



CURVE a cura di A. Malusa

Incontro con gli studenti dei LM Newton e Pascal - Roma, 9/5/18



Dal Dizionario Treccani:

Curva s. f. [femm. sostantivato dell'agg. curvo].

a. Nel linguaggio comune, ogni linea che non sia retta.

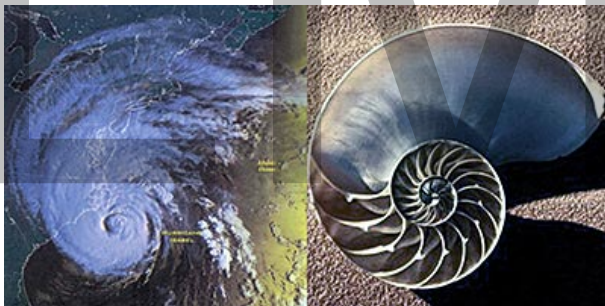
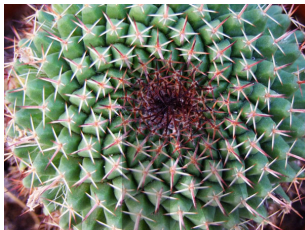
b. In matematica, sinonimo di **linea**, intendendosi quindi anche la retta come una particolare curva.

Lìnea s. f. [dal lat. linea, der. di linum; propr. «filo di lino»]. a. Ente geometrico che si estende nel senso della sola lunghezza, e che può essere matematicamente definito indipendentemente dalla sua materiale esistenza nonché da una eventuale rappresentazione grafica.

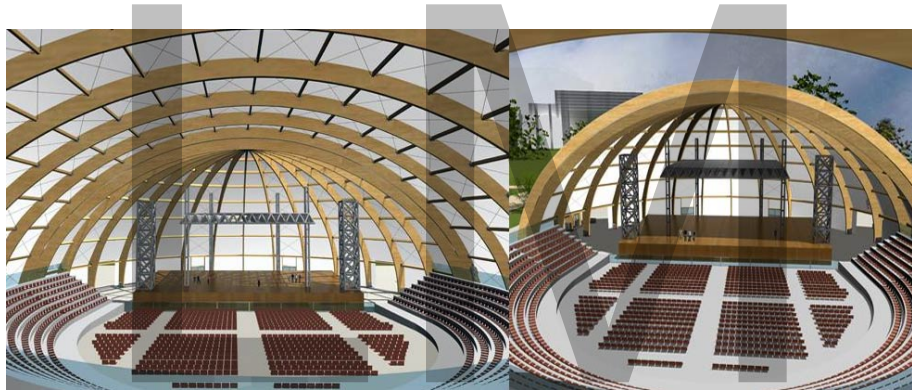
Domande:

- le curve sono un oggetto di pura speculazione matematica oppure la nostra vita di tutti i giorni è piena di curve (e degli effetti delle loro proprietà)?
- in che modo la matematica ci può aiutare a descrivere una curva e le sue proprietà?

Curve con proprietà speciali che la natura utilizza



Curve con proprietà speciali che l'uomo utilizza



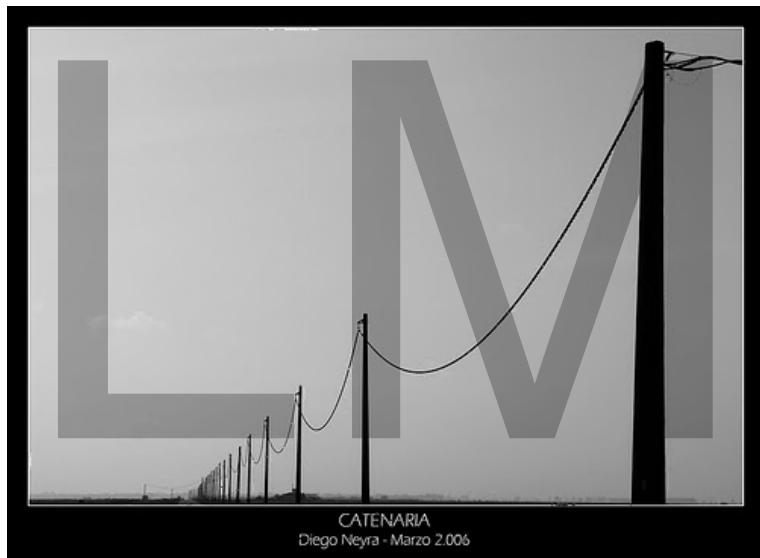
Curve con proprietà speciali che l'uomo utilizza



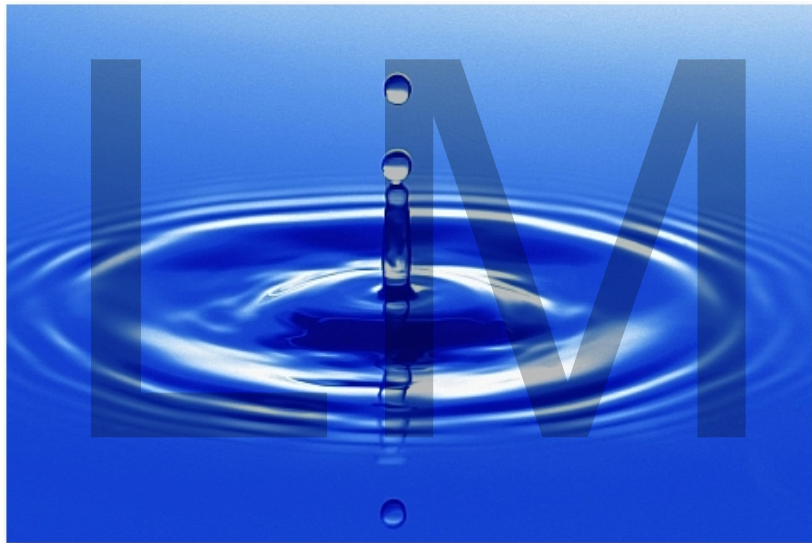
Curve prodotte dalle leggi della fisica



Curve prodotte dalle leggi della fisica



Curve prodotte dalle leggi della fisica



Le curve del piano

Iniziamo a considerare "solo" curve che giacciono su un piano.

