La matematica da medaglia Fields

ANNALISA MALUSA

Incontro con gli studenti dei LM Newton e Pascal

Il 1 Agosto 2018, in occasione del Congresso Internazionale dei Matematici

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

è stata assegnata la

FIELDS MEDAL

ad

ALESSIO FIGALLI

"per i suoi contributi alla teoria del trasporto ottimale e alle sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, alla geometria metrica e alla probabilità".

In questa presentazione vogliamo descrivere, nelle loro versioni più semplici, alcuni degli argomenti di ricerca di cui Alessio si è occupato.

Alessio Figalli ora lavora a Zurigo, ma è un ragazzo nato a Roma nel 1984 e che ha studiato alla **Scuola Normale Superiore di Pisa**

La **medaglia Fields** è probabilmente il premio più importante che un matematico possa ricevere.
Viene assegnata dalla comunità matematica mondiale (**IMU, International Mathematical Union**) ogni 4 anni a ricercatori con meno di 40 anni come riconoscimento per i loro straordinari contributi alla ricerca in matematica.

La medaglia ha su un lato l'immagine di **Archimede** e sull'altro la scritta

CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI
OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE

(I matematici riuniti da tutto il mondo hanno attribuito [questa medaglia] per dei contributi eccezionali)

Il trasporto ottimale, Didone e il meteo: ecco perché Figalli ha vinto la medaglia Fields

LA MEDAGLIA FIELDS

Alessio Figalli, il «Nobel per la matematica» e la magia dei numeri

Figalli, il volto bello della matematica: "Ragazzi, scopritela e non vi deluderà"

Qualche titolo uscito sui giornali quando Alessio ha ricevuto la medaglia. Vogliamo saperne di più?

Alcuni argomenti studiati da Alessio Figalli

Come ovvio, gli strumenti di matematica delle scuole superiori non permettono di apprezzare le tecniche matematiche usate da Alessio Figalli nelle sue dimostrazioni.

Tuttavia è possibile descrivere, con argomenti semplici, alcuni dei problemi di cui si è occupato.

In questo incontro parleremo di

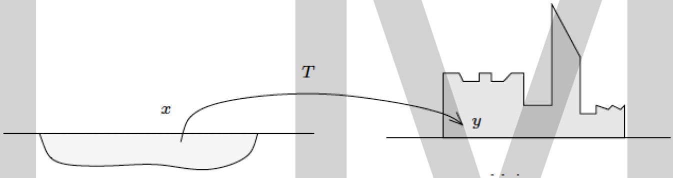
1. Trasporto ottimale
2. Problema isoperimetrico
3. Superfici minime – Bolle di sapone

Ringrazio Marina Mayer, Donatella Ricalzone e Noemi Stivali per gli "effetti speciali" che arricchiranno la presentazione.

Trasporto ottimale

Il problema fu posto per la prima volta da **Gaspard Monge** (1781):

Come spostare del materiale da un posto ad un altro "spendendo" il meno possibile?

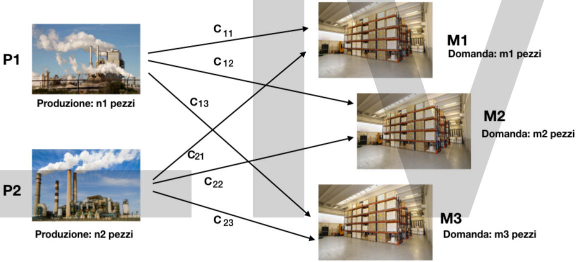


Il problema di Monge fu ripreso da **Leonid Kantorovich** (1939) che vinse il **Premio Nobel per l'Economia nel 1975** (unico economista sovietico a vincere il Nobel!)

"per i suoi contributi alla Teoria del collocamento ottimale delle risorse"

Un semplice problema di trasporto ottimale

- 2 centri di produzione: P_1, P_2;
- P_i produce settimanalmente n_i pezzi;
  La produzione settimanale va distribuita in 3 magazzini: M_1, M_2, M_3;
- Il magazzino M_j richiede settimanalmente m_j pezzi.
- Compatibilità domanda/offerta: $n_1 + n_2 = m_1 + m_2 + m_3$.
- c_{ij}: costo del trasporto per pezzo sul tragitto che unisce P_i a M_j.



Qual è l'organizzazione del trasporto che minimizza il costo totale?

Dati del problema:
P_1 produce settimanalmente 40 pezzi
P_2 produce settimanalmente 50 pezzi
Quindi abbiamo 90 pezzi da trasportare nei 3 magazzini.
M_1 vuole ricevere 35 pezzi
M_2 vuole ricevere 30 pezzi
M_3 vuole ricevere 25 pezzi

Costi del trasporto (euro/pezzo):

	M_1	M_2	M_3
P_1	20	40	30
P_2	10	50	60

Dati del problema:

P_1 produce settimanalmente 40 pezzi
P_2 produce settimanalmente 50 pezzi
Quindi abbiamo 90 pezzi da trasportare nei 3 magazzini.
M_1 vuole ricevere 35 pezzi
M_2 vuole ricevere 30 pezzi
M_3 vuole ricevere 25 pezzi

Costi del trasporto (euro/pezzo):

	M_1	M_2	M_3
P_1	20	40	30
P_2	10	50	60

Incognite: (x_1, x_2, x_3)= pezzi trasportati da P_1 ai magazzini.

Dati del problema:
P_1 produce settimanalmente 40 pezzi
P_2 produce settimanalmente 50 pezzi
Quindi abbiamo 90 pezzi da trasportare nei 3 magazzini.
M_1 vuole ricevere 35 pezzi
M_2 vuole ricevere 30 pezzi
M_3 vuole ricevere 25 pezzi

Costi del trasporto (euro/pezzo):

	M_1	M_2	M_3
P_1	20	40	30
P_2	10	50	60

Incognite: (x_1, x_2, x_3)= pezzi trasportati da P_1 ai magazzini.

Noti questi valori, i rimanenti pezzi devono arrivare da P_2:
$(35 - x_1, 30 - x_2, 25 - x_3)$.

Dati del problema:
P_1 produce settimanalmente 40 pezzi
P_2 produce settimanalmente 50 pezzi
Quindi abbiamo 90 pezzi da trasportare nei 3 magazzini.
M_1 vuole ricevere 35 pezzi
M_2 vuole ricevere 30 pezzi
M_3 vuole ricevere 25 pezzi

Costi del trasporto (euro/pezzo):

	M_1	M_2	M_3
P_1	20	40	30
P_2	10	50	60

Incognite: (x_1, x_2, x_3)= pezzi trasportati da P_1 ai magazzini.

Noti questi valori, i rimanenti pezzi devono arrivare da P_2:
$(35 - x_1, 30 - x_2, 25 - x_3)$.

