RAGIONARE COERENTEMENTE

ELEMENTI DI LOGICA FORMALE

Obiettivi

- Educare alla razionalità
- Contribuire a sviluppare le capacità di ragionamento per una corretta deduzione
- Abituare gli allievi all'utilizzo di linguaggi formali, non ambigui

DEFINIZIONE: Una *proposizione logica* (*elementare*) è una affermazione per la quale è possibile decidere se è **vera o falsa**

DEFINIZIONE: Una proposizione è *composta* quando è formata da più proposizioni elementari legati da **connettivi (non, e, o, o…o…, se….allora.., se e solo se)**

Operazioni logiche-

LA NEGAZIONE

- **DEFINIZIONE**: la *negazione* di una proposizione **A** è la proposizione «**non A**» che *risulta vera quando A è falsa e falsa quando A è vera.*
- Si scrive $\bar{A}$ oppure not A
- La tavola di verità associata a questa operazione può essere descritta nei seguenti modi:

A	$\bar{A}$
v	**f**
f	**v**

A	***not A***
0	**1**
1	**0**

Operazioni logiche-

LA CONGIUNZIONE

- **DEFINIZIONE:** La *congiunzione* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **A e B**» che *risulta vera solo se entrambe le proposizioni sono vere.*
- Si scrive **A ∧ B** oppure **A and B**
- La tavola di verità associata a questa operazione è la seguente:

A	B	A ∧ B
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Operazioni logiche-

LA DISGIUNZIONE INCLUSIVA

- **DEFINIZIONE:** La *disgiunzione inclusiva* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **A o B**» che *risulta falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.*
- Si scrive **A ⋁ B** oppure **A or B**
- La tavola di verità associata a questa operazione è la seguente:

A	B	A ⋁ B
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Operazioni logiche-

LA DISGIUNZIONE ESCLUSIVA

- **DEFINIZIONE:** La *disgiunzione esclusiva* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **o A o B**» che *risulta vera solo se una è vera e l'altra è falsa.*

- Si scrive **A $\dot{\vee}$ B** oppure **A xor B**

- La tavola di verità associata a questa operazione è la seguente:

A	B	A $\dot{\vee}$ B
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Operazioni logiche-

L' IMPLICAZIONE MATERIALE

- **DEFINIZIONE:** L' *implicazione materiale* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione «**se A, allora B**» che *risulta falsa solo se A è vera e B è falsa.*

- Si scrive **A → B**

- si legge «**A implica B**» oppure «**se A allora B**» oppure «**da A segue B**»

- La tavola di verità associata a questa operazione è la seguente:

A	B	A → B
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Operazioni logiche-

LA DOPPIA IMPLICAZIONE

- **DEFINIZIONE:** La *doppia implicazione* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **A se e solo se B**» che *risulta vera se A e B sono entrambe vere o entrambe false.*
- Si scrive **A ↔ B**
- La tavola di verità associata a questa operazione è la seguente:

A	B	A ↔ B
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**v**

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

DEFINIZIONE: Una proposizione composta è una *tautologia* se risulta *sempre vera*, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta

DEFINIZIONE: Una proposizione composta è una *contraddizione* se risulta *sempre falsa*, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta

EQUIVALENZA DI ESPRESSIONI LOGICHE

DEFINIZIONE: Due espressioni logiche nelle stesse variabili si dicono *equivalenti* se hanno uguale la relativa colonna della tavola di verità

I circuiti elettrici e i connettivi logici

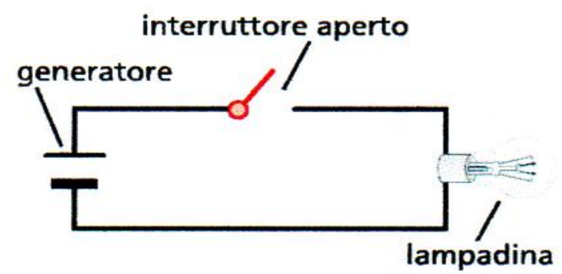
Interruttori e proposizioni

Ogni proposizione logica può assumere solo uno dei due valori di verità: vero o falso. Una situazione fisica che rappresenta perfettamente questa situazione a due valori è quella dei circuiti elettrici: in un circuito o passa corrente o non ne passa.