Abbiamo detto che si tratta di oggetti geometrici **unidimensionali** e **continui**.

Cominciamo a rifletterci un po' sopra...

Esercizio 1

"Stropicciare" il filo nelle mani e poi lasciarlo cadere sul tavolino.

- *che oggetto geometrico avete ottenuto?*
- *disegnarlo sul foglio!*
- *proposte su come lo si possa descrivere matematicamente?*

Le curve del piano

Iniziamo a considerare "solo" curve che giacciono su un piano.

Abbiamo detto che si tratta di oggetti geometrici **unidimensionali** e **continui**.

Cominciamo a rifletterci un po' sopra...

Esercizio 1

"Stropicciare" il filo nelle mani e poi lasciarlo cadere sul tavolino.

- *che oggetto geometrico avete ottenuto?*
- *disegnarlo sul foglio!*
- *proposte su come lo si possa descrivere matematicamente?*

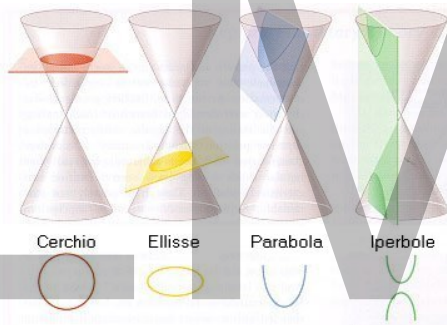
Sembra evidente che possiamo ottenere un'infinità di curve diverse. In generale può essere difficile descrivere matematicamente curve troppo stravaganti.

Oggi ci occuperemo di vedere alcuni dei metodi noti di descrizione.

Curve classiche

I matematici dell'antichità usavano strumenti puramente geometrici per descrivere le curve di loro interesse.

Oltre alle rette, hanno studiato in maniera approfondita le coniche



- **Elementi di Euclide** (Alessandria, 300 a.C.)
- **Coniche di Apollonio**

e altre **curve "speciali"** usate per la risoluzione di problemi particolari, come, ad esempio

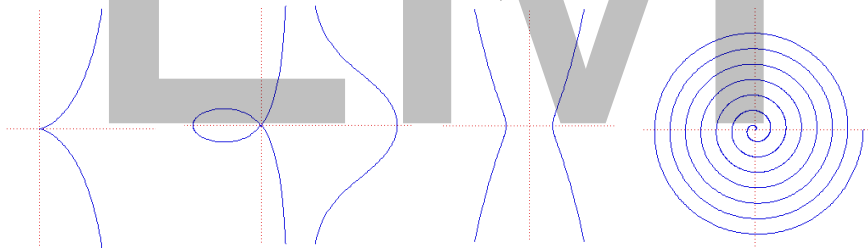
- **Cissoide di Diocle**, e **Campila di Eudosso**: collegate al problema della duplicazione del cubo (ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato);
- **Concoide di Nicomede**, collegata al problema di trisezione dell'angolo;
- **Spirale di Archimede**, collegata al problema della rettificazione della circonferenza.

Cissoid of Diocles

Conchoid

Kampyle of Eudoxus

Spiral of Archimedes



Punto di vista "Geometrico": i luoghi di punti

Le curve classiche sono definite attraverso le loro proprietà geometriche.

Circonferenza: luogo dei punti a distanza costante da un punto fissato.

Ellisse: luogo dei punti che hanno somma delle distanze da due punti fissati (detti fuochi) costante.

Iperbole: luogo dei punti che hanno modulo della differenza delle distanze da due punti fissati (detti fuochi) costante.

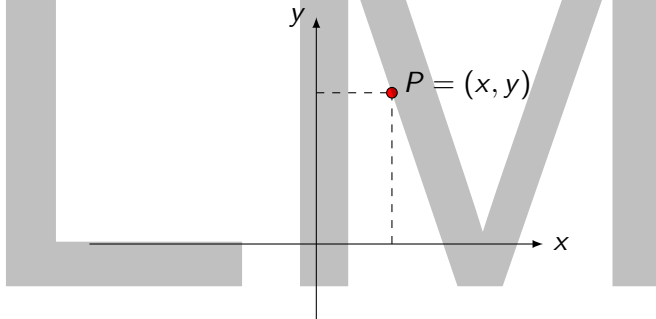
Parabola: luogo dei punti equidistanti da un punto fissato (detto fuoco) e una retta fissata (detta direttrice).

- **Pro:** queste definizioni sono molto naturali (chiedo alla curva di essere costituita da punti che verificano la proprietà che mi interessa).
- **Contro:** questo tipo di definizione non risulta molto maneggevole quando si vogliono determinare ulteriori proprietà della curva (infatti le dimostrazioni "puramente" geometriche sono spesso molto complicate).