Costo totale del trasporto (da minimizzare): $C(x_1, x_2, x_3)$
$= 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10(35 - x_1) + 50(30 - x_2) + 60(25 - x_3)$

Dati del problema:
P_1 produce settimanalmente 40 pezzi
P_2 produce settimanalmente 50 pezzi
Quindi abbiamo 90 pezzi da trasportare nei 3 magazzini.
M_1 vuole ricevere 35 pezzi
M_2 vuole ricevere 30 pezzi
M_3 vuole ricevere 25 pezzi

Costi del trasporto (euro/pezzo):

	M_1	M_2	M_3
P_1	20	40	30
P_2	10	50	60

Incognite: (x_1, x_2, x_3)= pezzi trasportati da P_1 ai magazzini.

Noti questi valori, i rimanenti pezzi devono arrivare da P_2:
$(35 - x_1, 30 - x_2, 25 - x_3)$.

Costo totale del trasporto (da minimizzare): $C(x_1, x_2, x_3)$
$= 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10(35 - x_1) + 50(30 - x_2) + 60(25 - x_3)$
$= 10x_1 - 10x_2 - 30x_3 + 3350$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 35 \quad \text{(richiesta di } M_1\text{)} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 35 & \text{(richiesta di } M_1) \\ 0 \le x_2 \le 30 & \text{(richiesta di } M_2) \\ & \\ & \end{cases}$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 & \text{(richiesta di } M_1\text{)} \\ 0 \leq x_2 \leq 30 & \text{(richiesta di } M_2\text{)} \\ 0 \leq x_3 \leq 25 & \text{(richiesta di } M_3\text{)} \\ & \end{cases}$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 \quad \text{(richiesta di } M_1) \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \quad \text{(richiesta di } M_2) \\ 0 \leq x_3 \leq 25 \quad \text{(richiesta di } M_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad \text{(produzione di } P_1) \end{cases}$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 35 \quad \text{(richiesta di } M_1\text{)} \\ 0 \le x_2 \le 30 \quad \text{(richiesta di } M_2\text{)} \\ 0 \le x_3 \le 25 \quad \text{(richiesta di } M_3\text{)} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad \text{(produzione di } P_1\text{)} \end{cases}$$

2) sia minimo (ottimale) il costo totale

$$C(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 - 10x_2 - 30x_3 + 3350.$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 \quad \text{(richiesta di } M_1) \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \quad \text{(richiesta di } M_2) \\ 0 \leq x_3 \leq 25 \quad \text{(richiesta di } M_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad \text{(produzione di } P_1) \end{cases}$$

2) sia minimo (ottimale) il costo totale

$$C(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 - 10x_2 - 30x_3 + 3350.$$

OSSERVAZIONE: il vincolo di produzione ci permette di ridurre ulterirmente le incognite nel costo: $x_3 = 40 - x_1 - x_2$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 \quad \text{(richiesta di } M_1\text{)} \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \quad \text{(richiesta di } M_2\text{)} \\ 0 \leq x_3 \leq 25 \quad \text{(richiesta di } M_3\text{)} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad \text{(produzione di } P_1\text{)} \end{cases}$$

2) sia minimo (ottimale) il costo totale

$$C(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 - 10x_2 - 30x_3 + 3350.$$

OSSERVAZIONE: il vincolo di produzione ci permette di ridurre ulteriormente le incognite nel costo: $x_3 = 40 - x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) &= 10x_1 - 10x_2 - 30(40 - x_1 - x_2) + 3350 \\ &= 40x_1 + 20x_2 + 2150. \end{aligned}$$

Formulazione matematica (programmazione lineare): trovare (x_1, x_2, x_3) (variabili di decisione) tali che 1) siano soddisfatti i vincoli (di produzione e domanda)

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 \quad \text{(richiesta di } M_1\text{)} \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \quad \text{(richiesta di } M_2\text{)} \\ 0 \leq x_3 \leq 25 \quad \text{(richiesta di } M_3\text{)} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \quad \text{(produzione di } P_1\text{)} \end{cases}$$

2) sia minimo (ottimale) il costo totale

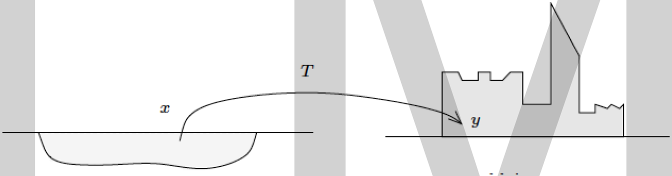
$$C(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 - 10x_2 - 30x_3 + 3350.$$

OSSERVAZIONE: il vincolo di produzione ci permette di ridurre ulterirmente le incognite nel costo: $x_3 = 40 - x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) &= 10x_1 - 10x_2 - 30(40 - x_1 - x_2) + 3350 \\ &= 40x_1 + 20x_2 + 2150. \end{aligned}$$

Utilizzeremo un **argomento geometrico** per determinare il trasporto ottimale.
Questo approccio sarà efficace per via del basso numero di incognite.

Quando il numero di incognite aumenta, la risoluzione diventa molto complessa e vengono usati algoritmi numerici (i conti li fa il computer).



Quando il problema non è finito dimensionale (ad esempio il problema di Monge di trasportare sabbia dalle zone di scavo alle zone da fortificare) c'è bisogno di teorie molto sofisticate di Analisi Matematica per studiarlo.

Rappresentiamo graficamente sul piano cartesiano l'insieme delle decisioni ammissibili identificando punti del piano $\longleftrightarrow (x_1, x_2)$

Rappresentiamo graficamente sul piano cartesiano l'insieme delle decisioni ammissibili identificando punti del piano $\longleftrightarrow (x_1, x_2)$

Ricordiamo che

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ 0 \le x_3 \le 25, \end{cases}$$

- ricavando $x_3 = 40 - x_1 - x_2$ dalla prima equazione
- sostituendo nella seconda disequazione,

otteniamo la condizione $0 \le 40 - x_1 - x_2 \le 25$
che può essere riscritta in uno dei due modi equivalenti

$$15 \le x_1 + x_2 \le 40 \qquad 15 - x_1 \le x_2 \le 40 - x_1$$

Rappresentiamo graficamente sul piano cartesiano l'insieme delle decisioni ammissibili identificando punti del piano $\longleftrightarrow (x_1, x_2)$

Ricordiamo che

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ 0 \leq x_3 \leq 25, \end{cases}$$

- ricavando $x_3 = 40 - x_1 - x_2$ dalla prima equazione
- sostituendo nella seconda disequazione,