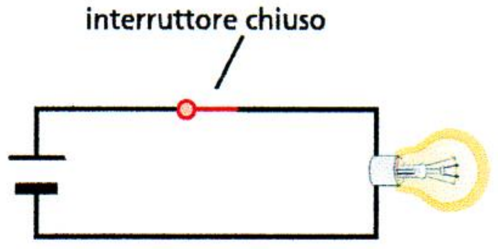
Un semplice circuito elettrico è formato per esempio da un generatore di corrente (quale una pila) collegato con un filo metallico a una lampadina e a un interruttore.

È possibile la seguente corrispondenza fra proposizione logica e posizione dell’interruttore:

- interruttore **aperto** →proposizione **falsa**;
- interruttore **chiuso** →proposizione **vera**.

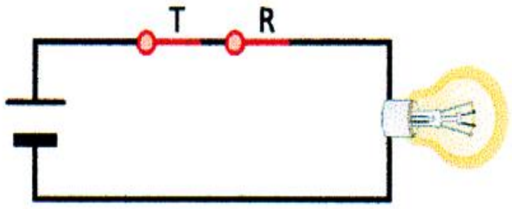


a. Quando l'interruttore è aperto, nel circuito non passa corrente: la lampadina è spenta.

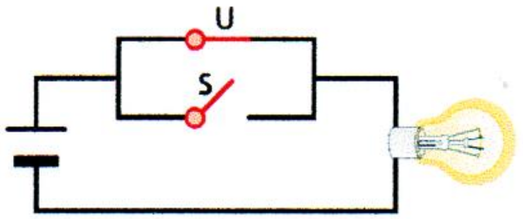


b. Quando l'interruttore è chiuso, la corrente passa nel circuito: la lampadina è accesa.

In uno stesso circuito possiamo introdurre più di un interruttore in due modi differenti: in serie o in parallelo:



a. Gli interruttori *T* e *R* sono in serie.



b. Gli interruttori *U* e *S* sono in parallelo.

Interruttori in serie e congiunzione

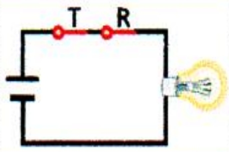
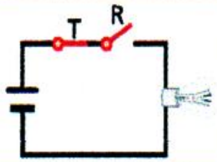
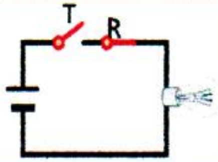
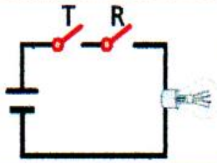
Consideriamo un circuito con due interruttori in serie, T e R.

La corrente passa solo quando sono entrambi chiusi.

In tutti gli altri casi la lampadina non si accende.

Questa situazione è analoga a quella che si ha in logica se, date le proposizioni T e R, si considera T∧R.

La congiunzione è vera soltanto se sono vere entrambe T e R.

	T	R	$T \wedge R$
	V	V	V
	V	F	F
	F	V	F
	F	F	F

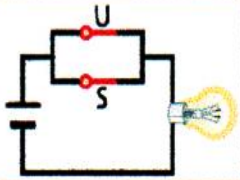
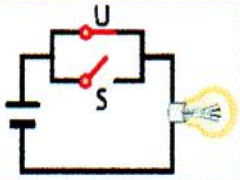
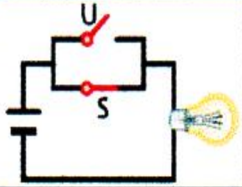
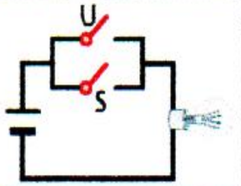
Interruttori in parallelo e disgiunzione

Consideriamo un circuito con due interruttori in parallelo, U e S.

