Preparazione alle finali individuali di Cesenatico
Geometria

G.a.u.s.S. – Gruppo Allenatori Universitari Studenti della Sapienza
a cura di
Danilo Ciaffi

Preliminari

Questa 'dispensa' si prepone di dare per scontato il meno possibile, tuttavia ci sono delle cose che, per il bene della sintesi, darò per assodate e sono quelle che si dovrebbero sapere alla fine del secondo anno di liceo scientifico, in particolare non sempre mi soffermerò sul fatto che angoli opposti al vertice sono uguali, definizioni di triangolo isoscele e cose di questo tipo. Limiterò più che posso l'utilizzo della trigonometria, ma a parte questa, tutto quello che *non* dirò è facilmente reperibile su un qualsiasi testo del biennio. Colgo l'occasione anche per scusarmi dell'assenza di figure, prometto che un giorno ci saranno.

Istruzioni per l'uso

Al fine di evitare un'overdose di teoria a pochi giorni dalla gara, suggerisco di leggere gli argomenti uno per volta separatamente, cercando di apprendere non tanto imparando a memoria formule e definizioni, ma associando le varie proprietà al tipo di figura. Tenete conto, infatti, che il fine ultimo di queste nozioni è proprio l'utilizzo, è dunque preferibile sapere usare bene una parte delle cose piuttosto che sapere a memoria mille ricette ma saper cucinare solo la pasta in bianco.

Triangoli

Generalità

Innanzitutto, facciamo luce nell'antro oscuro delle notazioni: dato un triangolo ABC, si denotano con

- a, b e c i lati opposti ai vertici rispettivamente A, B e C;
- p il semiperimetro, ossia $\frac{a+b+c}{2}$;
- α, β, γ gli angoli interni rispettivamente in A, B e C;
- $\mathcal{A}_{ABC}$ l'area (spesso ometterò il pedice).

Con questa nuova notazione, diamo subito il via alle danze con la magnifica
Formula di Erone Dato un triangolo ABC, la sua area si calcola con la formula

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Inoltre è fondamentale la cosiddetta
Disuguaglianza triangolare Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Cioè

$$a - b \leq c \leq a + b$$

Ma quali sono le cose più importanti da sapere di un triangolo?

Rette notevoli

Partiamo con un po' di definizioni e proprietà di base:

Una *mediana* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il punto medio del lato opposto. Le mediane concorrono in un punto chiamato *baricentro*, il quale le divide in due parti una (quella contenente il vertice) il doppio dell'altra.
La lunghezza della mediana uscente dal vertice A si calcola con la formula

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

Una *bisettrice* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il il lato opposto dividendo l'angolo da cui esce in due parti uguali ed è il luogo dei punti equidistanti dai lati che non interseca. Le bisettrici concorrono in un punto chiamato *incentro*, il quale è il centro della circonferenza inscritta al triangolo. Il raggio di questa circonferenza è $\frac{\mathcal{A}}{p}$ ed è l'*apotema* del triangolo.
La lunghezza della bisettrice uscente dal vertice A si calcola con la formula

$$b_a = \tfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Inoltre vale il seguente
Teorema (detto anche *della bisettrice*) In un triangolo due lati stanno fra loro come le parti in cui resta diviso il terzo lato dalla bisettrice dell'angolo interno ad esso opposto, ossia, detto D il punto in cui la bisettrice uscente da A incontra il lato BC, vale la proporzione $BD : DC = AB : AC$.

Una *altezza* è il segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il lato opposto formando un angolo retto. Le altezze concorrono in un punto chiamato *ortocentro* e il triangolo che ha come vertici i loro piedi è detto *triangolo ortico* ed è il triangolo con perimetro minimo inscritto nel triangolo originale. La lunghezza dell'altezza uscente dal vertice in A si calcola

$$h_a = \tfrac{2\mathcal{A}}{a} = \tfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Un *asse* è la retta perpendicolare al lato di un triangolo passante per il suo punto medio. Gli assi concorrono in un punto chiamato *circocentro*, il centro della circonferenza circoscritta al triangolo, la quale ha raggio $\frac{abc}{4\mathcal{A}}$.

Teorema di Ceva Si dice *ceviana* di un triangolo un segmento che congiunge un vertice con un punto qualsiasi del lato opposto e, dette AA', BB', CC' tre ceviane di un triangolo, queste concorrono se e solo se $A'C \cdot B'A \cdot C'B = BA' \cdot CB' \cdot AC'$.