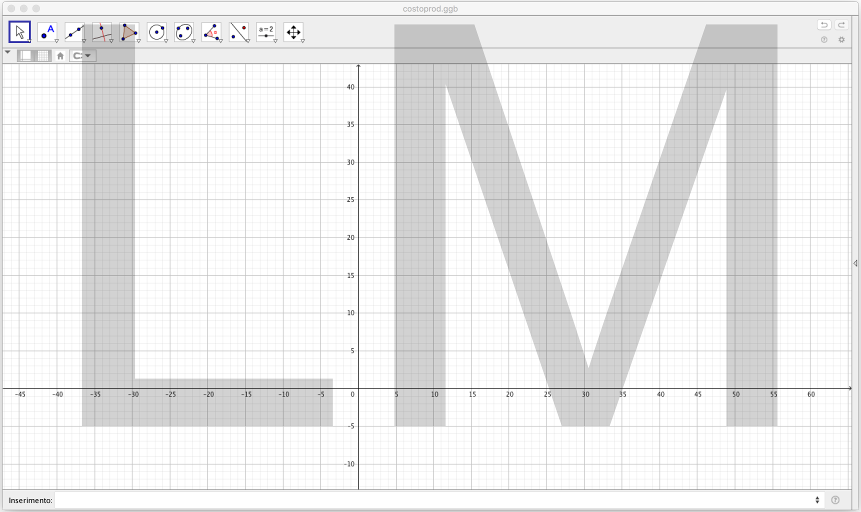
otteniamo la condizione $0 \leq 40 - x_1 - x_2 \leq 25$
che può essere riscritta in uno dei due modi equivalenti

$$15 \leq x_1 + x_2 \leq 40 \qquad 15 - x_1 \leq x_2 \leq 40 - x_1$$

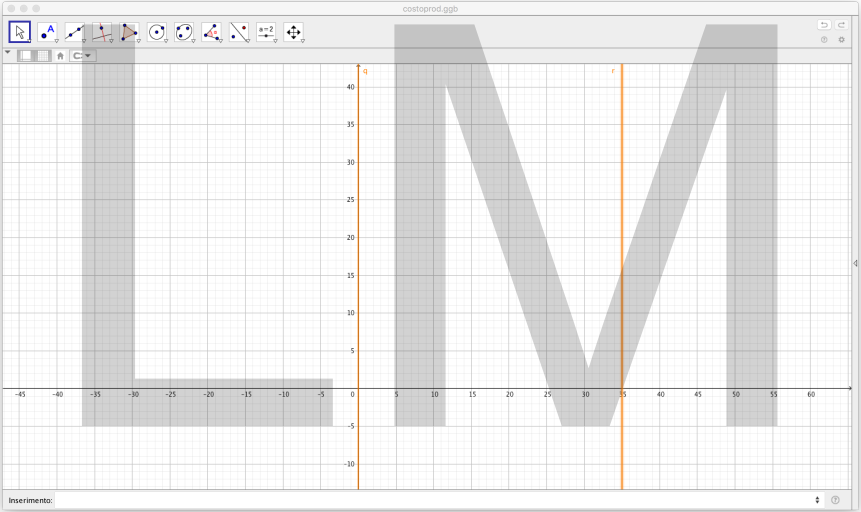
In conclusione, dobbiamo risolvere un sistema di disequazioni lineari

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 35 \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \\ 15 \leq x_1 + x_2 \leq 40 \end{cases}$$