La corrente passa quando è chiuso uno dei due interruttori, oppure quando sono entrambi chiusi.

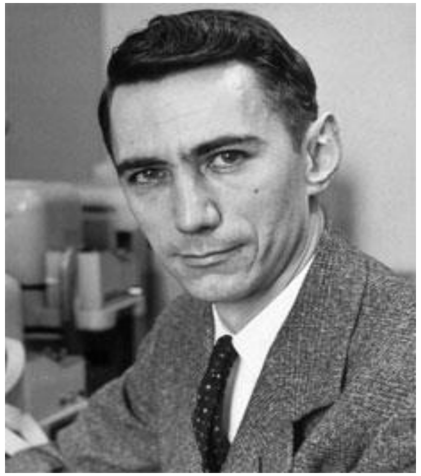
In logica abbiamo una situazione analoga considerando due proposizioni U e S e la loro disgiunzione U ∨ S.

Quest'ultima è vera se è vera U oppure S o entrambe le proposizioni.

	U	S	$U \vee S$
	V	V	V
	V	F	V
	F	V	V
	F	F	F

I circuiti logici

Il matematico statunitense Claude Shannon, in un articolo del 1938 intitolato *Sintesi di circuiti di commutazione a due posizioni*, mostrò che <u>l'algebra della logica fornisce un modello matematico</u> valido non solo per i ragionamenti, ma anche <u>per particolari circuiti detti di commutazione</u> (o flip-flop). Essi infatti possono assumere solo due posizioni, che possiamo associare per convenzione ai due valori logici vero o falso. Per questo possono essere usati per assemblare dispositivi che effettuano operazioni sia logiche che aritmetiche, a patto di rappresentare i numeri con insiemi di valori binari (0 ed 1)



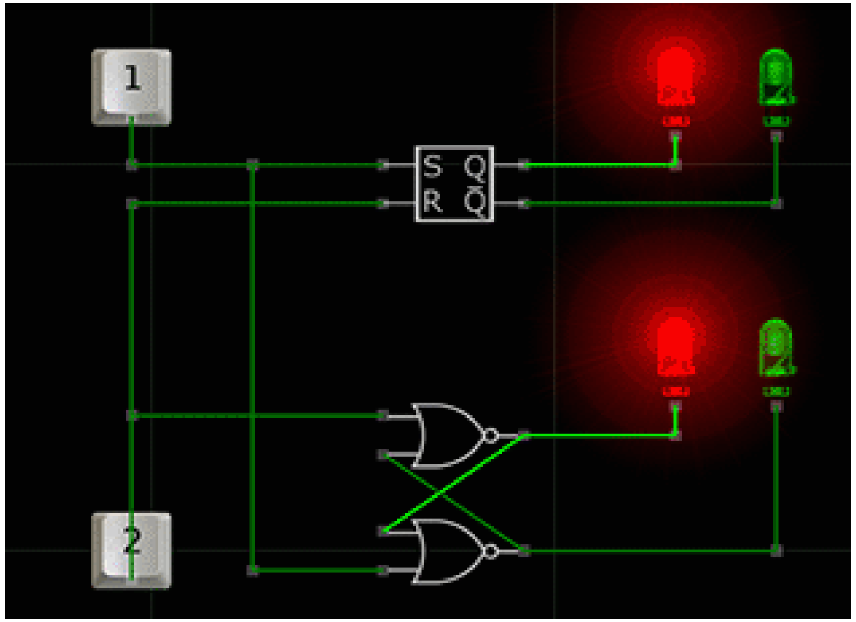
In altri termini si possono costruire dispositivi elettronici in cui i due possibili stati sono rappresentati da due situazioni ben distinte, come per esempio *passa corrente* o *non passa corrente*.

Una delle due situazioni verrà associata al valore "0" o "falso", l'altra al valore 1, o "vero". Tale dispositivo può manipolare le grandezze elettriche in modo da realizzare proprio un connettivo logico.

