

METODI VARIAZIONALI

Curriculum di Matematica Applicata per le Scienze (MApS)

Le domande fondamentali poste dalle scienze naturali e ingegneristiche e dall'economia hanno da sempre ispirato i matematici a ricercare nuove strutture e nuovi concetti per la comprensione dei fenomeni naturali e sociali.

L'interazione con le scienze è un punto centrale dello sviluppo della matematica e, più in generale, della cultura scientifica e tecnologica delle società contemporanee.

*L'indirizzo di **METODI VARIAZIONALI** del curriculum di Matematica Applicata per le Scienze vuole approfondire gli aspetti analitici delle applicazioni della matematica alle scienze, con particolare riferimento ai principi variazionali, basati sulla descrizione dei sistemi naturali tramite il concetto di **energia**. Questo è un paradigma della scienza moderna, che ha l'aspirazione di dare una descrizione dei fenomeni naturali basata sul minor numero di principi primi, tra questi appunto quello di energia. Pur avendo un carattere eminentemente teorico, questo indirizzo mantiene un forte legame con le applicazioni e gli strumenti teorici trattati sono pensati per affrontare questioni di matematica che hanno un diretto legame con le applicazioni che le hanno ispirate e le hanno rese necessarie.*

Gli obiettivi principali di questo indirizzo sono due: 1) fornire una preparazione ad ampio spettro, con un'impostazione applicata che possa essere apprezzata in vari settori lavorativi per la capacità di affrontare e risolvere problemi con rigore e sintesi; 2) formare giovani ricercatori in Matematica interessati a vari aspetti delle scienze, con una solida formazione analitica per affrontare in modo rigoroso problemi e questioni derivanti da altre discipline.

IN CONCRETO

Il punto centrale dell'indirizzo è lo studio dei metodi analitici e differenziali applicati alle scienze, con particolare riferimento alle questioni variazionali:

- **Calcolo delle Variazioni** (2° semestre, I anno magistrale): un corso introduttivo in cui vengono esposti diversi strumenti per affrontare una grande varietà di problemi della scienza e possono fornire una ampia carrellata di tecniche e tematiche a questi strettamente collegati.

Propedeutici a questo corso e complementari vi sono altri i corsi di analisi matematica:

- **Istituzioni di analisi matematica** (1° semestre, I anno magistrale): introduzioni agli strumenti principali dell'analisi moderna (distribuzioni, spazi di Sobolev, trasformata di Fourier);
- **Equazioni alle derivate parziali** (2° semestre, I anno magistrale): studio di alcuni aspetti analitici delle equazioni differenziali della fisica matematica;
- **Analisi funzionale** (2° semestre, I anno magistrale): introduzioni agli aspetti funzionali dell'analisi matematica.

Per ampliare questo punto di vista l'indirizzo propone lo studio di

- **Metodi della meccanica statistica**, per lo studio degli aspetti statistici e probabilistici di diversi modelli di sistemi complessi della meccanica e della fisica;
- **Elementi di fisica teorica**, per lo studio di alcune nozioni di fisica moderna.

Completa questo indirizzo la possibilità di scegliere corsi di

- **analisi matematica**: *Analisi di Fourier/ Teoria del controllo/ Modelli analitici per le applicazioni*, per approfondire alcuni aspetti analitici specifici;
- **probabilità**: *Calcolo stocastico e applicazioni*, per lo studio dei processi stocastici;
- **fisica matematica**: *Sistemi dinamici/ Meccanica quantistica/ Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche*, per approfondire alcune teorie di fisica matematica;
- **analisi numerica**: *Metodi numerici per le EDP lineari/Matematica computazionale*, per i metodi numerici per la risoluzioni delle equazioni.

Questa che segue è la struttura dell'indirizzo, con gli esami consigliati tra quelli previsti dal curriculum.