C'è da osservare che un triangolo ha moltissime rette e punti notevoli (quelli riportati qui sono solo i più utili ai fini delle gare di Cesenatico), e spesso trovarne uno (o più) è fondamentale nella risoluzione di un problema, ma è importantissimo non trascurare le rette: non sono solo un mezzo per arrivare ai punti, spesso sono proprio loro a guidarci verso le deduzioni vincenti!

Rapporti e similitudini

Molto spesso si riesce a ricavare una grande quantità di informazioni dal fatto che due oggetti rispettano certe proporzioni o che due triangoli 'si assomigliano'. Come fare a scoprirlo? Esistono diversi criteri e teoremi a riguardo. Eccone alcuni:

Teorema di Talete Un fascio di rette parallele intersecanti due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali, cioè prese tre rette parallele a, b, c taglianti due rette trasversali r e r' rispettivamente nei punti A, B, C e A', B', C', vale la proporzione

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Nello specifico, dato un triangolo ABC, presi due punti D ed E rispettivamente sui lati AC e BC in modo che DE sia parallelo ad AB, si ha che

$$AC : DC = BC : EC$$
e
$$\mathcal{A}_{ABC} : \mathcal{A}_{DEC} = AC^2 : DC^2 = BC^2 : EC^2.$$

Attenzione: Il fatto che il rapporto delle aree tra figure simili sia il quadrato del rapporto di similitudine è vero in generale.

I teorema di Euclide In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso su di essa. In altre parole, se AH è l'altezza relativa all'ipotenusa,

$$AB^2 = BC \cdot BH.$$

II Teorema di Euclide In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti su di essa, ovvero, detta AH l'altezza relativa all'ipotenusa, si ha

$$AH^2 = BH \cdot CH.$$

Inoltre esistono dei criteri per capire se due triangoli sono simili (ricordo che due triangoli si dicono *simili* se hanno i tre angoli ordinatamente congruenti e i tre lati proporzionali tra loro):

I Criterio di similitudine Due triangoli sono simili se hanno i tre angoli rispettivamente congruenti.

II Criterio di similitudine Due triangoli sono simili se hanno una coppia di lati proporzionali e l'angolo tra essi compreso congruente.

III Criterio di similitudine Due triangoli sono simili se hanno tutti e tre i lati ordinatamente proporzionali.

Osservazioni: Se due figure hanno un certo rapporto di similitudine, ogni loro parte ne risentirà. in particolare se due oggetti sono simili e uno è doppio rispetto all'altro, anche i perimetri rispetteranno questo rapporto. Le aree invece staranno tra loro come il quadrato del rapporto, i volumi come il cubo ecc.

Angoli

La somma degli angoli interni di un triangolo è si 180°, in particolare se un triangolo è rettangolo, la somma dei due angoli non retti è 90°. Definito inoltre l'*angolo esterno* in un vertice come l'angolo formato tra uno dei lati che vi concorrono e il prolungamento dell'altro, vale il seguente

Teorema dell'angolo esterno In ogni triangolo un angolo esterno è maggiore di ogni angolo interno non adiacente, in particolare l'angolo esterno in A è uguale alla somma degli angoli interni β e γ.

Questo è tutto quello che c'è da sapere sui triangoli? Ovviamente no, ma con tutte queste cose, un po' di pratica e un (bel) po' di intuito si può affrontare a testa alta gran parte di quello che ci si porrà davanti.

Quadrilateri

Non serve di certo che io vi definisca cos'è un quadrilatero, ma bisogna stare attenti alle classificazioni interne, perciò se non ricordate cosa rende un quadrilatero un trapezio questo è il momento giusto per rimediare. Per tutta questa sezione considereremo sempre che i quadrilateri in questione siano *convessi*, ossia che non abbiano nessun angolo interno maggiore di 180°. Due definizioni che sono forse meno comuni, e che quindi ci tengo a riportare, sono quelle di:

- *deltoide*: un deltoide è un qualsiasi quadrilatero le cui diagonali sono perpendicolari;
- *aquilone*: un aquilone è un qualsiasi quadrilatero con due coppie di lati *consecutivi* congruenti (occhio a non confondersi con i parallelogrammi, lì sono i lati *opposti* ad essere congruenti). Notare che si tratta di un caso particolare di deltoide, nello specifico è un deltoide in cui una diagonale interseca l'altra nel suo punto medio.