I circuiti logici

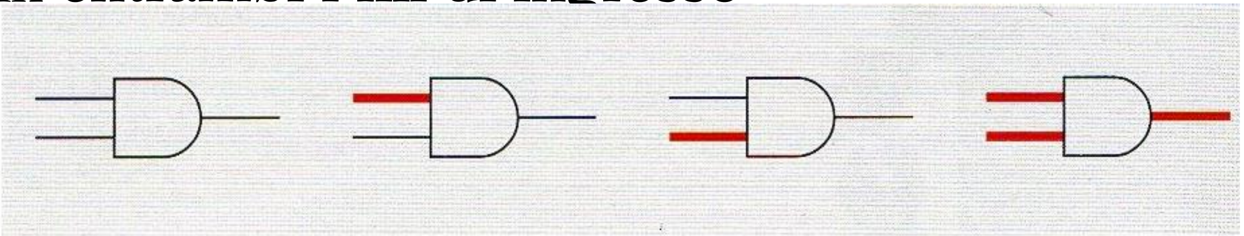
In altri termini si possono costruire dispositivi elettronici in cui i due possibili stati sono rappresentati da due situazioni ben distinte, come per esempio *passa corrente* o *non passa corrente*.

Una delle due situazioni verrà associata al valore "0" o "falso", l'altra al valore 1, o "vero". Tale dispositivo può manipolare le grandezze elettriche in modo da realizzare proprio un connettivo logico.



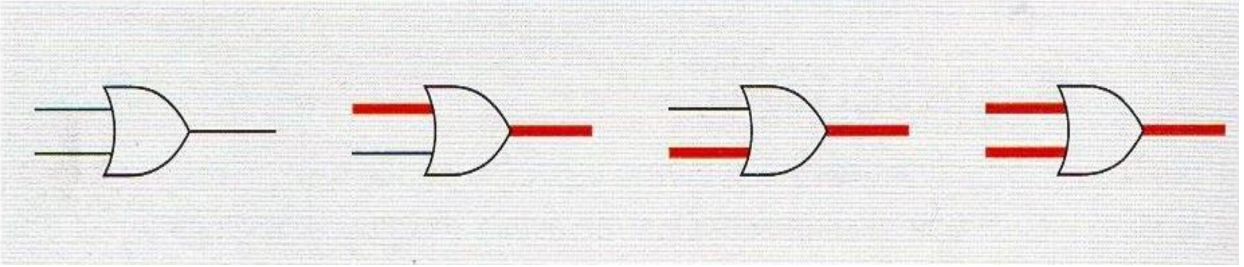
FUNZIONAMENTO DI UN DISPOSITIVO AND:

I fili percorsi da corrente sono indicati in rosso; **nel filo di uscita passa corrente** se e solo se ne passa in **entrambi i fili di ingresso**

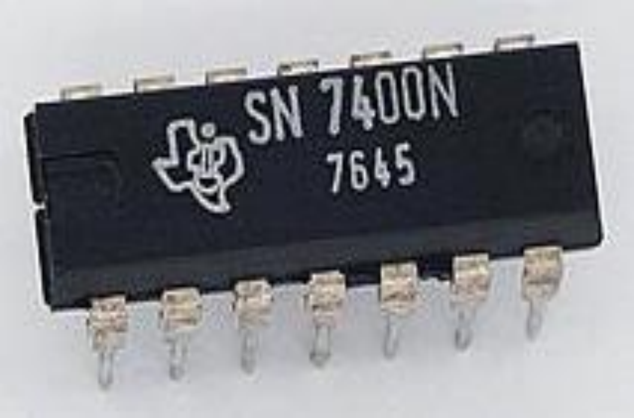


FUNZIONAMENTO DI UN DISPOSITIVO OR:

Nel filo di uscita passa corrente se ne passa in **almeno uno dei due fili di ingresso**



Porte logiche



- Una **porta logica** è un oggetto utilizzato in elettronica digitale e in informatica: è quindi presente in una miriade di dispositivi utilizzati frequentemente e quotidianamente.
- Si tratta di un **circuito digitale** in grado di implementare un particolare **connettivo logico**, cioè è in grado di "simulare" le operazioni della logica matematica mediante opportuni controlli su segnali elettrici.

