PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE 2022 – SOLUZIONI

Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo, Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tor Vergata
Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi Roma Tre

con il sostegno di:
Fondazione Roma Sapienza, **Piano Lauree Scientifiche** e **Unione Matematica Italiana**

Quesito 1. La risposta corretta è (C).
Siano α, β, γ i tre angoli, con $\alpha \le \beta \le \gamma = 4\alpha$. La somma degli angoli deve fare 180°, quindi $5\alpha+\beta = 180°$, da cui $6\alpha \le 180° \le 9\alpha$. Otteniamo perciò $20° \le \alpha \le 30°$. Ricordiamo però che il triangolo deve essere acutangolo, quindi $\gamma = 4\alpha < 90°$, cioè $\alpha < 22{,}5°$.

Quesito 2. La risposta corretta è la (E).
Dimostriamo l'uguaglianza delle aree. Ponendo $x = \overline{DB}$ e $y = \overline{BF}$, avremo $S_2 = xy$. D'altra parte S_1 è pari a due volte l'area del triangolo CDB, che ha base x ed altezza y, da cui l' uguaglianza delle aree.
Il fatto che i due rettangoli abbiano perimetri diversi si può a questo punto dedurre dal fatto che esiste un unico rettangolo (a meno di rotazioni) con area e perimetro assegnati, mentre è chiaro che i due rettangoli non siano "lo stesso". Si può anche dedurre con calcoli espliciti: chiamando rispettivamente i lati $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$ come a e b, le seguenti identità sarebbero vere:

$$\begin{cases} a+b = x+y & \text{semi-perimetro uguale,} \\ a^2+b^2 = x^2 & \text{teorema di Pitagora su ABD,} \\ ab = xy & \text{area uguale.} \end{cases}$$

Dall'ultima equazione otteniamo $2ab = 2xy$ che sommata alla seconda dà $(a+b)^2 = x^2+2xy$. Il termine di destra è strettamente minore di $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Abbiamo perciò mostrato che $(a+b)^2 < (x+y)^2$, che equivale a dire $a+b < x+y$, ovvero $P_2 > P_1$.

Quesito 3. La risposta corretta è (D).
Partiamo da qualche osservazione preliminare. La prima affermazione è vera: se chi parla è un cavaliere, ci possiamo fidare di lui; se chi parla è un furfante, l'affermazione è vera perché c'è almeno un furfante. L'ultima affermazione è fatta da un furfante (se si trattasse di un cavaliere, direbbe di essere un furfante), ma non sappiamo se è vera o falsa. Un'osservazione più importante è la seguente: se un'affermazione è falsa, anche le successive sono false. Consideriamo quindi l'affermazione "ci sono almeno n furfanti". Se è vera, ci sono almeno n furfanti. Se è falsa, chi ha parlato è un furfante, come tutti i successivi; in tal caso ci sono almeno $11-n+1$ furfanti. Quindi, per ogni $n \le 11$, ci sono almeno n furfanti oppure $11-n+1$ furfanti. Per $n = 6$, si trova che ci sono almeno 6 furfanti, perché in entrambi i casi otteniamo 6. Non possiamo affermare che ci sono almeno 7 furfanti: gli 11 nativi potrebbero essere nell'ordine 5 cavalieri e 6 furfanti (di cui solo il primo dice la verità). La risposta esatta è quindi 6.

Quesito 4. La risposta corretta è (A).
Infatti fissati due giocatori, questi potrebbero giocare con le coppie formate dai restanti tre, che sono 3. I modi possibili per formare due coppie con 5 possibili giocatori sono 10. Quindi avremmo 30 possibile coppie. In questo modo abbiamo però contato due volte la sfida tra due stesse coppie. Quindi il numero minimo di partite con tutti i compagni possibili e contro tutti gli avversari possibili è 15.

Quesito 5. La risposta corretta è (D).
Gino ha lasciato la Strada in un punto x alle ore 11:10. Da quel momento percorre un segmento fuori strada per 50' fino al lago, e poi uno in direzione ortogonale alla strada per 30', che raggiunge in un punto y. Il triangolo di vertici x, y, lago è rettangolo. Detta v la velocità di Gino fuori strada, espressa in $km/minuto$, si ha che il cateto xy è lungo $(\sqrt{(50v)^2-(30v)^2})\ km = 40v\ km$. Siccome sulla strada Gino va a $2v\ km/minuto$, il tempo che impiega per percorrere tale cateto è $(40v)/(2v) = 20'$, cioè è tornato al punto x alle 12:50. Quindi il tempo per tornare da x a casa è 2 h e $40'$. Questo coincide col tempo impiegato per raggiungere x da casa la mattina. Siccome Gino si trovava in x alle 11:10, si conclude che era partito da casa alle 8:30.

Quesito 6. La risposta corretta è (A).
Lo schema si ripete ogni 7 caselle quindi basta calcolare i salti su un piede solo nelle prime 7 caselle e iterare il procedimento.

