Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo

# Olimpiadi di Matematica al Castelnuovo 2023

## Gara individuale

## *Soluzioni*

## Esercizi a risposta multipla

**Esercizio 1** Sara non ricorda l'orario di ingresso a scuola della prossima settimana, ma ricorda che le lezioni si terranno tutti i giorni dal lunedì al venerdì, che inizieranno alle 8, alle 9, alle 10 o alle 11 e che non inizieranno mai alla stessa ora per due giorni consecutivi. Quante sono le possibili combinazioni di orari di ingresso?

*Risposte:* A) 28; B) 108; C) 154; **D) 324**; E) 1024.

**Soluzione: D)**

Lunedì ci sono 4 possibili scelte, mentre i restanti 4 giorni ci sono 3 possibili scelte. Risposta esatta: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$.

**Esercizio 2** Ho una scala con 6 scalini, che per semplicità chiameremo (partendo da quello più in basso, salendo...): inferno, 1, 2, 3, purgatorio, paradiso. Ogni minuto che passa tiro una moneta; se mi trovo nello scalino 1, se viene croce vado all'inferno e ci rimango per sempre, se viene testa salgo allo scalino 2; se mi trovo negli scalini 2 o 3, se viene testa salgo di uno scalino, se viene croce scendo di uno scalino; se mi trovo in purgatorio, se viene testa salgo in paradiso e ci rimango per sempre; se viene croce rimango fermo.
Qual è la probabilità che, partendo dallo scalino 1, prima o poi (avendo a disposizione un'infinità di lanci) io vada in paradiso?

*Risposte:* A) 0; B) $\frac{1}{5}$; **C)** $\frac{1}{4}$; D) $\frac{1}{3}$; E) $\frac{1}{2}$.

**Soluzione: C)**

Prima di tutto osserviamo che lo scalino "purgatorio" non gioca alcun ruolo (perché una volta lì si va in paradiso con probabilità 1) e possiamo quindi ignorarlo nel ragionamento risolutivo. Se mi trovo nello scalino 2, per simmetria, la probabilità di finire in paradiso o all'inferno è $\frac{1}{2}$. Inizialmente mi trovo nello scalino 1, e precipito all'inferno o vado allo scalino 2 con probabilità $\frac{1}{2}$. Se sono andato allo scalino 2 (probabilità di tale evento $= \frac{1}{2}$) mi trovo nella configurazione centrale simmetrica, dalla quale finisco, prima poi, all'inferno o in paradiso con pari probabilità, uguali a $\frac{1}{2}$. Quindi, partendo dallo scalino 1, la probabilità di finire in paradiso è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

**Esercizio 3** Si considerino i seguenti 4 numeri: $n_1 = 1 + 10^3 + 10^6 + 10^9 + \ldots + 10^{3 \cdot 2023}$, $n_2 = (8^9)^{60}$, $n_3 = 15263748 + 3^{50} + 100^{100} + 501020 + 6^{40}$, $n_4 = n_1 n_2 n_3 + 1$. Quanti tra i suddetti numeri sono divisibili per 3?

*Risposte:* A) 0; **B) 1**; C) 2; D) 3; E) 4.

**Soluzione: B)**
Ricordiamo che un numero è divisibile per tre se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per tre. Le cifre di $n_1$ sono 2024 "1", la loro somma è quindi 2024, e la somma delle cifre di 2024 è 8, che non è divisibile per 3. Il numero $n_2$ è una potenza di due, quindi non è divisibile per tre. Passando a $n_3$, il primo addendo 15263748 è divisibile per tre (sommare le cifre); $3^{50}$ è una potenza di 3, ed è quindi divisibile per 3, così come $6^{40}$. Infine, sommando le cifre di $100^{100} + 501020$ si ottieme $1 + 5 + 1 + 2 = 9$ che è divisibile per 3. Quindi $n_3$ è divisibile per 3. Infine $n_4$ è un numero divisibile per tre più uno, e quindi non è divisibile per tre.

**Esercizio 4** Siano $m \geq 1$ e $3 \leq n \leq 12$ due numeri naturali. Mario tira due dadi, e fa un punto se la somma è almeno $n$; Gino tira quattro dadi e fa un punto se la somma è almeno $2n$. Vince chi fa più punti dopo $m$ tiri (in caso di parità saranno entrambi vincitori). Chi ha più possibilità di vincere?