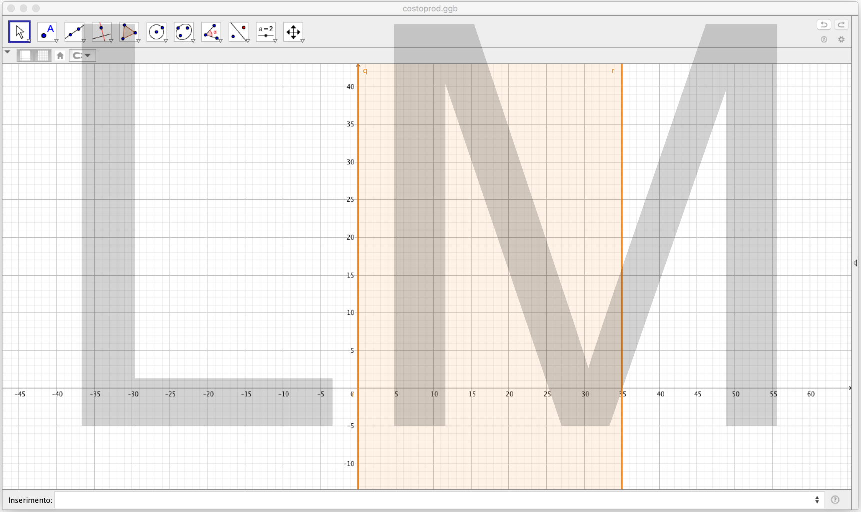
Insieme delle decisioni ammissibili



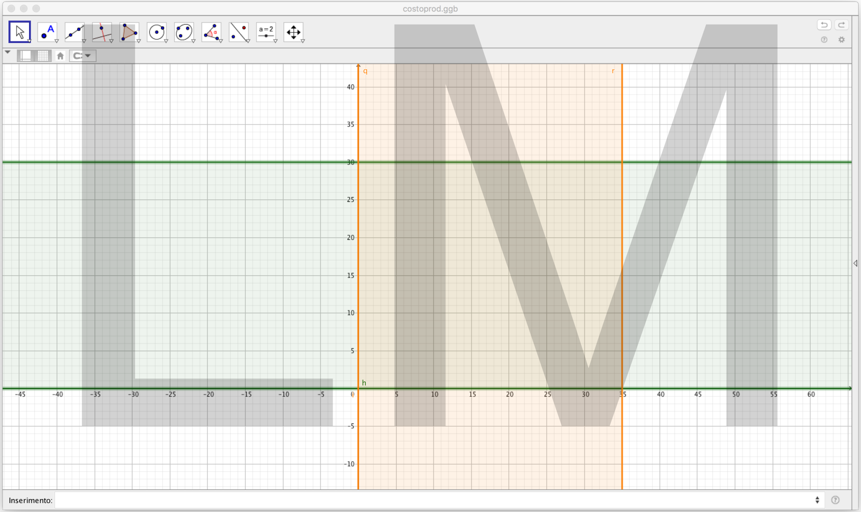
Insieme delle decisioni ammissibili



Insieme delle decisioni ammissibili

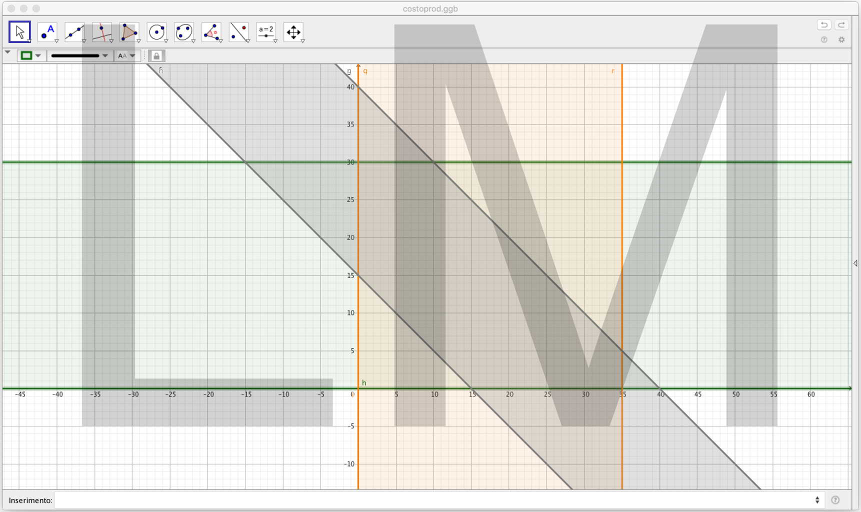


Insieme delle decisioni ammissibili

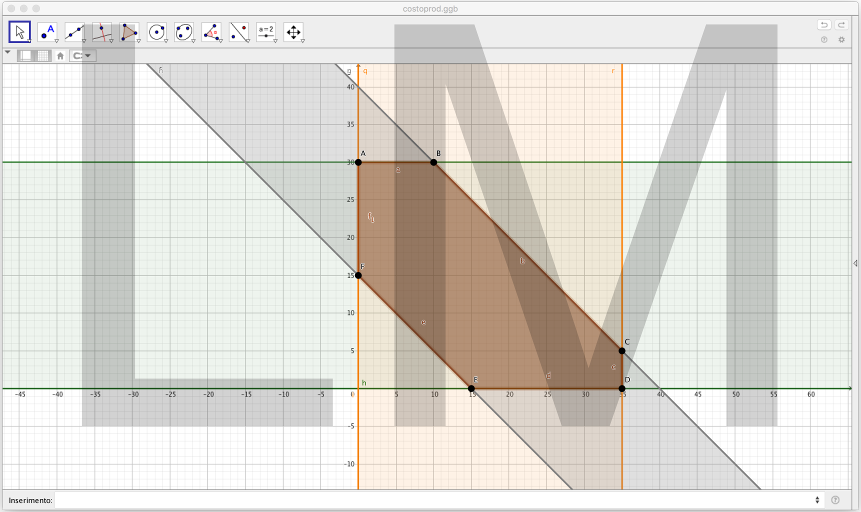


Insieme delle decisioni ammissibili

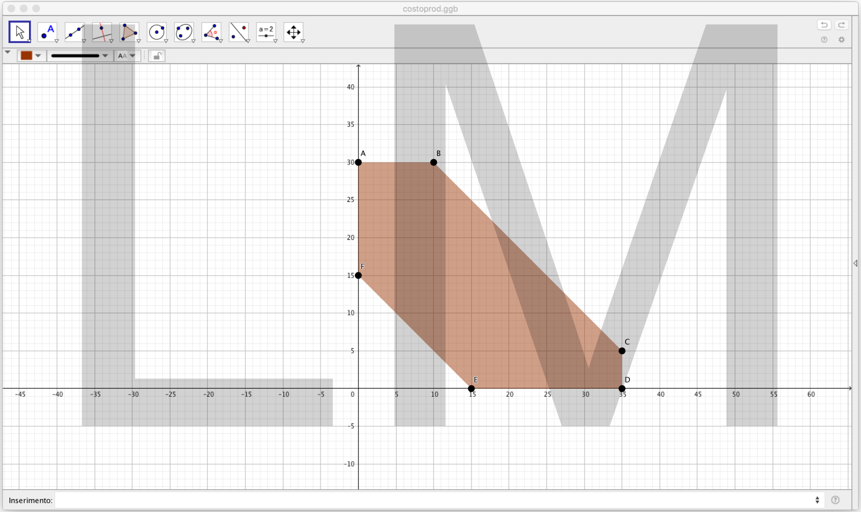
Insieme delle decisioni ammissibili



Insieme delle decisioni ammissibili

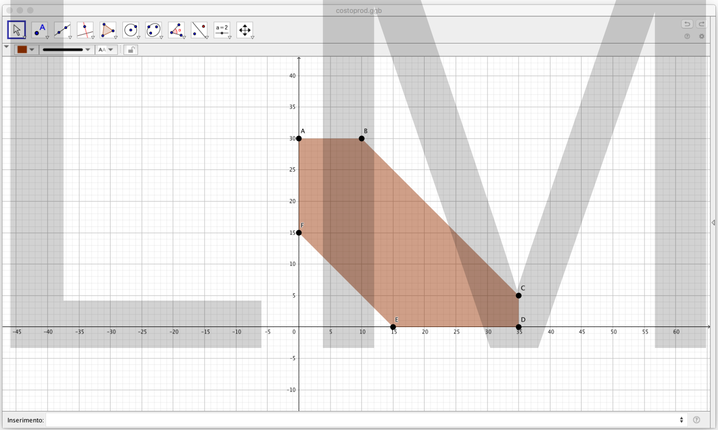


Insieme delle decisioni ammissibili



Costo da minimizzare: $40x_1 + 20x_2 + 2150 = K$

- Come lo si rappresenta graficamente nel piano cartesiano?
- Come si trova il valore più piccolo possibile?



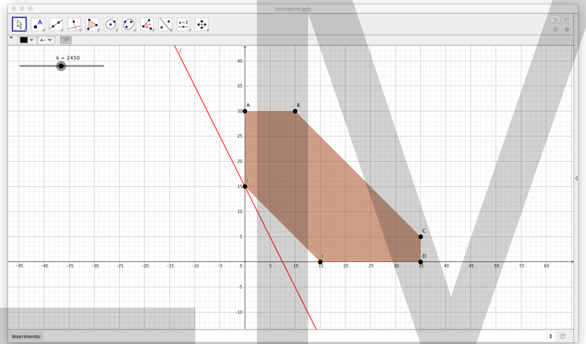
Costo da minimizzare: $40x_1 + 20x_2 + 2150 = K$

Costo da minimizzare: $40x_1 + 20x_2 + 2150 = K$

Al variare di $K > 0$ si ha un fascio di rette parallele.

Costo da minimizzare: $40x_1 + 20x_2 + 2150 = K$

Al variare di $K > 0$ si ha un fascio di rette parallele.
Il costo K_{min} corrisponde geometricamente alla prima retta che incontra l'insieme delle decisioni ammissibili. Questo accade nel primo vertice a sinistra.



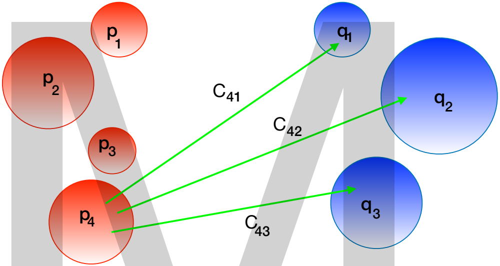
Costo minimo:

$x_1 = 0$, $x_2 = 15$, spesa totale $C(0, 15) = 20 \cdot 15 + 2150 = 2450$ euro.

Distribuzione iniziale delle risorse:
punti iniziali $I = p_1, p_2, \ldots, p_n$
quantità disponibili $M_j = M(p_j)$.

Allocazione finale delle risorse:
punti finali $F = q_1, q_2, \ldots, q_m$
quantità richieste $N_k = N(q_k)$.

Costo unitario:
$C_{j,k} = C(p_j, q_k)$ costo per trasportare una unità dal punto di partenza p_j al punto di arrivo q_k.



Piani di trasporto possibili: quantità $T_{j,k} = T(p_j, q_k)$ da trasportare dal punto di partenza p_j al punto di arrivo q_k. Devo essere soddisfatte le richieste

$$T(p_j, q_k) \geq 0, \quad \sum_{q\in F} T(p_j, q) = M(p_j), \quad \sum_{p\in I} T(p, q_k) = N(q_k)$$

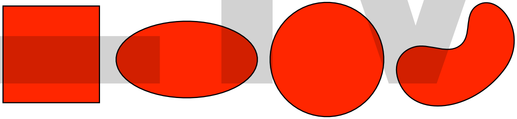
Costo di un piano di trasporto: $\sum_{p\in I, q\in F} C(p,q) \cdot T(p,q)$.