Nel primo schema, Claudia compie 25 salti con un piede solo:

- 0 salti quando il sasso è lanciato nella casella 1
- 1 salto quando il sasso è lanciato nella casella 2
- 3 salti quando il sasso è lanciato nella casella 3 (2 all'andata e 1 al ritorno)
- 5 salti quando il sasso è lanciato nella casella 4 (2 all'andata e 1 al ritorno)
- 4 salti quando il sasso è lanciato nella casella 5 (2 all'andata e 2 al ritorno)
- 5 salti quando il sasso è lanciato nella casella 6 (3 all'andata e 2 al ritorno)
- 7 salti quando il sasso è lanciato nella casella 7 (4 all'andata e 3 al ritorno)

A qusto punto il procedimento è analogo per lo schema dalla casella 8 alla 14: 25 salti sullo schema a cui si aggiunge il tragitto da fare dalla casella 1 alla 7 (3 salti all'andata e 3 al ritorno)

$$25 + 6 \cdot 7$$

Iterando il procedimento per i 288 schemi successivi si ottiene:

$$25 + (25 + 6 \cdot 7) + (25 + 2 \cdot 6 \cdot 7) + \cdots + (25 + 287 \cdot 6 \cdot 7) = \sum_{k=0}^{287}(25 + 42n)$$

L'ultimo schema per arrivare a 2022 è incompleto, manca l'ultima casella, quindi Claudia farà nell'ultimo schema

$$25 + 288 \cdot 7 \cdot 7 - (7 + 288 \cdot 6)$$

salti.

Riassumendo, Claudia farà

$$\sum_{k=0}^{288}(25+42n)-(7+288\cdot 6) = 25\cdot 289-(7+288\cdot 6)+42\sum_{k=0}^{288} n = 25\cdot 289-(7+288\cdot 6)+42\Big(\frac{288\cdot 289}{2}\Big) = 1753362$$

salti.

Quesito 7. La risposta corretta è (E).
Fattorizzando il polinomio si ottiene: $|n^2 - 22n + 117| = |(n-13)(n-9)|$, che è un numero primo se e solo se uno dei due fattori è ± 1 e l'altro, in valore assoluto, è un numero primo. Si verifica in effetti che quando $n - 13 = \pm 1$ allora $|n-9|$ è primo, e quando $n - 9 = \pm 1$ allora $|n-13|$ è primo. Quindi le soluzioni sono 4, ovvero $n = 8, 10, 12, 14$.

Quesito 8. La risposta corretta è (B).
Scrivendo $(2 - x - 2x^2)^{1011}$ come

$$\underbrace{(2 - x - 2x^2)\cdots(2 - x - 2x^2)}_{1011 \text{ volte}}$$

notiamo che, nello sviluppo del prodotto, ogni volta che si prende il termine 2 si ottiene un coefficiente opposto a quello che si ottiene prendendo al suo posto il termine $-2x^2$. Dunque la somma dei coefficienti ottenuti prendendo almeno una volta 2 o $-2x^2$ fa 0. Rimane perciò solo il coefficiente del termine $(-x)^{1011}$, che vale -1.

Quesito 9. La risposta corretta è (E).
Si tratta di confrontare le varie possibilità. La strategia migliore consiste nello scartare solo la pallina 6. In tal caso si perde se si pesca una delle palline 1, 2, 3, mentre si vince se si pesca 4, 7 oppure 8. Scartando una delle altre palline, oppure due palline, la probabilità di vincere è minore di $1/2$.

Quesito 10. La risposta corretta è 14.
Affinché una pallina cada in uno dato spazio n, occorre che prima cada sul bastoncino n, e da lì cada verso sinistra (50%); quindi la probabilità che ciò avvenga è $1/2\, P_n$, dove P_n è la probabilità di cadere sul bastoncino n. D'altra parte, per cadere nello spazio $n+1$ deve cadere nel bastoncino n, da lì cadere nel bastoncino $n+1$ (50%) e quindi nello spazio $n+1$ (50%); dunque la probabilità che ciò avvenga è $1/4\, P_n$. Segue che la probabilità di cadere in un dato spazio è $1/2$ quella di cadere nello spazio precedente. Quindi, visto che il primo spazio è dispari, la probabilità di cadere su un pari P_p è $1/2$ probabilità di cadere su un dispari P_d. Essendo $P_p + P_d = 1$ si deduce che $P_p = 1/3$, $P_d = 2/3$. Siccome la somma degli spazi su cui cadono le due palline è pari se si ha dispari+dispari oppure pari+pari, la sua probabilità è $2/3 * 2/3 + 1/3 * 1/3 = 5/9$.

Quesito 11. La risposta corretta è 4.
Un ricoprimento è dato da 4 dischi unitari centrati nei centri dei quattro lati.

Mostriamo che non si può fare di meglio. Consideriamo un ricoprimento generico. Sia n il numero di dischi che hanno per centro il centro di uno dei lati del quadrato (che chiameremo di primo tipo), e sia m il numero dei restanti dischi (di secondo tipo). Osserviamo che gli m dischi del secondo tipo ricoprono al massimo m vertici del quadrato. Rimangono $k \geq 4 - m$ vertici, ognuno dei quali deve necessariamente intersecare due dischi del primo tipo (per essere ricoperti loro e un loro intorno); se $k = 1$ si ha $n \geq 2$, se $k = 2$ $n \geq 3$, se $k = 3$ $n \geq 3$ e se $k = 4$ $n = 4$. In ogni caso si ha $n \geq k$. Deduciamo che $4 - m \leq k \leq n$, ossia il numeri di dischi $m + n$ è almeno uguale a quattro.

Quesito 12. La risposta corretta è 324.
Chiamiamo $l := (a+b+c+d)$ e $L := (e+f+g+h)$. Si ha $l+L = 36$. Tra tutti i rettangoli di lati l ed L, con $l+L = 36$, quello di area massima è il quadrato, che ha per area $18*18 = 324 = (1+8+2+7)*(3+6+4+5)$. Per dimostrare la massimalità del quadrato osserviamo che, dato l, $L = 36 - l$, e l'area del corrispondente rettangolo in funzione di l è $f(l) = l(36 - l) = 36l - l^2$ che é una parabola rivolta verso il basso, il cui unico punto di massimo è $l = 18$ (ammissibile in quanto compreso tra 0 e 36).

Questo testo e i testi dei quesiti sono disponibili alla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`