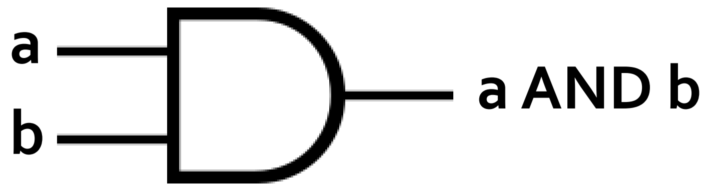
Porte logiche

Una porta logica opera su uno, due o più segnali di ingresso (**input**) ed un unico segnale di uscita (**output**).

Ciascuno di tali segnali può assumere due stati, indicati solitamente con **1** e **0**, che corrispondono al passaggio o meno di segnale elettrico. Per questo, talvolta i simboli usati sono rispettivamente **H** e **L** (segnale alto o basso).

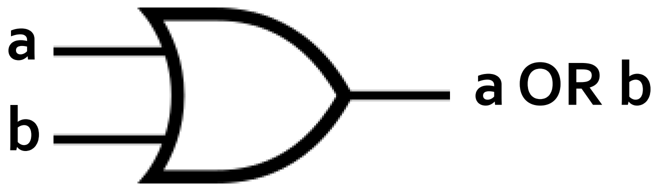
Un connettivo logico binario è implementato da una porta logica a due input.

Porte logiche: AND, OR, XOR



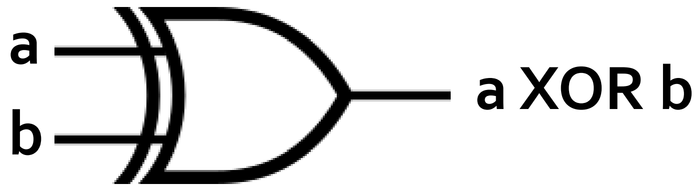
a	b	a AND b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

CONGIUNZIONE
(prodotto logico)



a	b	a OR b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

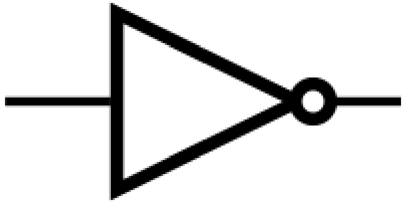
DISGIUNZIONE INCLUSIVA
(somma logica)



a	b	a XOR b
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

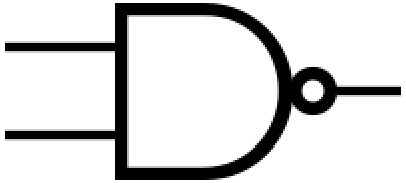
DISGIUNZIONE ESCLUSIVA

Porte logiche: NOT, NAND, NOR, XNOR

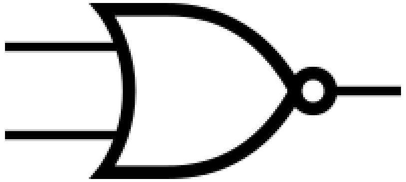


a	NOT a
1	0
0	1

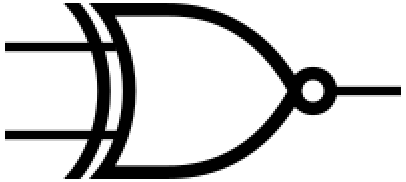
NEGAZIONE
(inverter)