Il punto di vista "analitico": la geometria analitica

René Descartes (Renato Cartesio), 1637, Discorso sul Metodo:

introducendo un **sistema di coordinate** i punti del piano vengono identificati da coppie di numeri

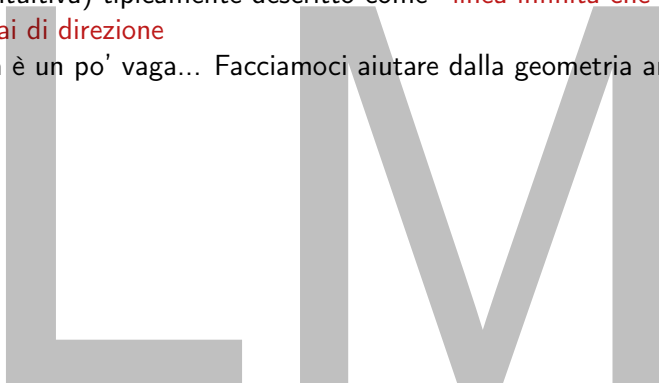


e i sottoinsiemi del piano possono essere descritti tramite **equazioni** soddisfatte dalle coordinate.

Un primo esempio: le rette

La retta è un ente geometrico primitivo (quindi che si assume noto in maniera intuitiva) tipicamente descritto come "linea infinita che non cambia mai di direzione"

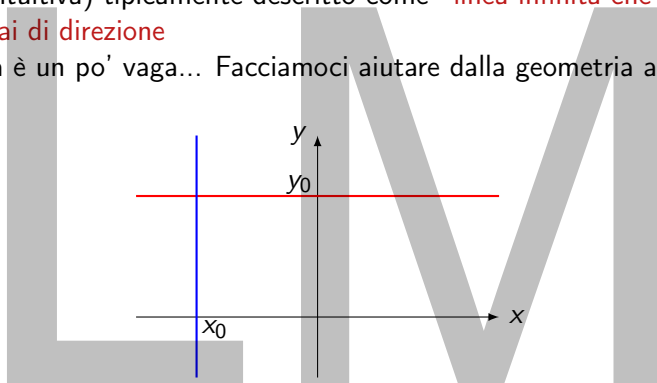
Così l'idea è un po' vaga... Facciamoci aiutare dalla geometria analitica



Un primo esempio: le rette

La retta è un ente geometrico primitivo (quindi che si assume noto in maniera intuitiva) tipicamente descritto come "linea infinita che non cambia mai di direzione"

Così l'idea è un po' vaga... Facciamoci aiutare dalla geometria analitica



Ci sono delle rette speciali, quelle parallele agli assi coordinati, che sono formate da tutti e soli i punti che hanno un valore fissato di una coordinata.

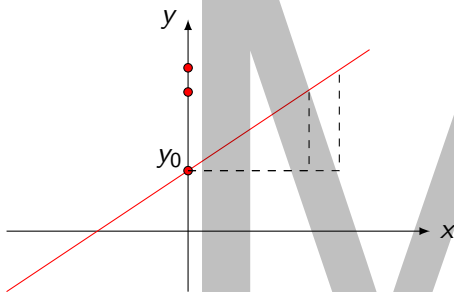
rette verticali: $x = x_0$

rette orizzontali: $y = y_0$

Se una retta non è né orizzontale né verticale, resta invece costante il rapporto incrementale tra le coordinate di due punti:

$(0, y_0)$ punto di intersezione tra la retta e l'asse delle ordinate.

(x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti distinti sulla retta



Triangoli simili: $\frac{y_1 - y_0}{x_1} = \frac{y_2 - y_0}{x_2}$

Chiamo m questo valore costante legato all'inclinazione della retta e ottengo **l'equazione cartesiana della retta**

$$\frac{y - y_0}{x} = m, \quad \text{cioè} \quad y = mx + y_0.$$

Abbiamo fatto vedere che l'equazione cartesiana delle rette è

rette verticali: $x = x_0$

rette orizzontali: $y = y_0$

rette oblique: $y = mx + y_0$

Osserviamo che possiamo descrivere tutte le rette con un'equazione cartesiana del tipo

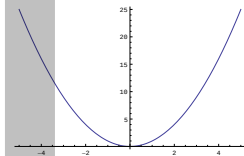
$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ribadiamo due concetti fondamentali:

- l'equazione cartesiana identifica la retta attraverso una **relazione analitica** che lega **tutti e soli i punti appartenenti all'oggetto geometrico** che stiamo descrivendo,
- i **coefficienti numerici** a, b, c contengono tutte le **informazioni geometriche** dell'oggetto: in questo caso, inclinazione e passaggio per un punto.

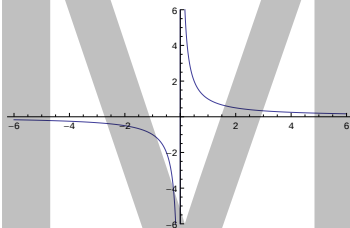
I grafici

Una famiglia speciale di curve è quella dei grafici di funzione $y = f(x)$ i cui punti hanno coordinate $(x, f(x))$, x variabile indipendente, $f(x)$ immagine tramite la funzione di x .



$$y = x^2$$

parabola



$$y = \frac{1}{x}$$

iperbole

$y = x^2$ è l'equazione cartesiana di una parabola

Parabola: luogo dei punti equidistanti da un punto fissato (detto fuoco) e una retta fissata (detta direttrice).

