# Pillole di Algebra

G.a.u.s.S. – Gruppo Allenatori Universitari Studenti della Sapienza
a cura di
Danilo Ciaffi

## Aritmetica

Un po' di conteggi classici:

- numeri triangolari: $T_n = \sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$
- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- progressioni aritmetiche: se $a_i = a_{i-1} + d$, $\sum_{i=0}^{n} (a_1 + id) = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
- progressioni geometriche: se $a_i = xa_{i-1}$ (e $a_0 = 1$), $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

## Polinomi

Per tutta questa sezione supporremo implicitamente che un polinomio generico $p(x)$ sia della forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

1. Un polinomio si dice:
   - *monico* se il coefficiente del termine di grado massimo è 1;
   - *completo* se tutti i suoi coefficienti sono diversi da 0;
   - *irriducibile* se non è possibile scriverlo come prodotto di due polinomi di grado minore;
   - *primitivo* se $MCD(a_0, a_1, ..., a_n) = 1$;
   - *omogeneo di grado d* se $p(ax) = a^d p(x)$ per ogni numero reale $a$.
2. **Identità notevoli**
   - $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ per ogni $n$
   - $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$ per $n$ dispari
   - $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ *[Binomio di Newton]*
   - $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2)(a^2 + 2b^2 - 2a^2b^2)$ *[Identità di Sophie Germain]*
3. **Principio di identità dei polinomi** Se due polinomi di grado minore o uguale ad $n$ assumono lo stesso valore in $n+1$ punti distinti, allora coincidono (cioè hanno gli stessi coefficienti e lo stesso grado).

4. **Teorema di Ruffini** Se $p(x)$ è un polinomio monico di grado $n$ e $\alpha$ un numero reale qualsiasi, vale che
$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha).$$
Da questo teorema derivano molte conseguenze interessanti, ad esempio il fatto che $(x-\alpha)$ divide $p(x)$ se e solo se $p(\alpha) = 0$, cioè se $\alpha$ è una radice di $p(x)$. Perciò, se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sono le radici di un polinomio monico $p(x)$ di grado $n$, vale l'identità
$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

5. Se il polinomio $p(x)$ è a coefficienti interi e $a$ e $b$ sono due numeri interi, allora $a - b \mid p(a) - p(b)$.

6. **Teorema degli zeri razionali** Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e $\frac{p}{q}$ è una sua radice razionale, allora $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

7. **Criterio di Eisenstein** Sia $p(x)$ un polinomio primitivo a coefficienti interi. Se esiste un numero primo $p$ tale che:
   - $p$ non divide $a_n$;
   - $p$ divide $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$;
   - $p^2$ non divide $a_0$.

   Allora $p(x)$ è irriducibile tra i polinomi a coefficienti interi, cioè non solo non ha radici intere, ma non è possibile scomporlo come prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado minore.

8. **Rapporti tra radici e coefficienti** Dato un polinomio $p(x)$, $a_i$ i suoi coefficienti e $\alpha_i$ le sue radici,sussistono le seguenti relazioni:
$$\begin{aligned} a_{n-1} &= (-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ a_{n-2} &= \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j \\ a_{n-3} &= (-1) \sum_{1 \le i < j < k \le n} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \end{aligned}$$

## Disuguaglianze

1. **Disuguaglianza di Bernoulli** Se $x < -1$ è un numero reale, allora, per qualsiasi $n$ naturale,
$$(1 + x)^n \le 1 + nx$$

2. **Disuguaglianza di riarrangiamento** Se $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sono $n$-uple ordinate di numeri, allora
$$\sum a_i b_{n-i+1} \le \sum a_i b_j \le \sum a_i b_i$$
cioè il massimo della somma si ottiene facendo i prodotti dei più grandi con i più grandi e il minimo facendo i prodotti dei più grandi con i più piccoli.

3. **AM-GM** Dati $n$ numeri $(a_1, a_2, ..., a_n)$ la media aritmetica è maggiore o uguale a quella geometrica, e l'uguaglianza vale se e solo se gli $a_i$ sono tutti uguali. In formule
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$