NEGAZIONE della
CONGIUNZIONE

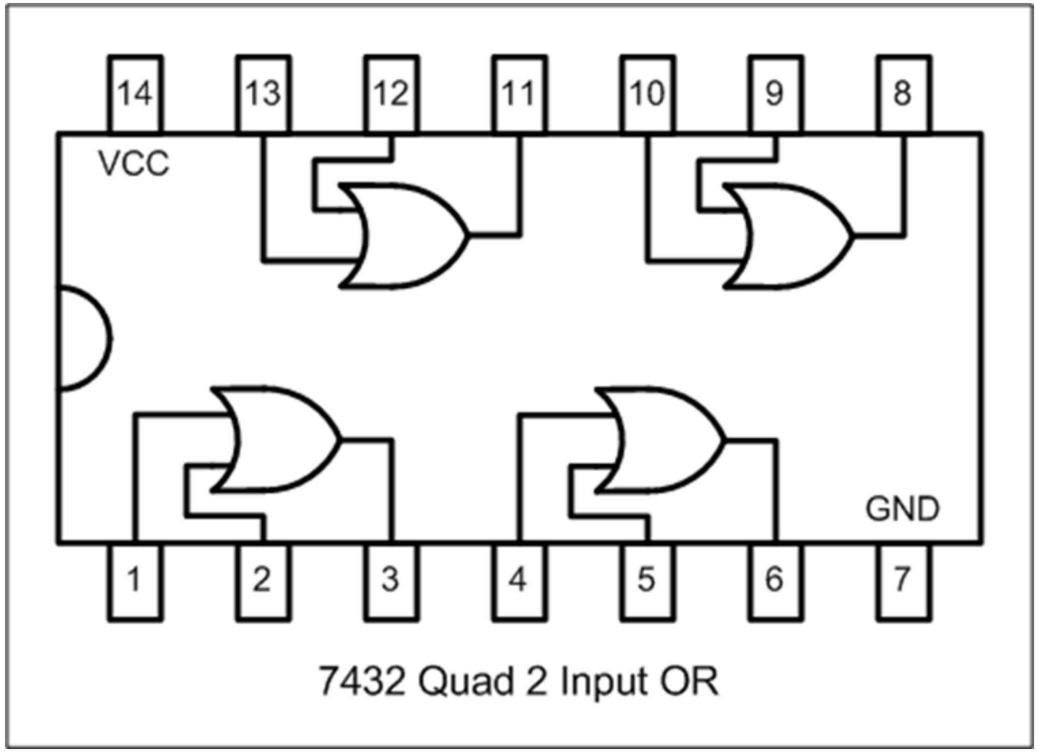


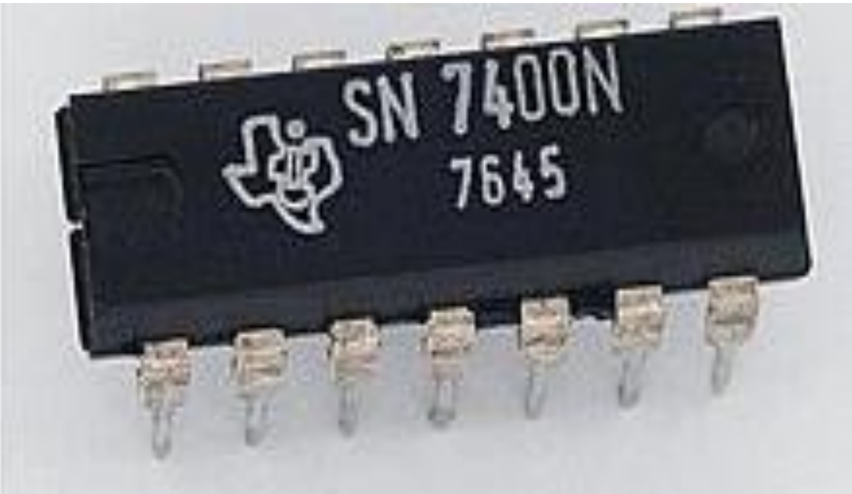
NEGAZIONE della
DISGIUNZIONE
INCLUSIVA

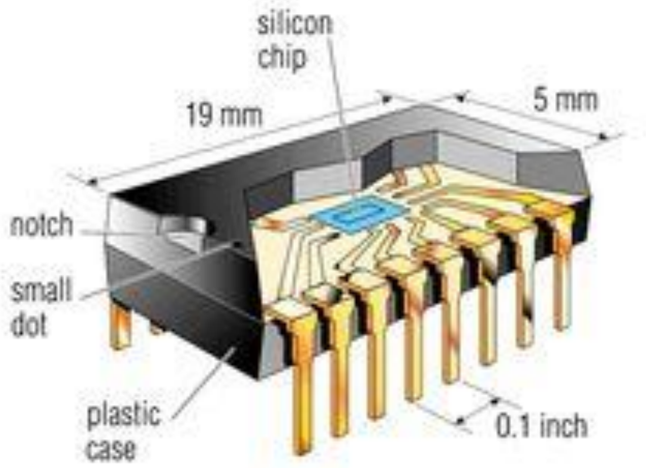


NEGAZIONE della
DISGIUNZIONE
ESCLUSIVA

Porte logiche







Reti logiche

Quando due o più porte logiche vengono connesse tra loro si parla di **RETI LOGICHE**.