*Risposte:* A) Mario (indipendentemente da $n$ e $m$); B) Gino (indipendentemente da $n$ e $m$); C) Hanno le stesse possibilità (indipendentemente da $n$ e $m$); D) Dipende da $m$ (indipendentemente da $n$); **E) Dipende da $n$ (indipendentemente da $m$).**

**Soluzione: E)**
Gli $m$ tiri sono tutti eventi indipendenti, quindi le possibilità di vittoria non dipendono da $m$.

Nel caso $n = 12$, Mario fa punto soltanto se tira due 6 (probabilità $\frac{1}{6^2}$), mentre Gino fa punto soltanto se tira quattro 6 (probabilità $\frac{1}{6^4}$), quindi Mario ha più possibilità di vincere.

Consideriamo il caso $n = 3$. Mario non fa punto soltanto se tira due 1 (probabilità $\frac{1}{6^2}$). Gino non fa punto se tira quattro 1 (probabilità $\frac{1}{6^4}$) oppure un 2 e tre 1 (probabilità $\frac{4}{6^4}$); quindi la probabilità che Gino non faccia punto è $\frac{5}{6^4}$. Ora, si ha che $\frac{5}{6^4} < \frac{1}{6^2}$: infatti moltiplicando ambo i membri per $6^4$ si ottiene $5 < 6^2$. Si deduce che nel caso $n = 3$, Gino ha più possibilità di vincere.

**Esercizio 5** Si consideri una tassellazione di un disco di diametro $n \geq 100$ metri con quadrati di lato 1 metro, di modo che i quadrati non si sovrappongano e ricoprano tutto il disco. Detto $m$ il numero di quadrati che intersecano la circonferenza, quali delle seguenti condizioni è verificata?

*Risposte:* A) $m < \frac{7}{4}\,n$; **B)** $\frac{7}{4}\,n < m < 32\,n$; C) $32\,n < m < \frac{n^2}{\sqrt{2}}$; D) $\frac{n^2}{\sqrt{2}} < m < 2n^2$; E) $m > 2n^2$.

**Soluzione: B)**
Stima inferiore: consideriamo il piano cartesiano con origine nel centro del cerchio ed assi paralleli ai lati dei quadrati della tassellazione. Iniziamo considerando il punto del cerchio con la maggiore $x$ $(= n/2)$; questo deve essere ricoperto da un quadrato. Girando in senso antiorario, consideriamo il punto con $x = n/2 - 1$ e $y \geq 0$, che deve essere ricoperto necessariamente da un quadrato diverso dal primo. Continuiamo così e dopo $n$ passi siamo arrivati al punto con minore $x$ $(= -n/2)$. Questo mostra che per ricoprire il semicerchio superiore servono almeno $n$ quadrati. Lo stesso vale per il semicerchio inferiore. Siccome i quadrati usati per ricoprire i punti estremi dei due semicerchi possono coincidere, si ha che $m \geq 2n - 2$, che è maggiore di $\frac{7}{4}n$ per $n > 8$.

Stima superiore: se un quadrato interseca la circonferenza, tutti i suoi punti sono a distanza al più $\sqrt{2}$ dalla circonferenza stessa, cioè il quadrato è contenuto nella corona circolare con lo stesso centro della circonferenza e raggio interno $n - \sqrt{2}$, raggio esterno $n + \sqrt{2}$. Dunque la somma delle aree dei suddetti quadrati è al più pari all'area della corona, che è $\pi[(n+\sqrt{2})^2-(n-\sqrt{2})^2]=4n\sqrt{2}\pi$, quindi il numero dei quadrati è al più $4n\sqrt{2}\pi$, che è minore di $32\,n$.

# Esercizi a risposta numerica

**Esercizio 6** Nel piano cartesiano si considerino per $n=0,\ldots,5$ i triangoli $\mathcal{T}_n$ di vertici $A_n=(2^n,0)$, $B_n=(2^{n+1},0)$, $C_n=(\frac{1}{2}(2^n+2^{n+1}),2^{n+1})$ e per $n=0,\ldots,4$ i triangoli $\mathcal{S}_n$ di vertici $C_n$, $C_{n+1}$, $B_n$. Si calcoli la somma delle aree di tutti questi triangoli.

**Soluzione: 2047**

La sequenza dei triangoli indicati individuano sul piano cartesiano un quadrilatero $Q$ i cui vertici sono $A_0=(1,0)$, $B_5=(64,0)$, $C_5=(48,64)$, $C_0=(\frac{3}{2},2)$. La retta su cui giace il segmento $C_0C_5$ interseca l'asse $x$ nell'origine $O$. L'area del quadrilatero può essere calcolata per scomposizione facendo la differenza tra l'area $\mathcal{A}_1$ del triangolo $OB_5C_5$ e l'area $\mathcal{A}_2$ del triangolo $OA_0C_0$. Entrambi i triangoli hanno un lato che giace sull'asse delle ascisse la cui altezza relativa è individuata dalle ordinate rispettivamente di $C_5$ e $C_0$, dunque

$$\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2=\frac{64\cdot 48}{2}-\frac{2\cdot 1}{2}=2047.$$

**Esercizio 7** Un orologio a pendolo, costituito da un disco in cui sono segnate le ore da 1 a 12, è stato appena regolato con l'ora esatta 07:16, e ogni giorno perde 2 minuti e venti secondi. Dopo quanti giorni l'orologio segna nuovamente (per la prima volta dopo essere stato regolato) l'ora esatta 07:16?