Va inoltre ricordato che tracciate le diagonali AC e BD di un qualsiasi quadrilatero convesso $ABCD$ e detto O il loro punto di intersezione, vale che

$$\mathcal{A}_{AOB} \cdot \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{COB} \cdot \mathcal{A}_{AOD},$$

cioè i prodotti delle aree dei triangoli opposti al vertice in O sono uguali.

Quadrilateri ciclici e circoscritti

Un aspetto molto interessante dei quadrilateri è il modo in cui si comportano rispetto all'inscrizione e alla circoscrizione di circonferenze.

Un quadrilatero si dice *circoscritto* se esiste una circonferenza inscritta ad esso tangente internamente a tutti e quattro i lati. Questo accade se e solo se le somme delle lunghezze dei lati opposti sono uguali. Inoltre, il raggio della circonferenza inscritta è detto *apotema* e l'area del poligono si può calcolare come $\mathcal{A} = p \cdot a$ dove a è l'apotema e p è il semiperimetro.

Un quadrilatero si dice *ciclico* se esiste una circonferenza circoscritta ad esso. Questo accade se e solo se gli angoli opposti sono supplementari.

Formula di Brahmagupta L'area di un quadrilatero ciclico $ABCD$ di lati a, b, c, d vale

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(Dis)uguaglianza di Tolomeo In un quadrilatero $ABCD$ la somma dei prodotti dei lati opposti è maggiore o uguale al prodotto delle diagonali, cioè

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Se il quadrilatero è ciclico, invece, vale il segno di uguaglianza.

Presto vi accorgerete che molte di queste proprietà derivano dal fatto che un quadrilatero può sempre essere visto come diviso in due triangoli incollati lungo un lato, ponetevi allora spesso una domanda: "...e se affetto qui?"

Poligoni

Tenendo a mente che, a meno di indicazione esplicita, sottintenderemo sempre che i nostri poligoni siano convessi, l'obiettivo di questa sezione è principalmente la generalizzazione di quanto visto finora per triangoli e quadrilateri.

Una *diagonale* di un poligono è un qualsiasi segmento che ha per estremi due vertici non consecutivi. Un poligono convesso di n lati ha $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali e la somma dei suoi angoli interni è $(n-2) \cdot 180°$ (*domanda*: in quanti triangoli posso dividere un poligono tracciando le sue diagonali in modo che non si intersechino se non in un vertice? C'è qualche relazione con questa formula? Perché?).

Un poligono convesso è circoscritto se e solo se la somma ordinata a segno alterno dei lati è 0. Inoltre il raggio della circonferenza inscritta è $\frac{\mathcal{A}}{p}$ (p è sempre il semiperimetro) ed è l'*apotema* del poligono, da cui si ricava che, conoscendo l'apotema, l'area del poligono vale

$$\mathcal{A} = a \cdot p$$

Un poligono è inscritto se e solo se *tutti* i quadrilateri formati prendendo quattro dei suoi vertici sono ciclici.

Un poligono che ha tutti i lati e tutti gli angoli interni uguali si dice *regolare* ed è sempre sia inscritto che circoscritto, oltre ad avere tutte le proprietà che il suo numero di lati comprende. È il modello full-optional, insomma.

Circonferenze e angoli

Aumentando ancora il numero di lati si giunge alle circonferenze. Partiamo con un po' di anagrafica blanda per poi andare in crescendo.

Sia Γ una circonferenza di raggio r e si consideri un arco che sottende un angolo α. La sua lunghezza si calcola $l = 2\pi r \frac{\alpha}{360}$ e l'area del settore circolare corrispondente vale $\mathcal{A} = \pi r^2 \frac{\alpha}{360}$.

Dati A, B, P punti su una circonferenza Γ di centro O, $\widehat{AOB}$ e $\widehat{APB}$ si chiamano rispettivamente *angolo al centro* e *angolo alla circonferenza* e si dice che *insistono sull'arco* AB. Inoltre l'ampiezza dell'angolo al centro è sempre doppia rispetto a quella dell'angolo alla circonferenza, il che significa, in particolare, che angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono uguali. Infine due angoli alla circonferenza che insistono su due archi la cui somma è tutta la circonferenza sono supplementari.
Osservazione: Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo e, viceversa, un triangolo rettangolo è sempre inscrittibile in una semicirconferenza che ha per diametro l'ipotenusa del triangolo.