Vogliamo mostrare che i punti di coordinate (x, y) legate tra loro dalla relazione

$$y = x^2$$

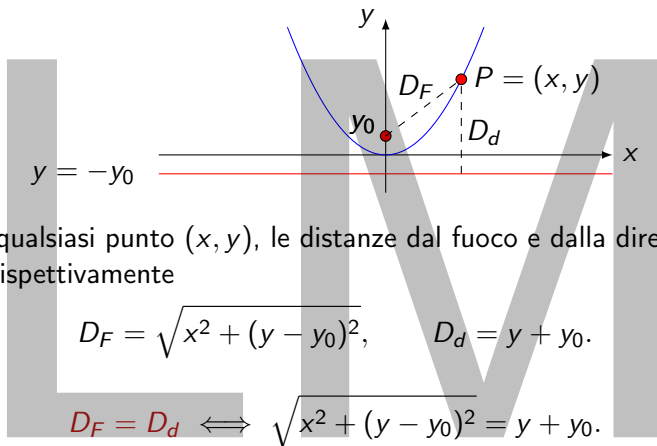
formano una parabola.

Esercizio 2

Scrivere (e disegnare) la dimostrazione sul quaderno di lavoro

Dobbiamo prima trovare dei "candidati" per il fuoco e la parabola.

- simmetria $\implies F = (0, y_0)$, d di equazione $y = y_1$;
- $(0, 0)$ appartiene alla parabola $\implies y_0 > 0$ e $y_1 = -y_0$



Preso un qualsiasi punto (x, y) , le distanze dal fuoco e dalla direttrice saranno, rispettivamente

$$D_F = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}, \quad D_d = y + y_0.$$

$$D_F = D_d \iff \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} = y + y_0.$$

Elevando al quadrato e semplificando:

$$x^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = y^2 + 2yy_0 + y_0^2 \quad x^2 = 4yy_0$$

Fissando $y_0 = 1/4$, $D_F = D_d$ se e solo se $y = x^2$.

Non tutto ciò che sembra una parabola è una parabola

Galileo in "Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze":

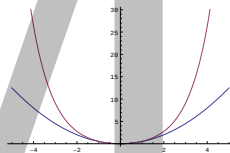
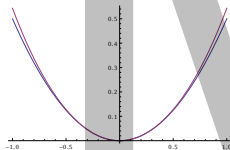
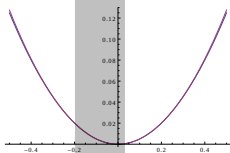
...Ferminsi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti all'orizzonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, aremo descritta un'intera parabola, la quale con un perpendicolo, che penda dal mezo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali....



In realtà la curva catenaria è un grafico, ma di una funzione molto diversa:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Confronto tra $\cosh(x) - 1$ e $\frac{x^2}{2}$: vicino all'origine sono praticamente identiche, ma allontanandosi cambiano di molto.



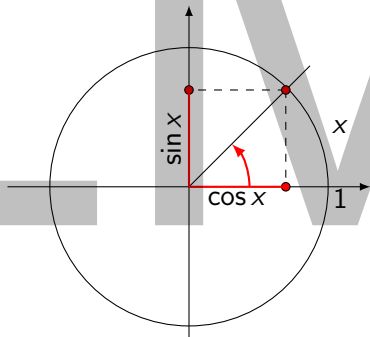
Programmi per il futuro: imparare a gestire i grafici di funzioni "complicate", come strumento per fare previsioni esatte.

Altri grafici interessanti: le funzioni trigonometriche

Prendiamo la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Misuriamo gli angoli in **radianti**: lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso all'angolo.

Dato l'angolo x , per definizione $(\cos x, \sin x)$ sono le coordinate del punto individuato dall'angolo x sulla circonferenza.



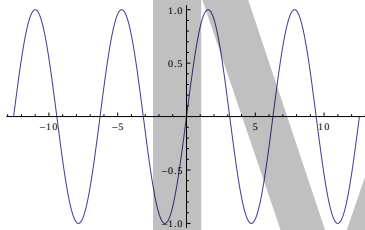
Esercizio 3

- (1) Disegnare (qualitativamente) il grafico di $f(x) = \sin x$.
- (2) Ci sono delle proprietà "speciali" che ci facilitano nella descrizione del grafico?

LM

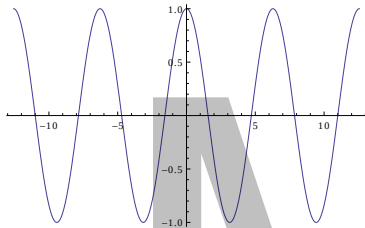
Esercizio 3

- (1) Disegnare (qualitativamente) il grafico di $f(x) = \sin x$.
- (2) Ci sono delle proprietà "speciali" che ci facilitano nella descrizione del grafico?

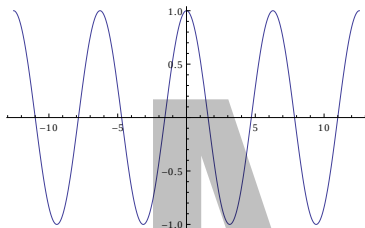


- **simmetria** rispetto all'origine degli assi $\implies$ basta disegnare il grafico per $x \geq 0$;
- **periodicità**: la funzione si ripete uguale a se stessa con periodo $2\pi \implies$ basta disegnare il grafico per x nell'intervallo $(0, \pi)$.