**Soluzione: 2160**

Innanzitutto osserviamo che l'ora in cui è stato regolato l'orologio non gioca alcun ruolo. 3 giorni corrispondono a $-7$ minuti; 24 giorni corrispondono a $-56$ minuti, ossia a $-1$ ora $+$ 4 minuti; $24\cdot 15$ giorni corrispondono a $-14$ ore, ossia a $+2$ ore; $24\cdot 15\cdot 6=2160$ giorni corrispondono a $+12$ ore, ossia all'ora esatta.

**Esercizio 8** Tra tutte le espressioni dove compaiono una e una sola volta i numeri (ad una sola cifra) 1, 2, 3, 4, 5, 6, e come operazioni possono comparire solo l'addizione e la moltiplicazione, e si possono usare le parentesi che si vogliono, qual è il risultato più grande che si può ottenere?

**Soluzione: 1080**

Se escludiamo l'1, il risultato più grande ottenibile è $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$, perché presi due numeri $m,n\geq 2$ si ha che $m\cdot n\geq m+n$ (quindi sostituire con una moltiplicazione ogni addizione in cui nessuno dei due addendi è uguale a 1 non diminuisce mai il risultato). Ora possiamo "inserire" l'1 nell'espressione, mediante addizione o moltiplicazione, usando le parentesi ed eventualmente scambiando di posizione i numeri. Chiaramente conviene farlo tramite la somma. Massimizzando sulle varie possibilità si vede che il risultato maggiore è dato da $(2+1)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=1080$.

# Esercizi a risposta numerica con svolgimento

**Esercizio 9** Siano $a$, $b$, $c \geq 0$ tre numeri reali non negativi tali che $a+b+c=2$. Calcolare il massimo di $abc - a(b+c) + 8b^7c^7$.

**Soluzione: 8**

Chiamiamo $y = abc - a(b+c) + 8b^7c^7$. Notiamo che la quantità $abc - a(b+c) = a(bc - b - c)$ non può essere positiva: infatti supponendo $b \leq c$ (i ruoli di $b$ e $c$ sono simmetrici) si ha che $bc - b - c \leq bc - 2b = b(c-2) \leq 0$. Quindi per massimizzare $y$ conviene sempre prendere $a = 0$ in modo da avere $abc - a(b+c) = 0$ ed il massimo possibile di $8b^7c^7$. Massimizzare quest'ultimo equivale a massimizzare $bc$, cioè, essendo $b = 2 - c$, massimizzare $2c - c^2$; questa funzione di $c$ descrive una parabola rivolta verso il basso con vertice in $c = 1$, che è il valore in cui assume il massimo. In definitiva, il massimo di $y$ si ha per $a = 0$, $b = c = 1$.

**Esercizio 10** Per via di una perdita d'acqua, delle gocce cadono con frequenza costante da un punto di un soffitto sotto al quale si trova un giradischi con un disco che gira al ritmo di 33 giri al minuto. Sapendo che, trascorso un minuto dal momento in cui la prima goccia cade sul disco, ci sono esattamente 34 tracce d'acqua sul disco, in corrispondenza dei vertici di un poligono regolare, determinare il massimo intervallo di tempo possibile tra la caduta di una goccia e la successiva.

*Esprimere il tempo in minuti (eventualmente tramite una frazione).*

**Soluzione: $\frac{1}{34}$**

Chiamiamo $t$ il tempo che trascorre tra la caduta di 2 gocce consecutive, e $T$ ($= 1/33$ di minuto) il tempo che impiega il disco a compiere un giro. Sappiamo che l'angolo $\alpha$ formato sul disco dalle tracce delle prime 2 gocce è un multiplo di $\frac{2\pi}{34}$. Ciò implica che $t = \frac{k}{34}T$ per un certo numero intero $k$. Sappiamo inoltre che $t \leq T$, perché altrimenti non si formerebbero 34 tracce (compresa la prima) in un minuto. Segue che $k \leq 34$. Il caso $k = 34$ non è ammissibile perché si avrebbe $t = T$ e quindi una sola traccia sul disco. Perciò $k \leq 33$, e si vede che $k = 33$ è ammissibile, cioè genera 34 tracce "equidistanti" in un minuto. Il massimo tempo $t$ ammissibile è dunque $\frac{33}{34} \cdot T = \frac{33}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{34}$ di minuto.