Data una circonferenza Γ, si definisce *corda* un segmento che congiunge due punti che giacciono su Γ, *diametro* una qualunque corda passante per il centro e *asse* di una corda la retta ad essa perpendicolare nel punto medio. Inoltre l'asse di ogni corda passa sempre per il centro della circonferenza e due corde hanno la stessa lunghezza se e solo se hanno la stessa distanza dal centro. Possono infine essere utili i seguenti

Teorema della corda Sia Γ una circonferenza di raggio r e α un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB. Allora $AB = 2r \sin \alpha$;

Teorema delle due corde Sia P un punto interno alla circonferenza Γ e AB e CD corde di Γ passanti per P. Allora $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

Data una circonferenza Γ, una retta si dice *secante* se interseca la circonferenza in due punti distinti, *tangente* se l'intersezione è unica. Per ogni punto di Γ la tangente è unica ed è perpendicolare al raggio passante per quel punto.
Preso un punto P esterno alla circonferenza, sono veri i seguenti fatti:

- Esistono esattamente due rette passanti per P e tangenti alla circonferenza. Detti A e B i punti di tangenza, PA e PB hanno la stessa lunghezza e si chiamano *segmenti di tangenza*.
- **Teorema delle due secanti** Siano r una retta passante per P e secante alla circonferenza in A e B e s una retta passante per P e secante alla circonferenza in C e D. Allora $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- **Teorema della tangente e della secante** (caso particolare del teorema delle due secanti) Siano r una retta passante per P e secante alla circonferenza in A e B e s una retta passante per P e tangente alla circonferenza in C. Allora $PA \cdot PB = PC^2$.

Vorrei mettere l'accento sugli angoli alla circonferenza: le combo "cose sui triangoli"+"angoli alla circonferenza" e "quadrilateri ciclici"+"angoli alla circonferenza" sono tra le più potenti a disposizione, dunque consiglio di prestare particolare attenzione nell'imparare a maneggiarli per bene!

Strategie d'attacco

Direi che a questo punto la nostra cassetta degli attrezzi ha la pancia abbastanza piena, possiamo iniziare a discutere di quando usare cosa. Quali strategie usare per l'attacco ad un problema?

1. *Angle chasing*: Iniziate a scoprire tutto quello che riuscite sugli angoli che ci sono nella figura. Consigliato ai puri di cuore per problemi ricchi di triangoli/quadrilateri inscritti in circonferenze.
   Pro: sfruttando gli angoli alla circonferenza e altro angolame vario spesso si riescono a trovare rapporti notevoli.
   Contro: esiste il rischio di allontanarsi dall'obiettivo trovando angoli inutili e perdendo quindi tempo prezioso.

2. *Veniamo al punto*: Cercate punti/rette notevoli (incentro, baricentro ecc.) delle figure che avete sotto mano, e vedete in che modo si evolve la situazione sul contesto. Consigliato a chi non si fa imbambolare da figure fatte meglio del dovuto, per problemi con triangoli senza circonferenze.
   Pro: spesso trovando punti noti si riesce ad irrigidire la figura fino a che la soluzione non diviene lampante.
   Contro: trovare i punti/rette notevoli potrebbe non essere facile/possibile.

3. *Ti spiezo in due*: Fate a pezzi la figura e cercate di risolvere una serie di sottoproblemi su sottofigure. Consigliato ai veri duri e agli assetati di sangue, per problemi dove i poligoni sono divisi in triangoli divisi in triangoli (questa ripetizione non è un misprint).
   Pro: a volte si possono risolvere problemi più facili, a patto di risolverne un po' di più.
   Contro: è molto difficile capire in *quali* pezzi fare la figura, si possono trovare proprietà locali inutili e sprecare tempo senza grandi risultati.

4. *La retta via*: Tracciate rette a pseudo-caso (io non l'ho mai detto) per vedere se riuscite a trovare similitudini o nuove proprietà interessanti. Consigliato ai più fantasiosi, per problemi di figure definite in modo insolito.
   Pro: spesso una volta trovata la retta giusta il problema è praticamente risolto. Bisogna avere l'idea.
   Contro: esistono infinite rette, quella giusta, se c'è, è una. Bisogna avere l'idea.

In bocca al lupo!