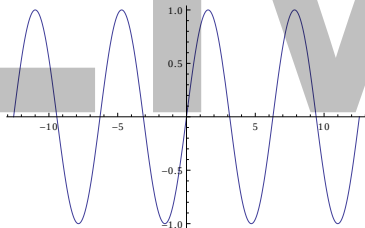
Il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ si ottiene in maniera analoga:



Il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ si ottiene in maniera analoga:

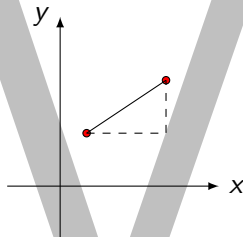
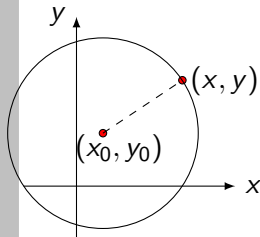


Inoltre, il grafico di $f(x) = \cos x$ è una **traslazione** orizzontale del grafico di $f(x) = \sin x$.



La circonferenza

Geometricamente, una circonferenza di centro P_0 e raggio $R > 0$ è l'insieme di tutti i punti del piano che distano R da P_0 .

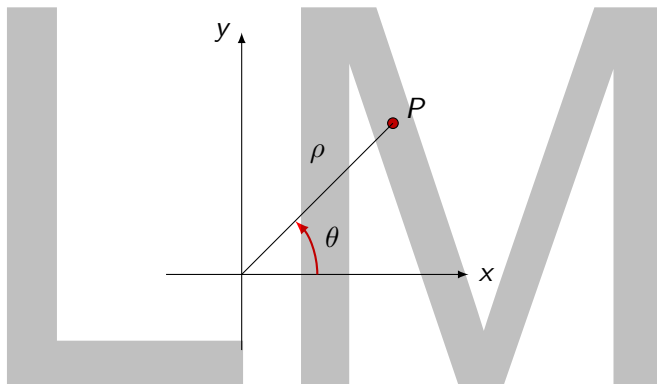


Introducendo un riferimento cartesiano, impariamo facilmente a calcolare la distanza tra 2 punti (con l'aiuto del Teorema di Pitagora) e otteniamo l'equazione cartesiana della circonferenza

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Un altro punto di vista: le coordinate polari

C'è un altro modo per individuare univocamente i punti del piano



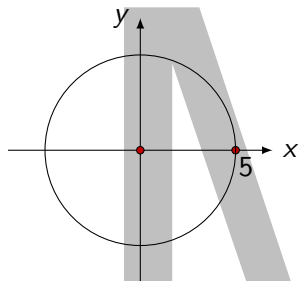
ρ = distanza di P dall'origine degli assi;

θ = angolo della congiungente P all'origine e l'asse x .

Le equazioni in coordinate polari descrivono bene le curve che "girano".

Curve in coordinate polari

$\rho = 5$: circonferenza di centro l'origine e raggio 5.

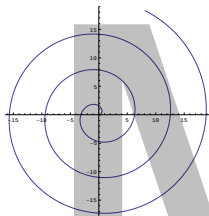


Attenzione! La curva viene sempre disegnata nel piano cartesiano, usando il legame tra coordinate cartesiane e coordinate polari

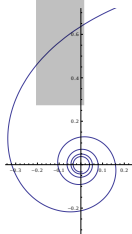
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Curve in coordinate polari

$\rho = \theta$: spirale uscente a passo costante.



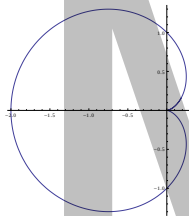
$\rho = 1/\theta$: spirale entrante



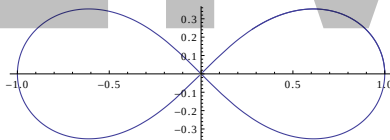
Curve in coordinate polari

Per ottenere curve chiuse servono funzioni periodiche dell'angolo.

$\rho = 1 - \cos \theta$: cardioide.



$\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$: lemniscata di Bernoulli



Il punto di vista "fisico": curve parametriche

Un altro modo di pensare una curva è in termini di **traiettoria**, descrivendola tramite una **legge oraria**.

Operativamente: penso di camminarci sopra, individuando, ad ogni istante, la posizione in cui mi trovo:

t variabile temporale

$(x(t), y(t))$ posizione al tempo t .

Esempio: **moto rettilineo uniforme**.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases} \quad t \geq 0$$

(x_0, y_0) punto di partenza (corrispondente a $t = 0$)

(v_x, v_y) vettore velocità (costante) che individua la direzione del moto.

Moto circolare uniforme:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

giro intorno a $(0,0)$ con velocità angolare costante ω .

Moto parabolico:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad t \geq 0$$

dove (x_0, y_0) e (v_x, v_y) sono rispettivamente il punto e la velocità iniziali della traiettoria.

Esercizio 4

Mostrare, trasformando le equazioni parametriche in equazioni cartesiane (ossia in un'equazione che lega le coordinate del punto)

- (1) *che il moto rettilineo uniforme avviene su una retta;*
- (2) *che il moto circolare uniforme avviene su una circonferenza centrata nell'origine.*

Soluzione dell'Esercizio 4

(1): Se le coordinate dei punti sono di questo tipo

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases} \quad t \geq 0$$

assumendo che la velocità non sia nulla (altrimenti il punto sarebbe fermo) almeno uno tra i valori v_x e v_y sarà diverso da zero. Diciamo che $v_x \neq 0$. Allora possiamo ricavare il parametro t dalla prima equazione:

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_x}$$

e sostituirlo nella seconda, ottenendo

$$y(t) = y_0 + v_y \frac{x(t) - x_0}{v_x}$$

e quindi

$$y(t) = \frac{v_y}{v_x} x(t) + y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0.$$

L'espressione ottenuta

$$y(t) = \frac{v_y}{v_x}x(t) + y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0.$$

mi dice che i punti sono allineati su una retta con coefficiente angolare m e intercetta q dati da

$$m = \frac{v_y}{v_x}, \quad q = y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0.$$

(2) Se le coordinate dei punti sono di questo tipo

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

allora vale la relazione

$$\begin{aligned} (x(t))^2 + (y(t))^2 &= (R \cos(\omega t))^2 + (R \sin(\omega t))^2 = R^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] \\ &= R^2 \end{aligned}$$

e quindi i punti giacciono su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio R .