STRUTTURA DELL'INDIRIZZO

4 CORSI DA 9 CFU:

- **Ist. Analisi Superiore (MAT05)**
- **Ist. Probabilità (MAT06)**
- **Ist. Fisica Matematica (MAT07)**
- Ist. Analisi Numerica (MAT08)

8 CORSI DA 6 CFU:

- **Calcolo delle variazioni (MAT05)**
- **Metodi matematici in meccanica statistica (MAT06-MAT07)**
- **Elementi di fisica teorica (FIS)**
- 1 a scelta tra: Metodi numerici per le EDP lineari (MAT08), Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche (MAT07), Calcolo stocastico (MAT06)
- 1 a scelta tra: **Analisi funzionale/Equazioni alle derivate parziali (MAT05)**
- 1 a scelta tra: Analisi di Fourier/ Teoria del controllo/ Modelli analitici per le applicazioni (MAT05), Calcolo stocastico (MAT06), Sistemi dinamici/ Meccanica quantistica/ Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche (MAT07), Metodi numerici per le EDP lineari/ Matematica computazionale (MAT08)
- 2 a scelta: per esempio gli esami dei gruppi di sopra che non sono già stati scelti.

ALTRE ATTIVITÀ COMPLEMENTARI

Seminario MOMA: Modelli Matematici per le Applicazioni

<http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/seminari/moma/>

PROGRAMMA DEL CORSO DI NUOVA ISTITUZIONE

CALCOLO DELLE VARIAZIONI

OBIETTIVI

Il corso prevede lo studio delle tecniche variazionali in matematica applicata. Molti modelli della fisica matematica e in generale delle scienze naturali hanno come fondamento principi variazionali (principio di minimo energia, di minima azione,...) che ne descrivono le configurazioni di equilibrio e le evoluzioni dinamiche.

L'obiettivo del corso è rendere gli studenti consapevoli della varietà di problemi che possono essere affrontati con tecniche variazionali e fornire loro gli strumenti di base e il linguaggio matematico per l'analisi dei modelli presenti nelle varie scienze naturali.

PROGRAMMA

Prima parte (2/3 del corso)

Esempi di applicazioni: un problema di elasticità scalare e la catenaria, separazione di fase, omogeneizzazione.

Condizioni necessarie per i punti stazionari di energie.

Metodo diretto del calcolo delle variazioni.

Condizioni di semicontinuità, il ruolo della convessità.

Problemi vincolati e con condizioni al bordo.

Cenni sui problemi variazionali vettoriali e non convessi.

Gamma convergenza e/o rilassamento

Seconda parte (1/3 del corso)

Sviluppo della teoria necessaria a uno dei seguenti esempi:

1. Omogeneizzazione di mezzi compositi
2. Transizioni di fase
3. Problemi a discontinuità libera (per esempio per la ricostruzione di immagini)
4. Passaggi di scala
5. Problemi di formazione di microstrutture (pattern) nei materiali
6. In generale metodi di approssimazione (problemi discreti, regolarizzazioni, approssimazioni numeriche, etc.)

PREREQUISITI

I corsi di analisi obbligatori della laurea triennale (Calcolo integrale e differenziale e teoria della misura) e Istituzioni di analisi superiore (cenni di analisi funzionale e spazi di Sobolev).

TESTI DI RIFERIMENTO

- F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone C. Mantegazza, *Appunti di Calcolo delle Variazioni*, MCM, Amazon

- A. Braides, *Γ -convergence for beginners*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 22. Oxford University Press, Oxford
- B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- E. Giusti, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994. vi+422 pp.

STRUTTURA DEL CURRICOLO

MATEMATICA APPLICATA ALLE SCIENZE

4 CORSI DA 9 CFU:

- Ist. Analisi Superiore (MAT05)
- Ist. Probabilità (MAT06)
- Ist. Fisica Matematica (MAT07)
- 1 a scelta tra:
 - Ist. Analisi Numerica (MAT08)
 - Ist. Geometria Superiore (MAT03)
 - Ist. Algebra Superiore (MAT02)
 - Ist. Algebra e Geometria (MAT02-MAT03)