PROBLEMA: determinare T in modo che il costo C sia minimo.

Problema isoperimetrico nel piano

Etimologia: dal greco
isos ($\grave{\iota}\sigma o\varsigma$) = uguale
perì–metron ($\pi\varepsilon\rho\grave{\iota}$–$\mu\grave{\varepsilon}\tau\rho o\nu$)

Dato un filo chiuso di lunghezza L, come lo si deve disporre nel piano in modo che delimiti una regione di area massima?
O, equivalentemente, tra tutti gli insiemi con area fissata, quale ha perimetro minimo?



Tale problema ha origini nella matematica greca antica.

Il mito: il problema (e la soluzione) di Didone

Virgilio, Eneide, libro I, 367-368

Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorger la gran cittade e l'alta rocca
della nuova Carthago, che dal fatto
Birsa nomassi, per l'astuta merce
che, per fondarla, fèr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.

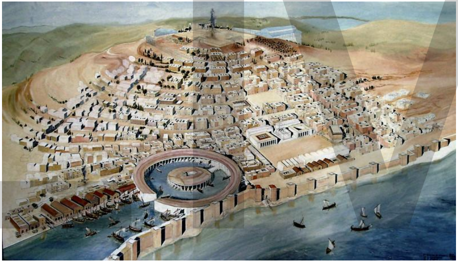
(Nota: Birsa = in greco "pelle di bue" ed in fenicio "rocca")

Didone, regina di Tiro, costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, si rifugiò in Nord Africa, nelle terre di Iarba, re dei Getuli, cui chiese non solo asilo ma anche della terra per costruire una nuova città: la futura Cartagine.

Iarba, re ospitale ma piuttosto geloso dei suoi possedimenti, concesse alla regina tutta la terra che ella fosse riuscita a ricoprire con una pelle di bue.

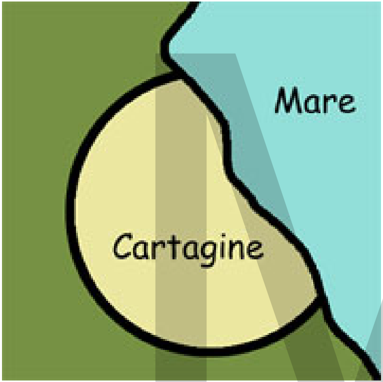
Didone non si perse affatto d'animo: presa una pelle di bue, iniziò a tagliarla a striscioline sottili, le legò tra di loro e costruì una lunga corda.

Ora la questione è: quale forma dare a questa corda per racchiudere la maggior superficie possibile?



(Descrizione tratta da un articolo divulgativo scritto da Figalli per ithaca.unisalento.it)

Didone scelse di costruire con il suo filo di pelle un **semicerchio**.

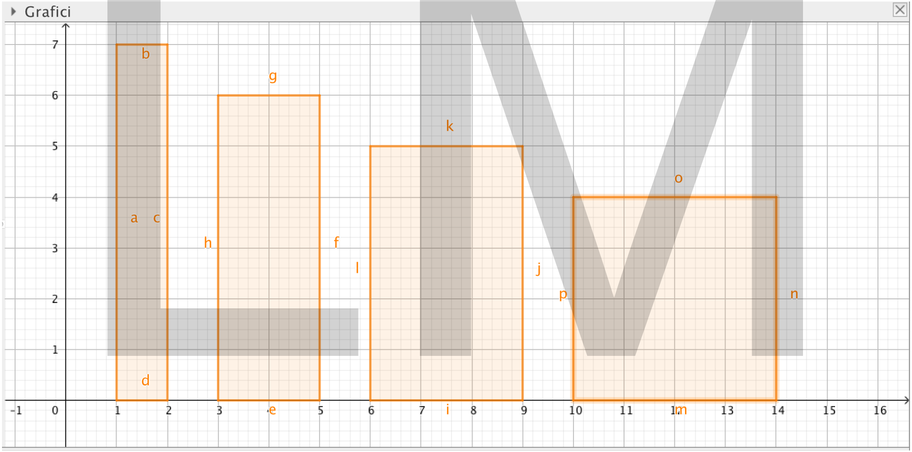


Avrà ottenuto l'area più grande che poteva ottenere?

Prima di rispondere a questa domanda proviamo a risolvere problemi isoperimetrici più semplici, considerando geometrie particolari.

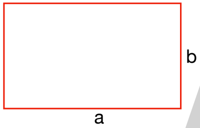
Problema isoperimetrico per i rettangoli

Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?



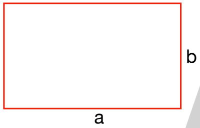
Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?

Perimetro: $P = 2(a + b)$
Area: $A = a \cdot b$



Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?

Perimetro: $P = 2(a+b)$
Area: $A = a \cdot b$



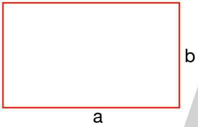
Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica:

$\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ per ogni $a, b \geq 0$ e $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ se e solo se $a = b$.

Dimostrazione: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$.

Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?

Perimetro: $P = 2(a+b)$
Area: $A = a \cdot b$



Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica:

$\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ per ogni $a, b \geq 0$ e $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ se e solo se $a = b$.

Dimostrazione: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$.
Scritta in termini di area e perimetro, l'enunciato diventa la

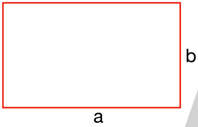
Disuguaglianza isoperimetrica per rettangoli:

$$A = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{P^2}{16}.$$

e l'area A è massima se e solo se $a = b$.

Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?

Perimetro: $P = 2(a + b)$
Area: $A = a \cdot b$



Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica:

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ per ogni $a, b \geq 0$ e $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ se e solo se $a = b$.

Dimostrazione: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$.
Scritta in termini di area e perimetro, l'enunciato diventa la

Disuguaglianza isoperimetrica per rettangoli:

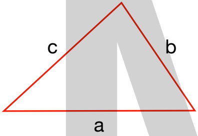
$$A = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{P^2}{16}.$$

e l'area A è massima se e solo se $a = b$.

Quindi la soluzione del problema isoperimetrico sui rettangoli è il **quadrato**

Problema isoperimetrico per i triangoli

Tra tutti i triangoli con perimetro fissato, quale ha area massima?



Per risolvere il problema servono 2 ingredienti:

Formula di Erone per i triangoli:

$16A^2 = P(P - 2a)(P - 2b)(P - 2c).$

Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica (con 3 fattori):

$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ per ogni $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

e $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ se e solo se $\alpha = \beta = \gamma$.

Formula di Erone per i triangoli:

$16A^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$.

Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica (con 3 fattori):

$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ per ogni $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

e $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ se e solo se $\alpha = \beta = \gamma$.

