Pillole di geometria

G.a.u.s.S. – Gruppo Allenatori Universitari Studenti della Sapienza

a cura di

Danilo Ciaffi, Roberto Fratello, Michele Pernice

Triangoli

1. **Teorema di Talete** Un fascio di rette parallele intersecanti due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali, cioè prese tre rette parallele a, b, c taglianti due rette trasversali r e r' rispettivamente nei punti A, B, C e A', B', C', vale la proporzione $AB : A'B' = BC : B'C'$. Nello specifico, dato un triangolo ABC, presi due punti D ed E rispettivamente sui lati AC e BC in modo che DE sia parallelo ad AB, si ha che $AC : DC = BC : EC$ e $\mathcal{A}_{ABC} : \mathcal{A}_{DEC} = AC^2 : DC^2 = BC^2 : EC^2$.
   Attenzione: Il fatto che il rapporto delle aree tra figure simili sia il quadrato del rapporto di similitudine è vero in generale.

2. **I teorema di Euclide** In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso su di essa. In altre parole, se AH è l'altezza relativa all'ipotenusa, $AB^2 = BC \cdot BH$.

3. **II Teorema di Euclide** In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa, ovvero, detta AH l'altezza relativa all'ipotenusa, si ha $AH^2 = BH \cdot CH$.

4. **Formula di Erone** Dato un triangolo ABC, si denotano con a, b e c i lati opposti ai vertici rispettivamente A, B e C e p il suo semiperimetro. L'area del triangolo, allora, si calcola con la formula
   $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. Una *mediana* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il punto medio del lato opposto. Le mediane concorrono in un punto chiamato *baricentro*, il quale le divide in due partiuna (quella contenente il vertice) il doppio dell'altra.
   La lunghezza della mediana uscente dal vertice A si calcola con la formula
   $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

6. Una *bisettrice* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il il lato opposto dividendo l'angolo da cui esce in due parti uguali ed è il luogo dei punti equidistanti dai lati che non interseca. Le bisettrici concorrono in un punto chiamato *incentro*, il quale è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.
   La lunghezza della bisettrice uscente dal vertice A si calcola con la formula
   $b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.
   Inoltre vale il seguente
   Teorema (detto anche *della bisettrice*) In un triangolo due lati stanno fra loro come le parti in cui resta diviso il terzo lato dalla bisettrice dell'angolo interno ad esso opposto, ossia, detto D il punto in cui la bisettrice uscente da A incontra il lato BC, vale la proporzione $BD : DC = AB : AC$.

7. Una *altezza* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il lato opposto formando un angolo retto. Le altezze concorrono in un punto chiamato *ortocentro* e il triangolo che ha come vertici i loro piedi è detto *triangolo ortico* ed è il triangolo con perimetro minimo inscritto nel triangolo originale. La lunghezza dell'altezza uscente dal vertice in A si calcola
   $h_a = \frac{2\mathcal{A}}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

8. Un *asse* è la retta perpendicolare al lato di un triangolo passante per il suo punto medio. Gli assi concorrono in un punto chiamato *circocentro*, il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

9. **Teorema di Ceva** Si dice *ceviana* di un triangolo un segmento che congiunge un vertice con un punto qualsiasi del lato opposto e, dette AA', BB', CC' tre ceviane di un triangolo, queste concorrono se e solo se $A'C \cdot B'A \cdot C'B = BA' \cdot CB' \cdot AC'$.

Quadrilateri e altri poligoni

1. Un poligono convesso di n lati ha $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali e la somma dei suoi angoli interni è $(n-2) \cdot 180°$.
2. Un quadrilatero si dice *circoscritto* se esiste una circonferenza inscritta ad esso tangente internamente a tutti e quattro i lati. Questo accade se e solo se la somma delle lunghezze dei lati opposti è uguale. Più in generale un poligono convesso è circoscritto se e solo se la somma ordinata a segno alterno dei lati è 0. Inoltre, il raggio della circonferenza inscritta è detto *apotema* e l'area del poligono si può calcolare come $\mathcal{A} = p \cdot a$ dove a è l'apotema e p è il semiperimetro.
3. Un quadrilatero si dice *ciclico* se esiste una circonferenza circoscritta ad esso. Questo accade se e solo se gli angoli opposti sono supplementari.
   Attenzione: questa proprietà **non** è vera per ogni poligono convesso, ma è specifica dei quadrilateri.
4. **Formula di Brahmagupta** L'area di un quadrilatero ciclico $ABCD$ di lati a, b, c, d vale $\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
5. **Uguaglianza di Tolomeo** In un quadrilatero ciclico $ABCD$ la somma dei prodotti dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali, cioè $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.
6. Tracciate le diagonali AC e BD di un quadrilatero convesso $ABCD$ e detto O il loro punto di intersezione, vale che $\mathcal{A}_{AOB} \cdot \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{COB} \cdot \mathcal{A}_{AOD}$, cioè i prodotti delle aree dei triangoli opposti al vertice in O sono uguali.

Circonferenze e angoli

1. Dati A, B, P punti su una circonferenza Γ di centro O, $\widehat{AOB}$ e $\widehat{APB}$ si chiamano rispettivamente *angolo al centro* e *angolo alla circonferenza* e si dice che *insistono sull'arco* AB. Inoltre l'ampiezza dell'angolo al centro è sempre doppia rispetto a quella dell'angolo alla circonferenza, il che significa, in particolare, che angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono uguali. Infine due angoli alla circonferenza che insistono su due archi la cui somma è tutta la circonferenza sono supplementari.
   Osservazione: Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.
2. Data una circonferenza Γ, si definisce *corda* un segmento che congiunge due punti che giacciono su Γ, *diametro* una qualunque corda passante per il centro e *asse* di una corda la retta ad essa perpendicolare nel punto medio. Inoltre l'asse di ogni corda passa sempre per il centro della circonferenza e due corde hanno la stessa lunghezza se e solo se hanno la stessa distanza dal centro. Può infine essere utile il seguente
   Teorema delle due corde Sia P un punto interno alla circonferenza Γ e AB e CD corde di Γ passanti per P. Allora $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.
3. Data una circonferenza Γ, una retta si dice *secante* se interseca la circonferenza in due punti distinti, *tangente* se l'intersezione è unica. Per ogni punto di Γ la tangente è unica ed è perpendicolare al raggio passante per quel punto.
   Preso un punto P esterno alla circonferenza, sono veri i seguenti fatti:
   (a) Esistono esattamente due rette passanti per P e tangenti alla circonferenza. Detti A e B i punti di tangenza, PA e PB hanno la stessa lunghezza e si chiamano *segmenti di tangenza*.
   (b) **Teorema delle due secanti** Siano r una retta passante per P e secante alla circonferenza in A e B e s una retta passante per P e secante alla circonferenza in C e D. Allora $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
   (c) **Teorema della tangente e della secante** (caso particolare del teorema delle due secanti) Siano r una retta passante per P e secante alla circonferenza in A e B e s una retta passante per P e tangente alla circonferenza in C. Allora $PA \cdot PB = PC^2$.