8 CORSI DA 6 CFU:

- 1 a scelta tra: Analisi funzionale/ Calcolo delle variazioni/ Modelli analitici per le applicazioni (MAT05)
- 2 a scelta tra: Processi stocastici/ Calcolo stocastico e applicazioni/ Sistemi dinamici/ Metodi matematici in meccanica statistica/ Metodi matematici in meccanica quantistica/ Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche (MAT06-MAT07), Metodi numerici per le EDP lineari (MAT08)
- Elementi di fisica teorica (FIS)
- 1 a scelta tra: Analisi funzionale/ Calcolo delle variazioni/ Modelli analitici per le applicazioni/ Geometria superiore/ Geometria riemanniana/ Analisi di Fourier/ Teoria del controllo (MAT05)
- 1 a scelta tra: Sistemi dinamici/ Meccanica quantistica/ Meccanica dei fluidi e teorie cinetiche (MAT07), Analisi di Fourier/ Teoria del controllo/ Modelli analitici per le applicazioni (MAT05), Processi stocastici/ Calcolo stocastico e applicazioni/ Statistica matematica/ Modelli di reti neurali (MAT06-MAT07), Metodi numerici per le EDP lineari/ Matematica computazionale (MAT08)
- 2 a scelta

1) GLI ESAMI DA 9CFU SONO TUTTI OBBLIGATORI?

Dei 4 esami di Istituzioni da 9CFU 3 sono obbligatori (Ist. di Analisi Superiore, Ist. di Probabilità e Ist. di Fisica Matematica). Per il quarto è consigliata la scelta di Ist. di Analisi Numerica ma può essere scelto uno degli altri corsi di Istituzioni da 9 CFU previsti dal Curriculum.

2) SARÀ ORGANIZZATA UNA GIORNATA DI PRESENTAZIONE DEI NUOVI PERCORSI?

Sì, è prevista una giornata in cui verranno presentati i nuovi indirizzi di Matematica Applicata e il contenuto dei corsi di nuova istituzione. In caso la situazione attuale non dovesse permettere l'organizzazione dell'incontro verranno fornite ulteriori informazioni e aperto un link sulla pagine del Dipartimento attraverso il quale poter fare domande.

3) COSA SI PUÒ SELEZIONARE PER I DUE ESAMI A SCELTA?

I due esami a scelta sono completamente liberi. In particolare si possono scegliere gli esami dei gruppi opzionali di esami consigliati che non si sono già scelti. Si possono anche scegliere esami di altre Facoltà, per esempio corsi collegati alle applicazioni che vengono trattate dal punto di vista matematico. La scelta è però vincolata agli esami fornite dai corsi di Laurea Magistrale della Sapienza.

4) QUAL È LA DIFFERENZA CON IL CURRICULUM DI ANALISI DEL CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA?

Come si vede dallo schema dell'indirizzo, ci sono molti corsi di analisi che sono usufruibili da entrambe le Lauree Magistrali. La principale differenza tra questo indirizzo e quello di analisi nella Laurea Magistrale in Matematica è d'impostazione.

In particolare, il corso di Calcolo delle Variazioni, che è erogato per il corso di Laurea Magistrale in Matematica Applicata, è concepito per affrontare questioni matematiche strettamente legate alle applicazioni. Inoltre, l'obbligo di seguire corsi di fisica matematica e di probabilità è parte della formazione analitica dello studente per la conoscenza delle applicazioni alle scienze.

5) CHE TIPO DI SBOCCHI OFFRE QUESTO INDIRIZZO?

L'obiettivo principale è una preparazione matematica ad ampio spettro, con una particolare attenzione rivolta alle applicazioni che può rivelarsi utile in vari settori lavorativi dove il profilo matematico è apprezzato per la capacità di affrontare e risolvere problemi con rigore e sintesi; e in generale, la formazione di giovani ricercatori in Matematica applicata, interessati a vari aspetti della scienza e del rapporto della matematica con questi, e capaci anche di affrontare in modo rigoroso problemi e questioni derivanti da altre discipline,

ALCUNI QUESITI GUSTOSI

AVVERTENZA: la soluzione ai quesiti posti di seguito non è sempre semplice. Non scoraggiatevi se non riuscite a risolverli: ne saprete di più al termine del corso di studi in Metodi Variazionali!

1. LE GEODETICHE: QUAL È LA TRAIETTORIA PIÙ CORTA PER UN VOLO DA ROMA A NEW YORK?



Perché non segue il parallelo?



