

LEARNING AGREEMENT

Università degli Studi di Roma “La sapienza”		University of the Basque Country	
Esami	Crediti	Esami	Crediti
Analisi Reale	9	Measure and Integration	6
Algebra 1	12	Commutative Algebra	6
-	-	Groups and Representations	6
Altre conoscenze utili per l’inserimento nel mondo del lavoro	3	Statistical Inference	6
Totale crediti	24	Totale crediti	24

Programma dei corsi (Bilbao)

Measure and Integration (60 ore)

Measure of sets in $\mathbb{R}^n$ and measure spaces: the Riemann Integral and its limitations, content, exterior measure, Lebesgue measure, properties. No measurable sets, sigma-algebras, measures and measure spaces: basic properties and examples.

Lebesgue Integral and its properties: integration of simple functions, measurable functions, integration of positive functions and of no definite sign, integrable functions, convergence theorems for integrals. Differentiation under the integral sign.

Fubini’s Theorem and change of variables: Integrals of functions of several variables, Tonelli’s and Fubini’s Theorems, change of variables.

Introduction to Hilbert spaces: scalar product, Cauchy-Schwartz inequality. Hilbert spaces. Orthogonality and projections. Linear functionals: representation theorem. Orthogonal systems and bases.

Introduction to Banach and L_p spaces: norm spaces, L_p spaces, Hölder and Minkowski inequalities. Completeness of L_p . Linear operators: continuity and boundedness. Problems and practical questions related to each lesson will be developed.

Commutative Algebra (60 ore)

Generalities for Rings: rings and subrings. Ideals and quotient rings. Homomorphisms and isomorphisms.

Divisibility and Factorization: unique factorization domains. Principal ideals domains (PIDs). Euclidean domains. Applications: some classical arithmetical theorems.

Polynomials in several variables: Gauss Lemma. Factorization in polynomial rings. Irreducibility criteria.

Gröbner bases: monomial orders in the polynomial ring and division algorithm. Hilbert basis theorem. Basic properties of Gröbner bases. Buchberger algorithm. Applications.

Modules: modules, first properties and examples. Submodules, quotient modules. Module homomorphisms. Direct sum. Free modules.

Modules over PIDs: annihilators and primary decomposition. Structure theorem for modules over PIDs. Matrices over PIDs: Smith's normal form. Applications: diofantiquee linear equations, finitely generated abelian groups and Jordan canonical form.

Group and representations (60 ore)

Group actions on set: Actions and permutation representations. Orbits and stabilizers. Conjugacy classes and centralizers. Actions of groups on groups and semidirect product.

Sylow's theorems: Sylow subgroups. Sylow's theorems. Applications: criteria for non-simplicity and classification of some groups of small order.

Soluble groups: Commutators of elements and commutators of subgroups. The derived subgroup and the derived series. Soluble groups. Minimal normal subgroups in finite soluble groups.

Group representation: The concept of representation. Group representations. Irreducible representations and Schur's lemma. Maschke's theorem.

Character: Character of a representation. Properties. Orthogonality relations. The space of class functions. Kernel and centre of a character.

Burnside $p^a q^b$ theorem,: Algebraic integers. Divisibility of the degrees of the irreducible characters. Burnside's $p^a q^b$ theorem.

Statistical Inference (60 ore)

Sampling and estimation: introduction to Sampling, point estimation. Different methods to obtain estimators. Properties of estimators. Interval estimation. Definition of confidence interval. Classical confidence intervals for one population. Classical confidence intervals for two populations.

Hypothesis testing: introduction and fundamentals of hypothesis testing. Classification of the tests. Probability of error of type I and type II. Significance level, p-value. Uniformly more powerful contrasts (UMP). Neyman-Pearson's lemma. Control of error probabilities and sample size. Likelihood ratio test. Classical hypothesis tests for one and two populations.

Analysis of variance: introduction, analysis of variance for a single classification or a single factor, multiple comparisons.

Non parametric test: introduction, Goodness-of-fit tests, independence and homogeneity tests. Location test for one, two or more samples.

Programma dei corsi (Sapienza)

Analisi Reale (84 ore)

Teoria della misura: Misura di Lebesgue, teoria astratta della misura, teoria astratta dell'integrale, relazione tra integrale di Riemann e Lebesgue, formula del cambiamento di variabile, misure prodotto e teorema di Fubini, teoremi di differenziazione e Radon-Nikodym, spazi L^p .

Spazi di Hilbert e serie di Fourier: teorema di rappresentazione di Riesz, serie di Fourier, trasformata di Fourier.

Algebra 1 (108 ore)

Aritmetica su $\mathbb{Z}$ e modulare: Divisione euclidea, MCD, algoritmo euclideo e identità di Bézout, numeri primi, teorema fondamentale dell'aritmetica. Congruenze, elementi invertibili di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, la funzione di Eulero, il teorema di Eulero-Fermat, il Piccolo Teorema di Fermat, equazioni e sistemi di equazioni congruenziali, teorema cinese del resto, RSA.

Elementi di teoria dei gruppi: Gruppi, sottogruppi e sottogruppi normali, quozienti, omomorfismi, teoremi di omomorfismo e di isomorfismo, elementi coniugati, teorema di Lagrange e di Cayley. Gruppi ciclici e loro sottogruppi, gruppi diedrali, gruppi simmetrici (scrittura di una permutazione in cicli disgiunti, classe pari e dispari, permutazioni coniugate nel gruppo simmetrico). Prodotto diretto e semidiretto di gruppi. P-gruppi finiti. Gruppi abeliani finitamente generati e loro classificazione. Azioni di gruppo su un insieme. I teoremi di Sylow e applicazioni.

Elementi di teoria degli anelli: Anelli, ideali, quozienti, omomorfismi, teoremi di omomorfismo e di isomorfismo, campo delle frazioni di un dominio. - Domini euclidei, a ideali principali, a fattorizzazione unica, interi di Gauss, interi somma di due quadrati, ideali primi ed ideali massimali; divisibilità nei domini; elementi primi ed irriducibili. Anelli di polinomi: proprietà universale, polinomi a coefficienti in un dominio, la proprietà euclidea dei polinomi monici, quozienti di anelli di polinomi, lemma di Gauss, criterio di Eisenstein ed altri criteri di irriducibilità; gli elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[x]$, fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}[x]$.

Elementi di teoria dei campi: Estensioni di campi, elementi algebrici e trascendenti, estensioni finite e algebriche, grado di un'estensione, campo di spezzamento di un polinomio. Campi algebricamente chiusi, il teorema fondamentale dell'algebra, radici multiple e criterio della derivata, classificazione dei campi finiti, morfismo di Frobenius, radici n-esime dell'unità ed estensioni ciclotomiche. Costruzioni con riga e compasso (i problemi della trisezione dell'angolo, della quadratura del cerchio, della rettificazione della circonferenza e della duplicazione del cubo).