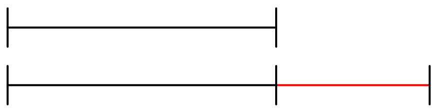
Laboratorio Liceo Matematico
Classe III M
09/12/2019

Galilei e i paradossi

*"**SALVIATI**: Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel che poco fa dissi, cioè che l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile….*
…. Tra le prime instanze che si sogliono produrre contro a quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suol essere quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perché, se ciò fusse, ne seguirebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perché quando due indivisibili, come, per esempio, due punti, congionti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo poi segabili in due parti uguali, rendon segabile quell'indivisibile che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obbiezzioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma né dieci, né cento, né mille non compongono una grandezza divisibile e quanta, ma sì bene infiniti.
***SIMPLICIO**: Qui nasce il dubbio, che mi pare insolubile: ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggiore dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà l'infinità de i punti della minore.*



Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter essere capito in verun modo.
***SALVIATI**: Queste son quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio, che ha mossa la difficoltà.*

Il brano è tratto da G. Galilei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*" un'opera del 1638 scritta, come molte opere di Galilei, sotto forma di dialogo. I personaggi che vi compaiono sono l'aristotelico Simplicio e lo "scienziato nuovo" Filippo Salviati, che rappresenta Galileo stesso.

Rielabora il brano, e sintetizzalo usando un linguaggio a te più congeniale.

Esponi una tua idea sul ragionamento esposto da SIMPLICIO e da SALVIATI.

IL PARADOSSO DEI QUADRATI

***SALVIATI**:Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.*
***SIMPLICIO**: So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in sé medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in sé medesimi moltiplicati.*
***SALVIATI**: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in sé stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?*
***SIMPLICIO**: Non si può dir altrimenti.*
***SALVIATI**: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, lor esser tanti quante son le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice più d'un quadrato solo.*
***SIMPLICIO**: Così sia.*
***SALVIATI**: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le loro radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.*
E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggiore proporzione diminuendo, quanto a maggiori numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire la decima parte essere quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un milione solo la millesima, e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.
***SAGREDO**: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?*
***SALVIATI**: Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate."*

(GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*)

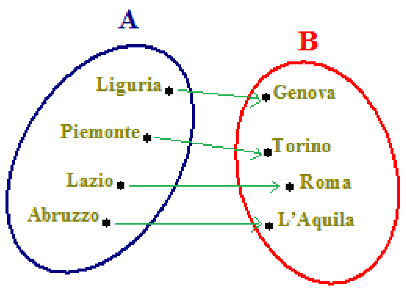
Rielabora il brano, sintetizzalo e riscrivilo in un linguaggio più moderno

Schematizza la corrispondenza tra numeri esposta nel brano utilizzando il metodo che preferisci: schema, tabella, simboli…

DEFINIZIONE 1 Si dice cardinalità di un insieme finito A (e si indica con il simbolo |A|) il numero di elementi di A.
Esempio: Se A={x,y,z}, |A|=3

DEFINIZIONE 2 Si dice che due insiemi A e B sono in corrispondenza biunivoca se è possibile mettere in relazione ogni elemento di A con un solo elemento di B e viceversa. Cioè è possibile definire una funzione biunivoca da A a B

Esempio: la prima funzione rappresentata qui sotto è biunivoca, le altre due (figura 1 e 2) sono funzioni ma non sono biunivoche.



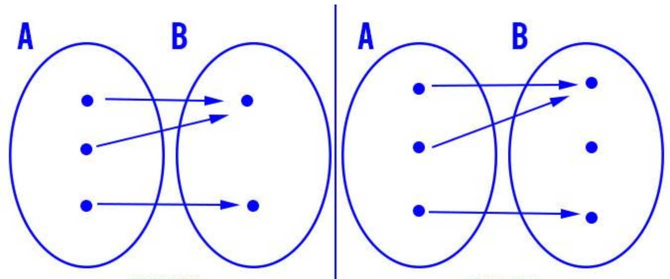


FIGURA 1 FIGURA 2

DEFINIZIONE 3 Due insiemi A e B sono equipotenti (oppure si dice che hanno la stessa cardinalità cioè |A|=|B|) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

ESEMPI: 1) due insiemi finiti sono equipotenti se…
2) l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri quadrati …
Quindi l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri quadrati sono …
Anche se l'insieme dei quadrati è un ……… dell'insieme dei ………
Ciò sembra in contraddizione con il principio aristotelico per cui "il tutto è maggiore della parte" e quindi il tutto non può essere *uguale* a una sua parte. Tutto sta nel fatto che lo stesso aggettivo, *uguale*, viene usato con due significati diversi:

- Primo significato (Aristotele): la parte non è mai uguale-identica al tutto che la contiene, appunto, come parte, e che ha perciò qualche elemento che nella parte non sta.
- Secondo significato (Cantor): la parte può però essere uguale per numero al tutto. Tanti sono i numeri quanti i quadrati loro, che pure sono "meno" dei numeri perché ci sono numeri non quadrati.