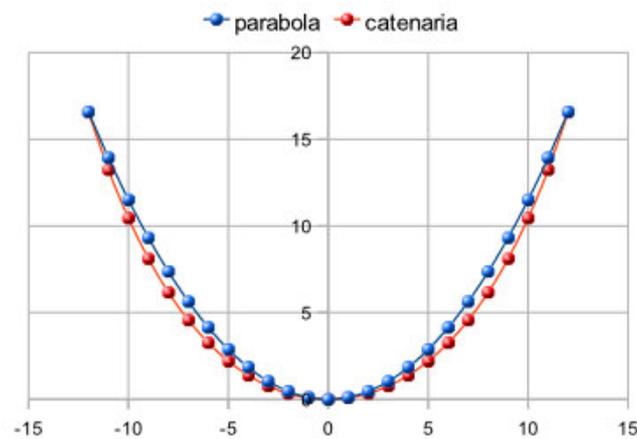
E queste altre traiettorie come ce le spieghiamo?

Si tratta della caratterizzazione delle curve di lunghezza minima che unisce due punti sulla sfera.

Come riscaldamento si può provare a rispondere a questa domanda nell'ipotesi (realistica!) che la terra abbia la forma di un cilindro.

Come si dispone un elastico teso tra due bandierine poste in un mappamondo in corrispondenza di Roma e New York?

2. LA CATENARIA: QUALE FORMA ASSUME UNA CATENA O UNA CORDA PESANTE APPESA AD UN MURO AGLI ESTREMI?



Sembra una parabola, ma non lo è.

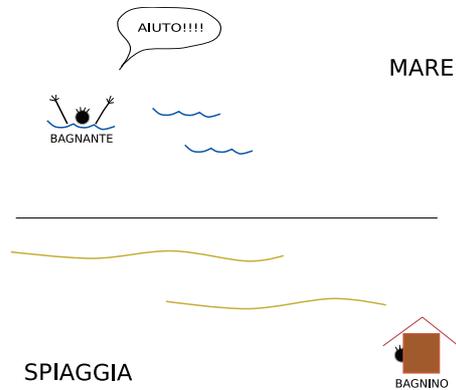
Per caratterizzarla e dedurne le proprietà principali è importante formulare la domanda in termini matematici: per esempio, potremmo dire che tra tutte le curve pesanti di densità costante la forma presa dalla catenaria è quella che minimizza la posizione del suo baricentro.

Riusciamo a capire perché questo profilo se fatto ruotare intorno all'asse x produce la forma di una "bolla di sapone" tesa tra due cerchi paralleli (detta per l'appunto **catenoide**)?

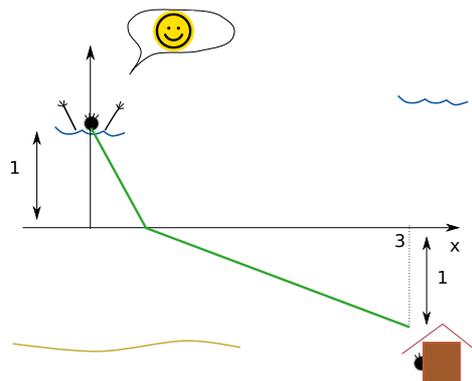


3. IL PRINCIPIO DI FERMAT: IL BAGNANTE E IL BAGNINO

Se il bagnino corre a velocità doppia rispetto alla velocità che tiene nuotando, qual è la traiettoria migliore per salvare il bagnante?



Questo è un problema di facile soluzione. Diversamente dai precedenti richiede solo strumenti di calcolo, ma vedrete quante generalizzazioni e conseguente interessanti ha (per esempio nel punto successivo).



La traiettoria segue la legge di Snell ed è una esemplificazione del principio di Fermat per le traiettorie della luce in mezzi diversi.



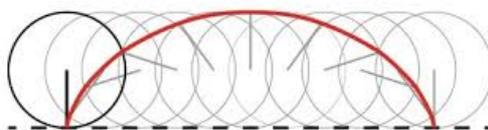
4. LA BRACHISTOCRONA E LA CICLOIDE

Qual è la curva che collega un punto A (a una certa altezza h) e un punto B (a quota 0) che permette la discesa sotto l'effetto della sola gravità nel minor tempo?

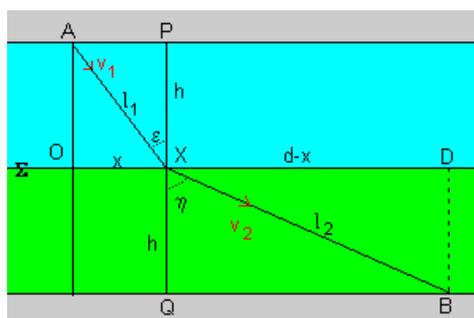


Non è una retta, né un arco di circonferenza: la curva in questione è la **brachistocrona**.