Osservazione: ad esempio, la singola porta NAND può essere sostituita dalla rete logica formata dalla connessione delle porte AND e NOT.

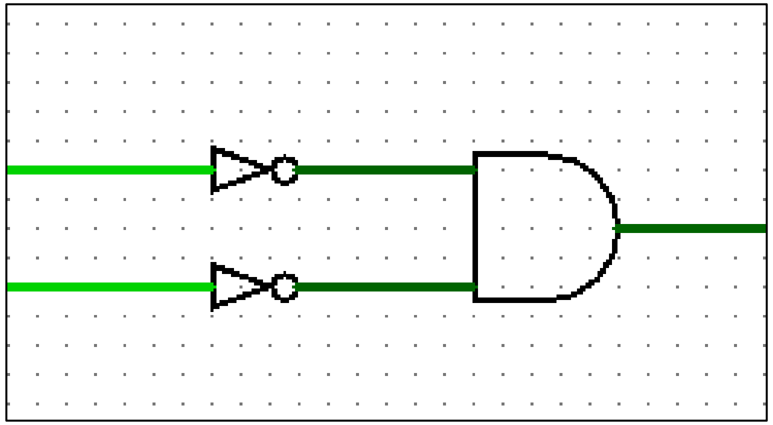
Dalla proposizione logica alla rete logica

Leggi di De Morgan

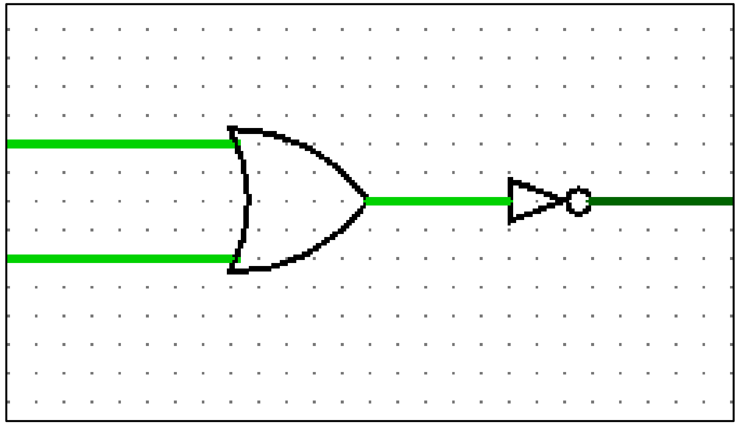
$$\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A \vee B}$$