Unendo le informazioni otteniamo che

- l'area A è massima quando il prodotto $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$ è massimo (dalla Formula di Erone, ricordando che il valore P del perimetro è fissato).

Formula di Erone per i triangoli:

$16A^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$

Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica (con 3 fattori):

$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ per ogni $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

e $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ se e solo se $\alpha = \beta = \gamma$.

Unendo le informazioni otteniamo che

- l'area A è massima quando il prodotto $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$ è massimo (dalla Formula di Erone, ricordando che il valore P del perimetro è fissato).
- il prodotto $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$ è massimo se e solo se $(P-2a) = (P-2b) = (P-2c)$, ossia $a = b = c = \dfrac{P}{3}$.

Formula di Erone per i triangoli:

$$16A^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica (con 3 fattori):

$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ per ogni $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

e $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ se e solo se $\alpha = \beta = \gamma$.

Unendo le informazioni otteniamo che

- l'area A è massima quando il prodotto $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$ è massimo (dalla Formula di Erone, ricordando che il valore P del perimetro è fissato).
- il prodotto $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$ è massimo se e solo se $(P-2a) = (P-2b) = (P-2c)$, ossia $a = b = c = \dfrac{P}{3}$.

Quindi la soluzione del problema isoperimetrico sui triangoli è il

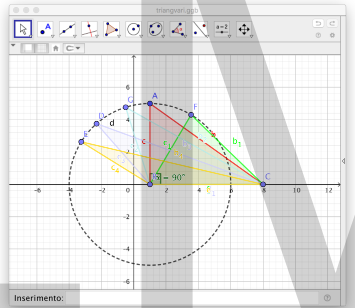
triangolo equilatero

Esercizio: triangoli con lunghezza di due lati fissata

Domanda: tra tutti i triangoli con lunghezza di due lati fissata, quale ha area massima?

Esercizio: triangoli con lunghezza di due lati fissata

Domanda: tra tutti i triangoli con lunghezza di due lati fissata, quale ha area massima?



Risposta: al variare del terzo lato cambia l'altezza del triangolo, che risulta essere massima quando i due lati sono perpendicolari.

- Tra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati il poligono regolare ha area massima.
- A parità di perimetro, il poligono regolare con $n+1$ lati ha area maggiore di quello con n lati.

Utilizziamo **Geogebra** per vedere cosa succede

Risultati classici – Grecia Ellenistica

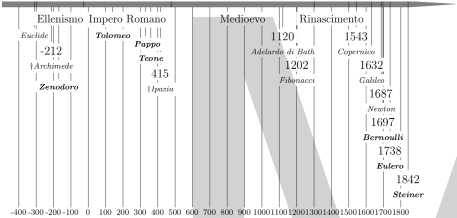
- Tra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati il poligono regolare ha area massima.
- A parità di perimetro, il poligono regolare con $n+1$ lati ha area maggiore di quello con n lati.

Utilizziamo **Geogebra** per vedere cosa succede

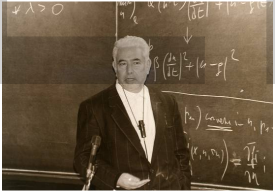
Ipotesi plausibile: il cerchio risolve il problema isoperimetrico

Breve storia del problema isoperimetrico

Le congetture del periodo ellenistico rimasero tali fino al XIX secolo.



- 1842 - **J.Steiner** dimostra che se il minimo esiste, allora è il cerchio.
- 1958 - **E. De Giorgi** dimostra che il minimo esiste.



E. De Giorgi (1928-1996) L. Ambrosio (1963) A. Figalli (1984)

La dimostrazione di Steiner si basa sul **principio di esclusione**:

Per ogni insieme che non sia il cerchio si può esibire un insieme che, a parità di perimetro, ha area maggiore.

Il problema isoperimetrico: dimostrazione di Steiner

La dimostrazione di Steiner si basa sul **principio di esclusione**:

Per ogni insieme che non sia il cerchio si può esibire un insieme che, a parità di perimetro, ha area maggiore.

Si procede in 3 passi:

- l'insieme di area massima deve essere convesso;

Il problema isoperimetrico: dimostrazione di Steiner

La dimostrazione di Steiner si basa sul **principio di esclusione**:

Per ogni insieme che non sia il cerchio si può esibire un insieme che, a parità di perimetro, ha area maggiore.

Si procede in 3 passi:

- l'insieme di area massima deve essere convesso;
- l'insieme di area massima deve avere un'asse di simmetria;

Il problema isoperimetrico: dimostrazione di Steiner

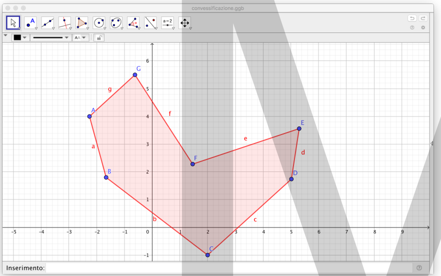
La dimostrazione di Steiner si basa sul **principio di esclusione**:

Per ogni insieme che non sia il cerchio si può esibire un insieme che, a parità di perimetro, ha area maggiore.

Si procede in 3 passi:

- l'insieme di area massima deve essere convesso;
- l'insieme di area massima deve avere un'asse di simmetria;
- l'insieme di area massima deve essere un cerchio.

1. **Se il minimo esiste,** **deve essere convesso**, ossia non può avere "parti entranti".

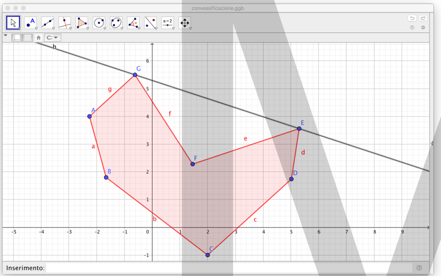


Se così non fosse

- si **"tira dritto"** nelle parti entranti, ottenendo una figura che ha area maggiore e perimetro minore;
- si **gonfia** l'insieme ottenuto, per ristabilire il perimetro assegnato, aumentando ancora l'area contenuta.

La dimostrazione di Steiner 1: convessificazione

1. **Se il minimo esiste, deve essere convesso**, ossia non può avere "parti entranti".

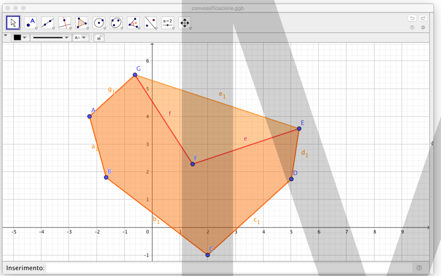


Se così non fosse

- si **"tira dritto"** nelle parti entranti, ottenendo una figura che ha area maggiore e perimetro minore;
- si **gonfia** l'insieme ottenuto, per ristabilire il perimetro assegnato, aumentando ancora l'area contenuta.

