica moderna, con lo studio dei principi fisici della meccanica statistica e della meccanica quantistica.

Per favorire una preparazione ad ampio spettro, il curriculum MApS offre molti corsi da 6 CFU, con cui specializzare la propria formazione.

CORSI CARATTERIZZANTI DA 6 CFU

Analisi funzionale. Introduzione agli aspetti funzionali dell'analisi matematica.

Calcolo delle variazioni. Principali strumenti analitici per lo studio dei problemi variazionali. Metodo diretto del calcolo delle variazioni, Gamma convergenze e analisi asintotiche. Vari esempi di analisi di problemi applicati alle scienze.

Stochastic calculus and applications (ENG). Introduzione al moto browniano e alla misura di Wiener. Calcolo di Ito. Equazioni differenziali stocastiche.

Equazioni alle derivate parziali. Studio di alcuni aspetti analitici delle equazioni differenziali della fisica matematica.

Metodi matematici in meccanica quantistica. Introduzione al formalismo matematico della meccanica quantistica con particolare attenzione alla teoria degli operatori illimitati autoaggiunti e alla rappresentazione dei gruppi di simmetrie.

Metodi matematici in meccanica statistica. Introduzione agli ensemble statistici, misure di Gibbs, transizioni di fase, modello di Ising.

Processi stocastici. Introduzione ai processi markoviani. Catene di Markov, generatori, teoria del potenziale, sistemi di particelle interagenti.

Sistemi dinamici. Flussi, stabilità e comportamento asintotico. Sistemi caotici. Teoria ergodica.

Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche. Introduzione alle equazioni della meccanica dei sistemi continui. Equazioni di Eulero e Navier-Stokes per i flussi incomprimibili. Vorticità e modello a vortici. Flussi comprimibili e shock.

La scelta di alcuni di questi corsi, insieme alla scelta del quarto corso di Istituzioni, caratterizzerà l'orientamento del piano di studi.

ESEMPI DI PIANI DI STUDIO

A seconda dell'orientamento scientifico che si vuole dare al proprio percorso, si possono ridurre gli elenchi dei corsi a scelta, rendendo più agevole la preparazione del piano di studi, ma lasciando comunque la possibilità di seguirle proprie curiosità e inclinazioni.

Questi sono alcuni esempi di piani di studio da cui prendere spunto:

- **Meccanica quantistica**
- **Meccanica statistica**
- **Metodi Probabilistici**
- **Metodi Variazionali**
- **Teorie Cinetiche**

Di seguito trovate il dettaglio dei piani di studio proposti. Nelle tabelle segnaliamo i **corsi obbligatori** e i **corsi caratterizzanti** dell'orientamento, e una selezione ragionata delle opzioni per gli altri corsi a scelta. Non sono riportate le idoneità e i due corsi liberi.

MECCANICA QUANTISTICA

La moderna comprensione del mondo microfisico – dai sistemi atomici e molecolari fino ai solidi sintetizzati in laboratorio e alle particelle che vengono rivelate negli esperimenti ad alta energia – è fondata sulle equazioni delle teorie quantistiche e sull'analisi delle loro simmetrie.

L'orientamento "Meccanica quantistica" si propone di presentare il formalismo matematico della Meccanica quantistica (oggetto del corso **Metodi matematici in meccanica quantistica**), basato sulla teoria degli operatori autoaggiunti negli spazi di Hilbert, che a sua volta presuppone i contenuti del corso di **Analisi funzionale**. Analogie e differenze con la meccanica statistica possono essere colte grazie al corso **Metodi matematici in meccanica statistica**, mentre il corso di **Sistemi dinamici** permette di completare la formazione fisico-matematica.

Meccanica quantistica 1:

Lo studente interessato agli **aspetti analitici** delle teorie quantistiche, ed in particolare alle interazioni con la teoria degli operatori ed il calcolo delle variazioni, può indirizzarsi verso un piano di studi simile al seguente.

Meccanica quantistica 1	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatori	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità El. di Fisica Teorica	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Analisi numerica Ist. Geometria Ist. Algebra e Geometria		
2 in GAP		Metodi matematici in meccanica statistica	Metodi matematici in meccanica quantistica
1 in GIN		Sistemi dinamici	
1 in GAN		Analisi funzionale	
1 in GAG		Calcolo delle variazioni	

Per completare la preparazione si suggerisce di scegliere i due corsi liberi tra

- Meccanica quantistica (LT in Fisica, II anno, I semestre)
- Struttura della materia (LT in Fisica, II anno, II semestre)
- Fisica nucleare e subnucleare (LT in Fisica, II anno, II semestre)

Le simmetrie dei sistemi quantistici sono descritte da opportune rappresentazioni unitarie di gruppi e algebre di Lie, e talvolta i sistemi stessi possono essere descritti in termini della geometria dei fibrati Hermitiani associati a queste rappresentazioni. Ad un livello più avanzato, le Teorie quantistiche dei campi – che generalizzano la Meccanica quantistica al

caso di sistemi con infiniti gradi di libertà – sono strettamente intrecciate con la teoria dei fibrati Hermitiani e delle loro connessioni.

Meccanica quantistica 2:

Lo studente interessato ad approfondire gli **aspetti algebrici e geometrici** delle teorie quantistiche può optare per un piano di studi simile al seguente, in cui un ruolo cruciale è giocato dai corsi di **Istituzioni di Geometria Superiore** e di **Geometria Riemanniana**. Dal punto di vista applicativo questo percorso può condurre ad approfondire, a livello di tesi magistrale, gli aspetti matematici della "materia topologica" (isolanti e superconduttori topologici).