Qual è il collegamento con la **cicloide**, ossia la curva percorsa da un punto su una circonferenza che ruota su un piano senza strisciare (p. es. la ruota di una bici)?



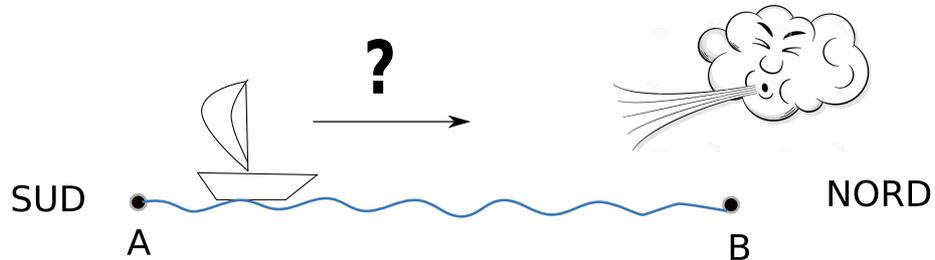
E qual è il legame tra questo problema e l'esempio precedente? Ossia il principio di Fermat?



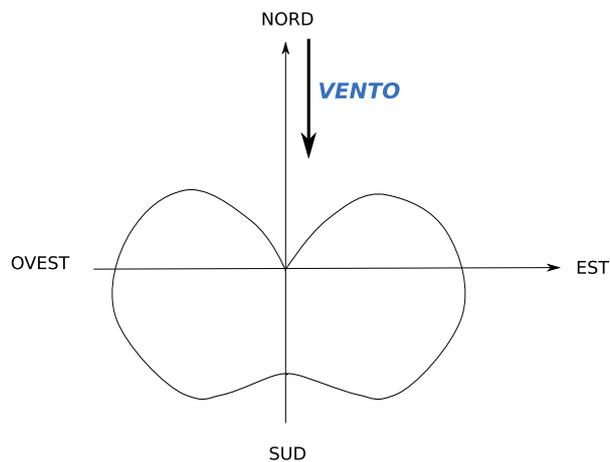
Trovate una bellissima spiegazione di questo collegamento in questo video:
<https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU>

5. IN BARCA A VELA LA TRAIETTORIA OTTIMALE ESISTE SEMPRE? È UNICA?

Se una barca a vela deve muoversi verso nord (da dove soffia il vento) che traiettoria deve tenere?

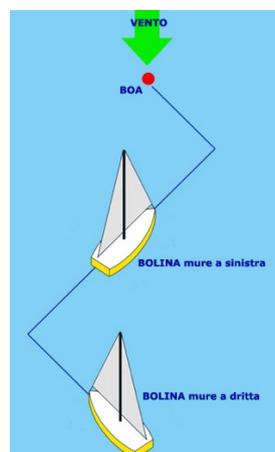


Supponiamo che questo è il profilo della spinta che la barca riesce ad avere in dipendenza dall'angolo rispetto alla direzione del vento:



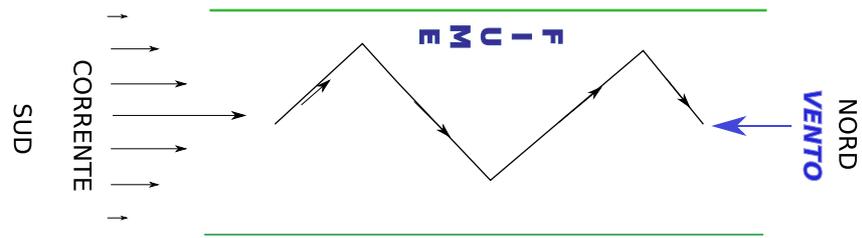
Quale sarà la traiettoria migliore?

La risposta è la bolina.



Ma quante traiettorie ci sono?

E se fossimo in un fiume al cui centro potremmo sfruttare meglio la corrente?



Esisterebbe una traiettoria ottimale? Come dovrebbe essere?