La dimostrazione di Steiner 1: convessificazione

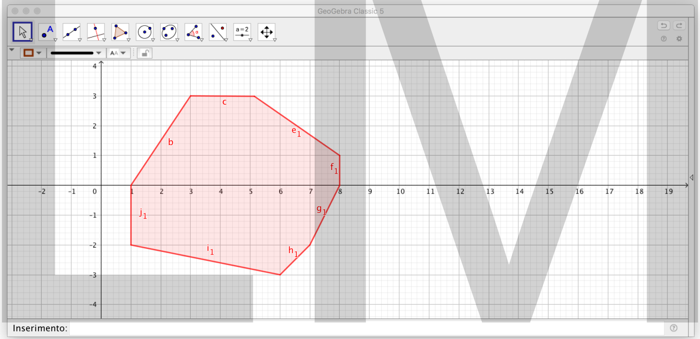
1. Se il minimo esiste, deve essere convesso, ossia non può avere "parti entranti".



Se così non fosse,

- si **"tira dritto"** nelle parti entranti, ottenendo una figura che ha area maggiore e perimetro minore;
- si **gonfia** l'insieme ottenuto, per ristabilire il perimetro assegnato, aumentando ancora l'area contenuta.

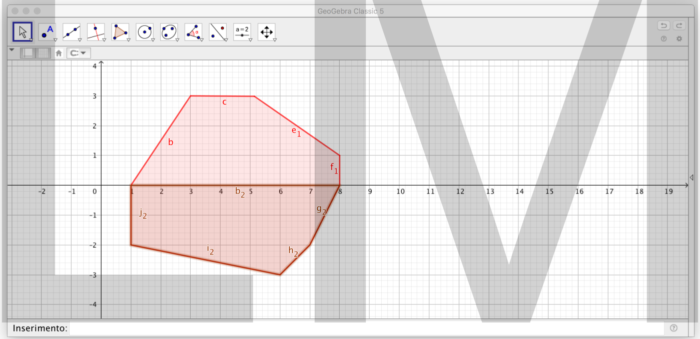
2. Presi, sul bordo della soluzione, due punti che separano archi di uguale lunghezza, la corda che li congiunge divide la figura in due regioni che hanno la stessa area.



Se così non fosse, **ribaltando** rispetto alla corda la parte di area maggiore,si otterrebbe una figura con lo stesso perimetro e area più grande.

La dimostrazione di Steiner 2: simmetrizzazione

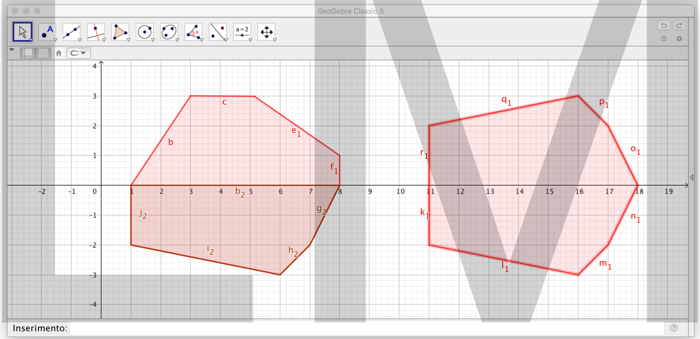
2. Presi, sul bordo della soluzione, due punti che separano archi di uguale lunghezza, la corda che li congiunge divide la figura in due regioni che hanno la stessa area.



Se così non fosse, **ribaltando** rispetto alla corda la parte di area maggiore,si otterrebbe una figura con lo stesso perimetro e area più grande.

La dimostrazione di Steiner 2: simmetrizzazione

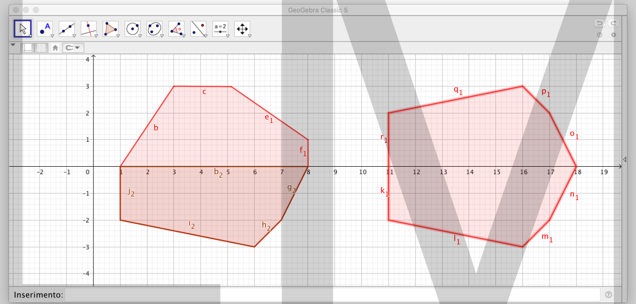
2. Presi, sul bordo della soluzione, due punti che separano archi di uguale lunghezza, la corda che li congiunge divide la figura in due regioni che hanno la stessa area.



Se così non fosse, **ribaltando** rispetto alla corda la parte di area maggiore,si otterrebbe una figura con lo stesso perimetro e area più grande.

La dimostrazione di Steiner 2: simmetrizzazione

2. Presi, sul bordo della soluzione, due punti che separano archi di uguale lunghezza, la corda che li congiunge divide la figura in due regioni che hanno la stessa area.



NOTA: questo ci dice anche che possiamo pensare che l'insieme sia simmetrico rispetto alla retta che divide in due il perimetro.
Quindi ci basta ragionare su mezza figura e poi ottenere la figura intera.

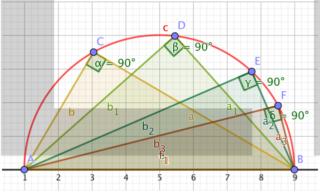
3. Tra tutte le regioni convesse racchiuse tra una retta ed un arco di curva lunga $L/2$ con estremi sulla retta, quella di area massima è un semicerchio.

La dimostrazione di Steiner 3: conclusione

3. Tra tutte le regioni convesse racchiuse tra una retta ed un arco di curva lunga $L/2$ con estremi sulla retta, quella di area massima è un semicerchio.

Usiamo la seguente **caratterizzazione della semicirconferenza** (immagine a sinistra):

> ogni triangolo che ha come vertici gli estremi ed un qualunque punto appartenente all'arco è rettangolo.

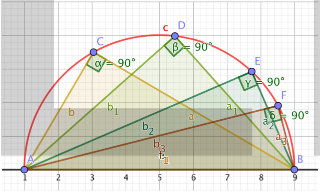


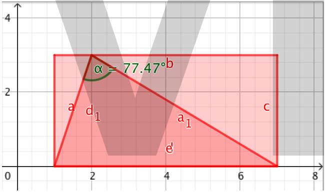
La dimostrazione di Steiner 3: conclusione

3. Tra tutte le regioni convesse racchiuse tra una retta ed un arco di curva lunga $L/2$ con estremi sulla retta, quella di area massima è un semicerchio.

Usiamo la seguente **caratterizzazione della semicirconferenza** (immagine a sinistra):

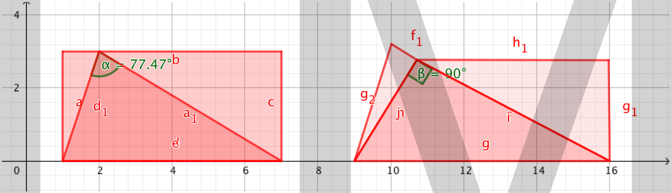
> ogni triangolo che ha come vertici gli estremi ed un qualunque punto appartenente all'arco è rettangolo.





Quindi, se la regione non fosse un semicerchio, ci sarebbe almeno un punto in cui l'angolo non è retto (immagine a destra).

3. Tra tutte le regioni convesse racchiuse tra una retta ed un arco di curva lunga $L/2$ con estremi sulla retta, quella di area massima è un semicerchio.