La difficoltà che il genio di Galilei scoprì, ma non superò, deriva perciò dall'impiego del termine *uguale* in due sensi diversi. Usiamo allora due aggettivi diversi per i due significati diversi: e siano *identico* e *equipotente.* Allora tutto va perfettamente a posto, la contraddizione scompare; il fatto incredibile si trasforma in fatto normale: Nel caso di un insieme infinito, può accadere che l'intero insieme e una sua parte, certamente non identici, siano però equipotenti, abbiano la stessa potenza (sinonimo di cardinalità).
L'incredibilità a dire il vero non deriva solo dall'equivoco linguistico, ma anche dal fatto che il feonomeno enunciato non si verifica mai nel caso di un insieme finito e di una sua parte. Ho 4 caramelle per 5 bambini: se pretendo di riuscire a dare una caramella a ogni bambino sono matto, la cosa è assurda. Quando consideriamo contemporaneamente insiemi finiti e infiniti, l'equipotenza di un insieme e di una sua parte propria non è più assurda: è invece una caratteristica specifica degli insiemi infiniti.
DEFINIZIONE 4 (Dedekind 1831-1916) Un sistema S si dice infinito se è equipotente a una sua parte propria; nel caso opposto si dice finito
Con questa sua famosa definizione DEDEKIND capovolse un modo di pensare millenario. Si era sempre definito l'infinito a partire dal finito, appunto come non-finito; ora, invece, è il finito che diventa il non-infinito.
Cosa significa paradosso?
Da dove nasce il paradosso dei quadrati di Galilei?

PARADOSSO DELL'ALBERGO DI HILBERT
Formulato nel 1920 dal matematico David Hilbert

Immaginiamo un comune albergo, con un numero finito di camere, tutte occupate da clienti. Quando, una mattina presto, arriva un forestiero a chiedere una camera, il proprietario è costretto a mandarlo via con la consueta espressione: "Spiacente. Nessuna libera". In questo caso siamo di fronte ad una difficoltà, non a un paradosso.
Immaginiamo ora l'hotel più grande di tutti, l'hotel infinito, in cui si trovi un numero infinito di stanze, ciascuna delle quali sia occupata. Supponiamo si presenti un viaggiatore a chiedere una camera. "Spiacente siamo al completo", dice allegramente il proprietario, "ma posso sicuramente trovarle una sistemazione".
Che cosa pensa di fare il proprietario per alloggiare il nuovo arrivato e sciogliere la contraddizione presente nella sua affermazione?
NB Il proprietario deve dare un'indicazione precisa che valga per tutti i clienti, può fare uso di termini e simboli che si usano in matematica.

Immaginiamo ora che, più tardi nello stesso giorno, si verifichi un nuovo fatto impossibile. Questa volta, sul mezzogiorno, arriva una gran massa di congressisti (presumibilmente da un universo parallelo) e il proprietario si trova di fronte a un numero infinito di nuovi ospiti che chiedono di sistemarsi. Essendo un furbo uomo di affari, egli pensa che se potesse accogliere tutti i nuovi arrivati farebbe una fortuna.
Che cosa pensa di fare il proprietario per alloggiare gli infiniti nuovi ospiti?
NB Anche in questo caso il proprietario deve dare un'indicazione precisa che valga per tutti i clienti, può fare uso di termini e simboli che si usano in matematica.

DOMANDE ESERCIZI E PROBLEMI:
NB: nei quesiti seguenti, per dimostrare che due insiemi hanno la stessa cardinalità, bisogna dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra di essi (vedi la definizione 3).

1) Secondo te i numeri reali che appartengono all'intervallo [0,2] sono tanti quanti quelli che appartengono all'intervallo [0,5] cioè hanno la stessa cardinalità o sono di meno? (Suggerimento: considera i due intervalli rispettivamente sull'asse x e sull'asse y di un piano cartesiano, traccia una retta "opportuna" e pensa a una corrispondenza biunivoca….)
2) Secondo te i punti che si trovano in un quadrato di lato 1 sono tanti quanti i punti interni a un suo lato o sono di più? (Suggerimento: disegna il quadrato nel piano cartesiano con un vertice nell'origine e un vertice nel punto (1,0) e come suo lato considera l'intervallo aperto [0,1] dell'asse x; poi considera le coordinate di un generico punto del quadrato che saranno del tipo $(0,a_1a_2a_3\ldots.. ;\ 0,\ b_1b_2b_3\ldots.)$, fai corrispondere a questo punto un numero dell'intervallo [0,1] in maniera biunivoca cioè in modo che si possa tornare indietro…)
3) Secondo te i punti di una circonferenza di raggio 1 sono tanti quanti i punti di una circonferenza di raggio 2 o sono di meno? (Suggerimento: disegna le due circonferenze in modo che siano concetriche e traccia i raggi…)
4) Secondo te i punti di un segmento - che possiamo rappresentare con l'intervallo [0,1) - sono tanti quanti quelli di una semiretta - che possiamo rappresentare con l'intervallo $[0,+\infty)$ – o sono di meno? (Suggerimento: disegna l'intervallo [0,1) sull'asse y e l'intervallo $[0,+\infty)$ sull'asse x, disegna anche il punto di coordinate (-1,1) e traccia delle semirette….)
5) Secondo te tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi (stessa cardinalità)?