Meccanica quantistica 2	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatorî	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità El. di Fisica Teorica	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Geometria Sup.		
2 in GAP		Metodi matematici in meccanica statistica	Metodi matematici in meccanica quantistica
1 in GIN		Sistemi dinamici	
1 in GAN		Analisi funzionale	
1 in GAG		Geometria Riemanniana	

Per completare la preparazione, suggeriamo di scegliere i due corsi liberi tra

- Calcolo delle variazioni (I anno - II semestre)
- Algebra 3 e Geometria superiore (sono corsi monografici, il cui contenuto riflette gli interessi di ricerca del docente; è opportuno informarsi in anticipo sul programma di tali corsi, e sulla coerenza tra i contenuti ed un piano di studi dedicato agli aspetti algebrici e/o geometrici delle teorie quantistiche)
- Meccanica quantistica (LT in Fisica, II anno, I semestre)
- Struttura della materia (LT in Fisica, II anno, II semestre)
- Condensed Matter Physics (LM in Fisica, I anno, I semestre, in inglese)
- Relativistic Quantum Mechanics (LM in Fisica, I anno, I semestre, in inglese)

MECCANICA STATISTICA

La meccanica statistica nasce per spiegare leggi fisiche macroscopiche, come per esempio quelle della termodinamica, a partire da dinamiche microscopiche. In questo ambito, sono stati sviluppati metodi matematici avanzati, probabilistici e non. Chi sceglie questo indirizzo affronterà uno studio rigoroso dei metodi della meccanica statistica, che oggi sono utilizzati in nuovi e importanti campi applicativi.

Meccanica statistica	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatori	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità El. di Fisica Teorica	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Analisi numerica Ist. Algebra e Geometria Ist. Geometria		
2 in GAP		Metodi matematici in meccanica statistica Processi stocastici	
1 in GIN	Statistica matematica.	Sistemi dinamici.	Elementi di probabilità e statistica per Data Science. Mathematical Models for Neural network Stochastic Calculus and Applications Metodi matematici in meccanica quantistica Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche
1 in GAN		Calcolo delle variazioni	
1 in GAG		Analisi funzionale Equazioni alle derivate parziali	Fourier Analysis Teoria del controllo

METODI PROBABILISTICI

Il calcolo della probabilità e la statistica matematica sono gli strumenti alla base della comprensione dei fenomeni aleatori. In questo indirizzo vengono introdotte teorie avanzate per lo studio dei processi casuali, che oltre a essere una parte vitale della ricerca matematica, è fondamentale nelle moderne discipline applicative.

Metodi probabilistici	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatori	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità El. di Fisica Teorica	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Analisi numerica Ist. Algebra e Geometria		
2 in GAP		Processi stocastici	Stochastic Calculus and Applications
1 in GIN	Statistica matematica.	Sistemi dinamici Metodi matematici in meccanica statistica	Elementi di probabilità e statistica per Data Science. Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche
1 in GAN		Calcolo delle variazioni	
1 in GAG	Modelli analitici per le applicazioni.	Analisi funzionale Equazioni alle derivate parziali.	Fourier Analysis Teoria del controllo

METODI VARIAZIONALI

Per chi vuole approfondire gli aspetti analitici delle applicazioni della matematica alle scienze, con particolare riferimento ai principi variazionali alla base del paradigma della scienza moderna secondo cui un sistema fisico può essere descritto dalle configurazioni di equilibrio o dall'evoluzione temporale di opportuni "funzionali" (per esempio l'**azione** e l'**energia**). L'obiettivo del percorso è rendere gli studenti consapevoli della varietà di problemi che possono essere affrontati con tecniche variazionali e fornire loro gli strumenti di base e il linguaggio matematico per l'analisi dei modelli presenti nelle varie scienze naturali.

Metodi variazionali	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatori	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità El. di Fisica Teorica	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Analisi numerica		
2 in GAP		Metodi matematici in meccanica statistica	Stochastic Calculus and Applications Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali non lineari
1 in GIN	Modelli analitici per le applicazioni	Sistemi dinamici	Fourier Analysis Stochastic Calculus and Applications Metodi matematici in meccanica quantistica Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali non lineari Teoria del controllo
1 in GAN		Calcolo delle variazioni	
1 in GAG		Equazioni alle derivate parziali Analisi funzionale	

TEORIE CINETICHE

La descrizione alle varie scale macroscopiche di sistemi di particelle è un campo teorico e applicativo di grande interesse, e richiede competenze avanzate in molti rami della matematica (fisica matematica, probabilità, analisi). In questo indirizzo si affronta lo studio delle equazioni cinetiche e delle fluidodinamica e la loro relazione con i sistemi di particelle. Inoltre i metodi sviluppati trovano un vasto campo di applicazione nello studio dei noti collettivi di agenti viventi (stormi, sciame, folle), su cui si concentrano oggi molti sforzi della modellistica matematica.

Teorie Cinetiche	I anno - I semestre	I anno - II semestre	II anno - I semestre
Obbligatori	Ist. Analisi superiore Ist. Probabilità Elementi di Fis. Teo.	Ist. Fisica Matematica	
1 in IST	Ist. Analisi numerica Ist. Geometria Ist. Algebra e geometria		
2 in GAP		Metodi matematici in meccanica statistica	Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche
1 in GIN		Sistemi dinamici Computational Mathematics	
1 in GAN		Calcolo delle variazioni	
1 in GAG	Modelli analitici per le applicazioni	Equazioni alle derivate parziali	Fourier Analysis Teoria del controllo