In generale, possiamo definire curva parametrica una qualsiasi coppia di funzioni

$$C(t) = (x(t), y(t))$$

della variabile t .

Le **curve parametriche** sono **funzioni** che associano ad ogni valore della **variabile reale** $t \in \mathbb{R}$ un unico **punto del piano**.

In questo modo si possono descrivere curve molto generali

Per esempio quelle ottenute nell'Esercizio 1:

- le pensiamo come **traiettorie**: il disegno è stato prodotto facendo "camminare" la matita sul foglio al variare del tempo
- per ogni istante t la matita si trova in un punto del foglio individuato dalle coordinate $(x(t), y(t))$

Attenzione! In generale il parametro t non è necessariamente una variabile temporale, possiamo usare il parametro che più ci è utile.

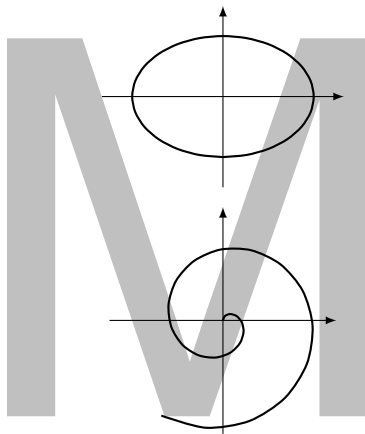
Esempi di curve descritte con equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$

ELLISSE di semiassi a , b

$$\begin{cases} x(t) = t \cos(t) \\ y(t) = t \sin(t) \end{cases}$$

SPIRALE



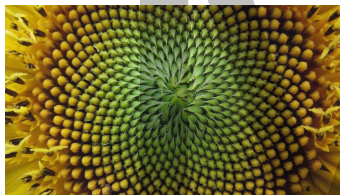
In questi casi il parametro t è l'angolo con l'asse delle ascisse.

Perchè la natura produce spirali?

Il fenomeno va sotto il nome di **crescita auto-organizzata**:

- i nuovi elementi nascono dal centro;
- vengono spinti verso l'esterno;
- ogni elemento si "ritaglia" un suo spazio (forza repulsiva)

La combinazione di questi effetti produce una disposizione a spirale.



Esperimento di laboratorio:

- goccioline di **fluido magnetico** (che si respingono tra loro);
- cadono su una calamita che produce una forza radiale che "spinge" verso l'esterno.

VIDEO

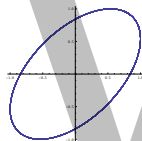
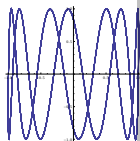
Curve di Lissajous

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_1 t) \\ y(t) = b \cos(\omega_2 t + t_0) \end{cases}$$

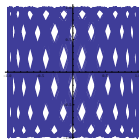
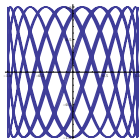
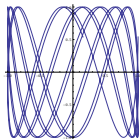
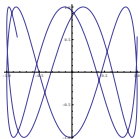
Cosa succede al variare dei parametri?

se ω_1/ω_2 è razionale, la curva si chiude e viene ripercorsa periodicamente.

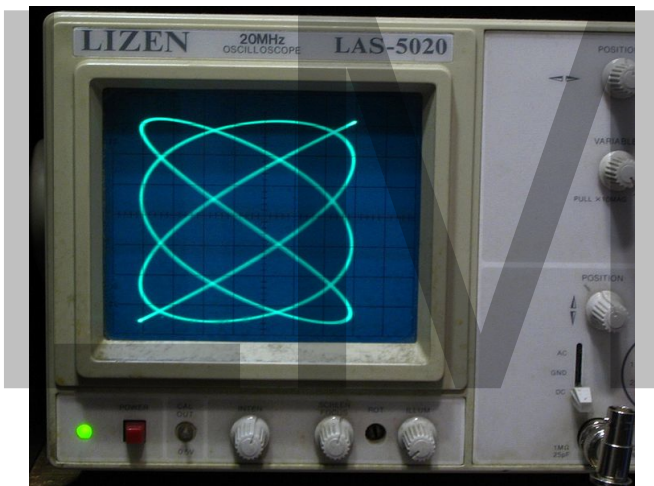
Se $\omega_1/\omega_2 = 1$, abbiamo un'ellisse.



se ω_1/ω_2 è irrazionale, la curva non si chiude e...



Osserviamo che neanche queste sono curve "esotiche". Sono quelle che vengono visualizzate in un oscilloscopio per confrontare le frequenze e lo sfasamento di due diversi segnali elettrici.



Camminando su un quadrato

Esercizio 5

Scrivere delle equazioni parametriche del quadrato di lato 1 a partire dal vertice in basso a sinistra (posizionato nell'origine degli assi) e percorso in senso antiorario.

Camminando su un quadrato

Esercizio 5

Scrivere delle equazioni parametriche del quadrato di lato 1 a partire dal vertice in basso a sinistra (posizionato nell'origine degli assi) e percorso in senso antiorario.