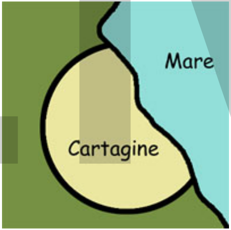
Mantenendo costante la lunghezza dei due lati obliqui e l'area esterna al triangolo, modifichiamo la base in modo da ottenere l'angolo retto. Con questa operazione, aumentiamo l'area del triangolo (e quindi l'area totale), mantenendo costante il perimetro dell'insieme

Rivediamo l'ultima parte della dimostrazione in un video:

E il problema di Didone?

In questo caso dobbiamo "chiudere" con il nastro di pelle una regione che affaccia sulla costa (**la parte di perimetro lungo la costa è gratis**) racchiudendo la maggiore area possibile.

- per il passo 1 della dimostrazione di Steiner la regione deve essere convessa;
- per il passo 3 della dimostrazione di Steiner, tra tutte le regioni convesse, quella con area maggiore è il semicerchio.



Quindi Didone ha risolto correttamente il suo problema isoperimetrico!

Superfici minime – Bolle di sapone

Perché le bolle di sapone hanno forma sferica?
Perché i giornali hanno scritto che Figalli ha studiato le bolle di sapone?

Per motivi fisici che descriveremo,

le bolle di sapone hanno la proprietà isoperimetrica (nello spazio):
la loro forma è sferica per ridurre il più possibile la superficie di contatto con l'aria a volume fissato.

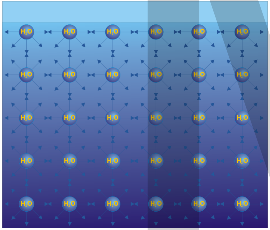
Comportamento fisico e chimico dell'acqua

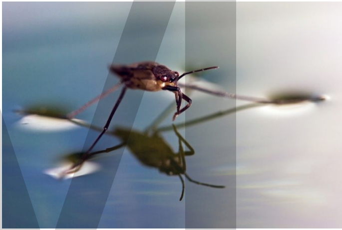
Le molecole di acqua hanno una gran voglia di rimanere legate tra loro (viscosità dell'acqua - legame ad idrogeno):

se mettiamo una goccia su una superficie idrofoba (quindi in assenza di forze che la disgreghino) rimane "compatta".

Comportamento fisico e chimico dell’acqua

Se mettiamo dell’acqua in un bicchiere, le molecole interne sono in equilibrio, mentre quelle sulla superficie sono attratte verso l’interno e legate lungo la direzione tangente alla superficie **(tensione superficiale)**.



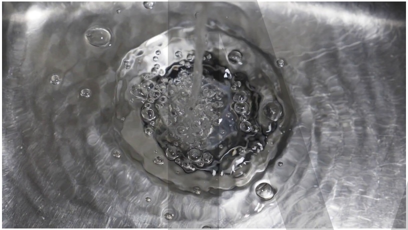


Quindi la superficie risulta essere, a tutti gli effetti, una membrana tesa.

Da questo dipendono tutta una serie di fenomeni, come il fatto che si possa riempire un bicchiere d’acqua oltre al bordo o che gli insetti riescano a posarsi sull’acqua.

Bolle

Una bolla è formata da una pellicola molto sottile che circonda un volume (diciamo riempito di aria).



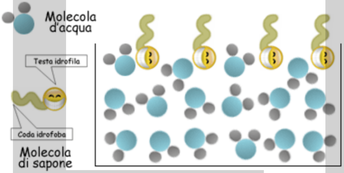
E' **molto difficile fare bolle di acqua**, proprio perché la tensione superficiale dell'acqua è troppo alta e quindi le "pellicole d'acqua" sono poco elastiche.

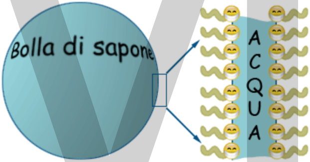
Le bolle d'acqua che vediamo, per esempio, nel lavandino, sono piccole e si rompono subito.

Perché se all'acqua aggiungiamo del sapone le bolle diventano più stabili?

I tensioattivi

I saponi sono dei tensioattivi (agenti attivi in superficie): composti capaci di diminuire la tensione superficiale dell'acqua rendendo la "pelle" dell'acqua, in un certo senso, più "elastica".
I tensioattivi sono molecole con **teste idrofile** (che cercano l'acqua) e **code idrofobe** (che sfuggono l'acqua) che si distribuiscono sullo strato superficiale allentando i legami tra le molecole d'acqua.





La pellicola della bolla di sapone è costituita da un sottile strato di acqua ricoperto da due strati di sapone.
Grazie alla flessibilità di questa pellicola la bolla, a parità di volume all'interno, può prendere la forma che preferisce.

Il principio di minima azione

Maupertuis (1744): la natura segue sempre le vie più semplici, e le vie più semplici sono quelle che minimizzano l'azione, cioè il dispendio che si paga nel produrre il fenomeno.

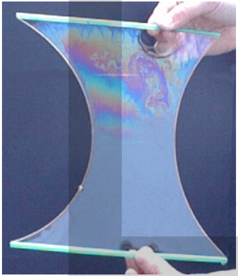
Nel caso delle pellicole di sapone, **"costa" aumentare la superficie** (e, conseguentemente, la tensione superficiale). In conclusione

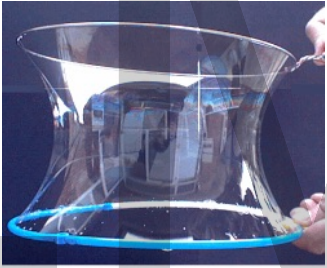
> Le pellicole di sapone assumono naturalmente la configurazione con la superficie minima.

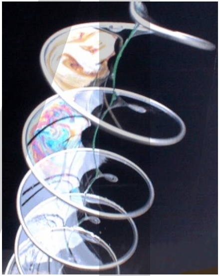
In particolare, le bolle propriamente dette (quelle riempite d'aria) sono sferiche perché la superficie sferica è quella minimale a parità di volume racchiuso.

Superfici minime

In generale, data una struttura in metallo, la pellicola di sapone produce la superficie minima che ha tale struttura come contorno:







Le pellicole di sapone sanno risolvere il problema isoperimetrico nel piano

La proprietà di minimalità delle pellicole di sapone ci fornisce una dimostrazione sperimentale del fatto che il cerchio sia la soluzione del problema isoperimetrico tra le figure piane.

- struttura di metallo: curva chiusa piana;
- cappio di filo legato alla struttura;
- pellicola di sapone (con dentro il filo);
- buco sulla pellicola all'interno della regione circondata dal filo.

La pellicola di sapone riduce il più possibile la superficie, quindi il buco che si otterrà sarà quello di area massima tra tutti quelli che hanno perimetro uguale alla lunghezza del filo.

Il buco è un cerchio!

"La Natura non fa niente invano, e più è invano quando meno è necessario, perché la Natura si compiace della semplicità e non ama la pompa delle cause superflue"
(I. Newton)

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!