Soluzione: parametrizzazione del lato che congiunge $(0, 0)$ a $(1, 0)$:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Al tempo $t = 1$ sono nel punto $(1, 0)$ e devo percorrere il lato verticale:

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = (t - 1) \end{cases} \quad t \in [1, 2].$$

Al tempo $t = 2$ sono nel punto $(1, 1)$ e devo percorrere il lato orizzontale (da destra a sinistra):

$$\begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 1 \end{cases} \quad t \in [2, 3].$$

Infine, Al tempo $t = 3$ sono nel punto $(0, 1)$ e devo percorrere il lato verticale (dall'alto verso il basso):

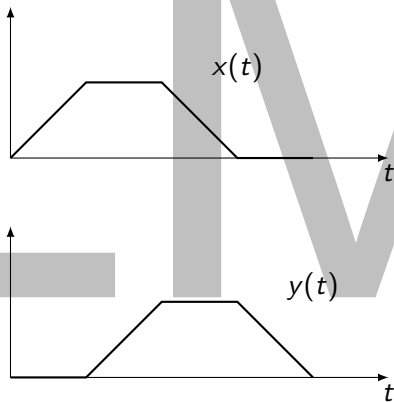
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 4 - t \end{cases} \quad t \in [3, 4].$$

In conclusione, delle equazioni parametriche del quadrato sono $C(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 4]$ con

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ 1 & t \in [1, 2] \\ 3 - t & t \in [2, 3] \\ 0 & t \in [3, 4] \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1] \\ t - 1 & t \in [1, 2] \\ 1 & t \in [2, 3] \\ 4 - t & t \in [3, 4] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ 1 & t \in [1, 2] \\ 3 - t & t \in [2, 3] \\ 0 & t \in [3, 4] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1] \\ t - 1 & t \in [1, 2] \\ 1 & t \in [2, 3] \\ 4 - t & t \in [3, 4] \end{cases}$$



Il punto di vista "frattale": le azioni sul piano

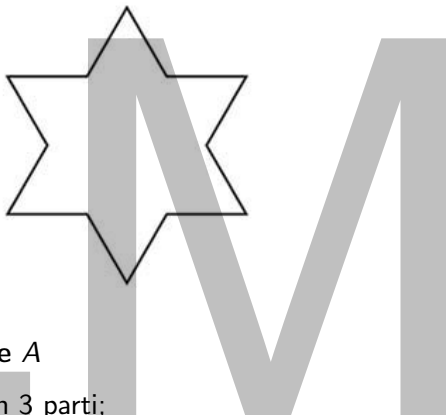
Prendiamo un triangolo equilatero



e compiamo la seguente **azione A**

- ogni lato viene diviso in 3 parti;
- la parte centrale viene sostituita con due lati di stessa lunghezza.

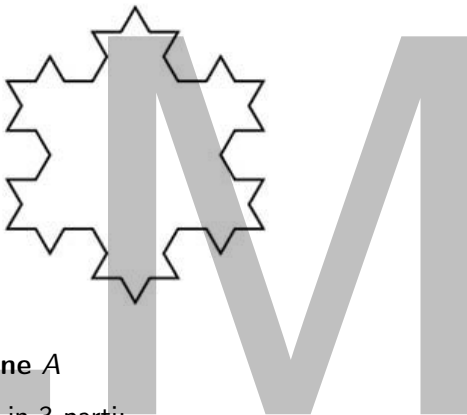
otteniamo una stella



compiamo di nuovo l'azione A

- ogni lato viene diviso in 3 parti;
- la parte centrale viene sostituita con due lati di stessa lunghezza.

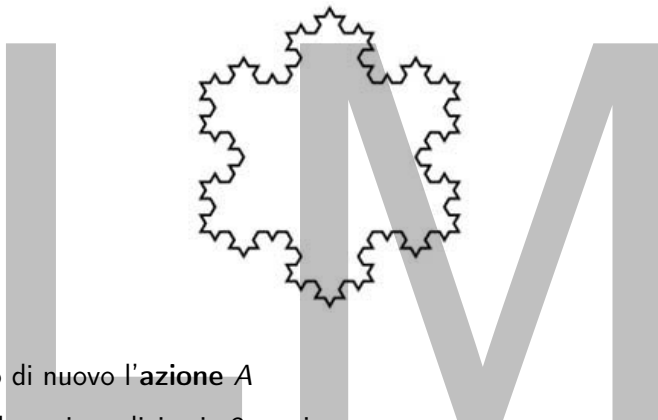
otteniamo questa curva



compiamo di nuovo l'azione A

- ogni lato viene diviso in 3 parti;
- la parte centrale viene sostituita con due lati di stessa lunghezza.

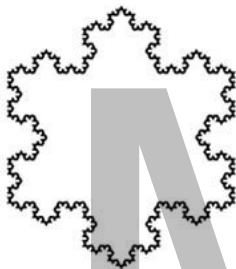
otteniamo questa curva



compiamo di nuovo l'azione A

- ogni lato viene diviso in 3 parti;
- la parte centrale viene sostituita con due lati di stessa lunghezza.

possiamo ripetere questa azione tutte le volte che vogliamo, ottenendo



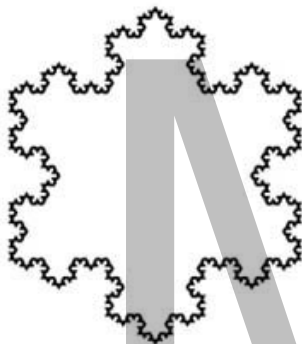
un FIOCCO DI NEVE (curva di Koch, 1904).

Questo modo di costruire curve è molto generale e produce **CURVE FRATTALI**: si fissano

- oggetto assegnato (**iniziatore**)
- azione iniziale (**generatore frattale**)

e si **itera** l'azione del generatore indefinitamente.

Proprietà del fiocco di neve



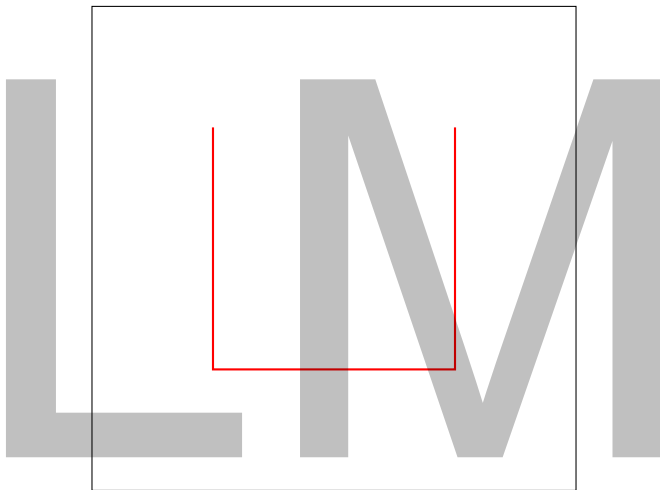
- è **autosimilare** (cioè, se ne prendo una parte e ne faccio un opportuno zoom trovo nuovamente tutto l'insieme);
- l'area della regione di piano F racchiusa dalla curva è finita, ma **il perimetro di F non è finito**;
- la curva non ammette retta tangente in nessun punto, pur essendo una curva continua.

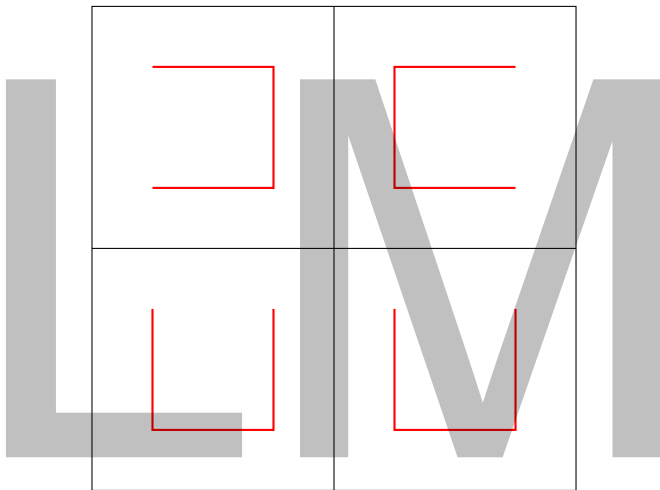
La curva di Peano che riempie tutto il piano

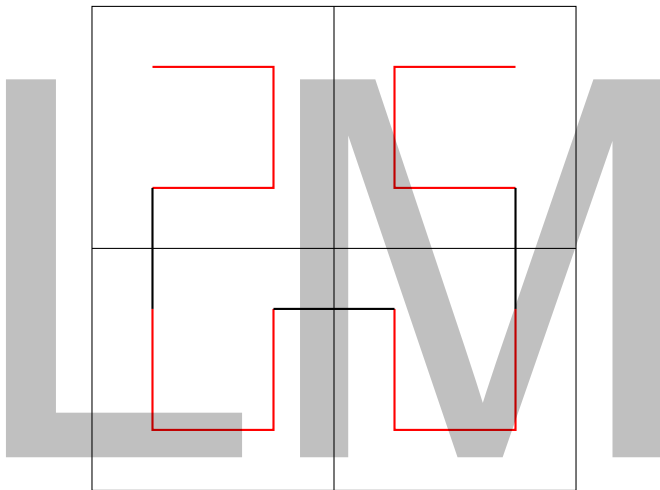
Le curve di Koch sono **frattali IFS - Iterated Function System** in cui l'azione è sempre una famiglia di trasformazioni affini del piano.

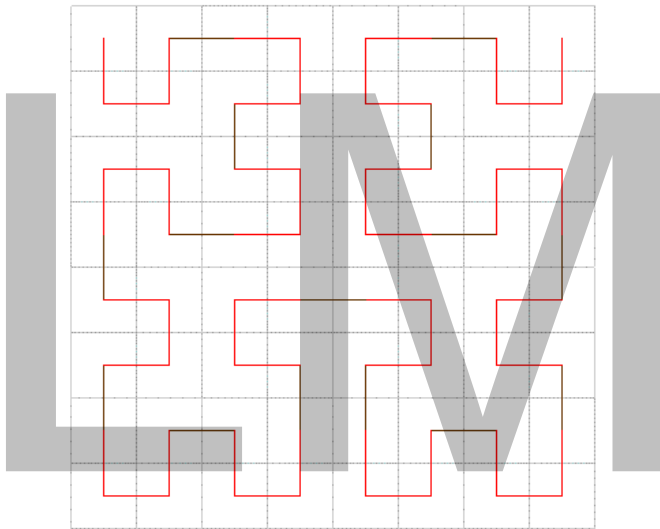
Ora costruiamo un frattale con delle operazioni più complicate:

La curva di Peano (nella versione proposta da Hilbert)









Iterando questo procedimento indefinitamente si ottiene una curva che passa per tutti i punti del quadrato.



Succede qualcosa di sorprendente dal punto di vista della dimensione: una curva (dimensione=1) ricopre tutto il quadrato (dimensione=2)

Non puoi viaggiare su una strada senza essere tu stesso la strada (Buddha)
Raro cade chi ben cammina (Leonardo Da Vinci)



GRAZIE PER L'ATTENZIONE