$$\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \wedge B}$$

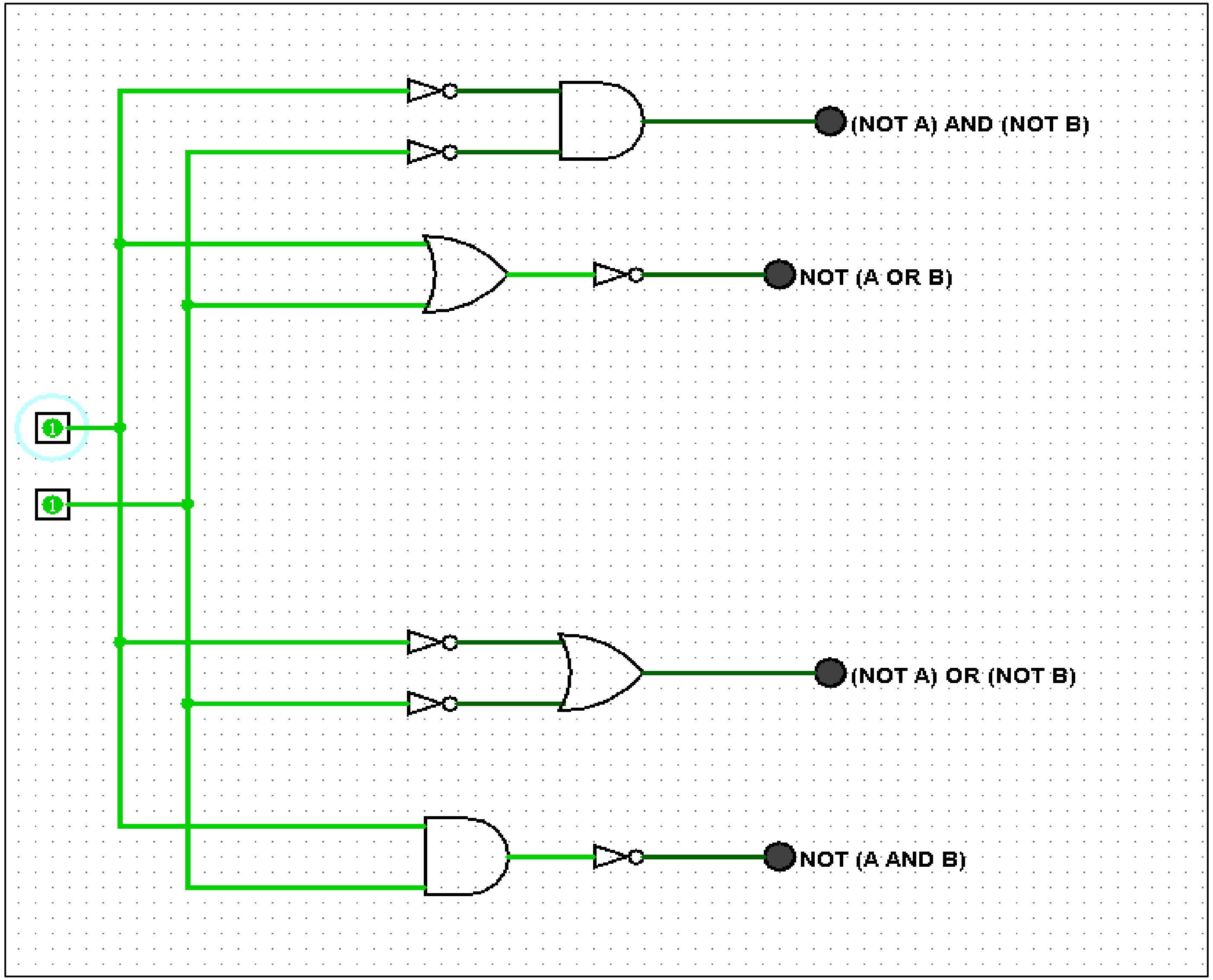
(NOT A) AND (NOT B)



NOT (A OR B)



Leggi di De Morgan



Proposizioni logicamente equivalenti

- ***Implicazione*** $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
1	1	**1**	0	**1**
1	0	**0**	0	**0**
0	1	**1**	1	**1**
0	0	**1**	1	**1**

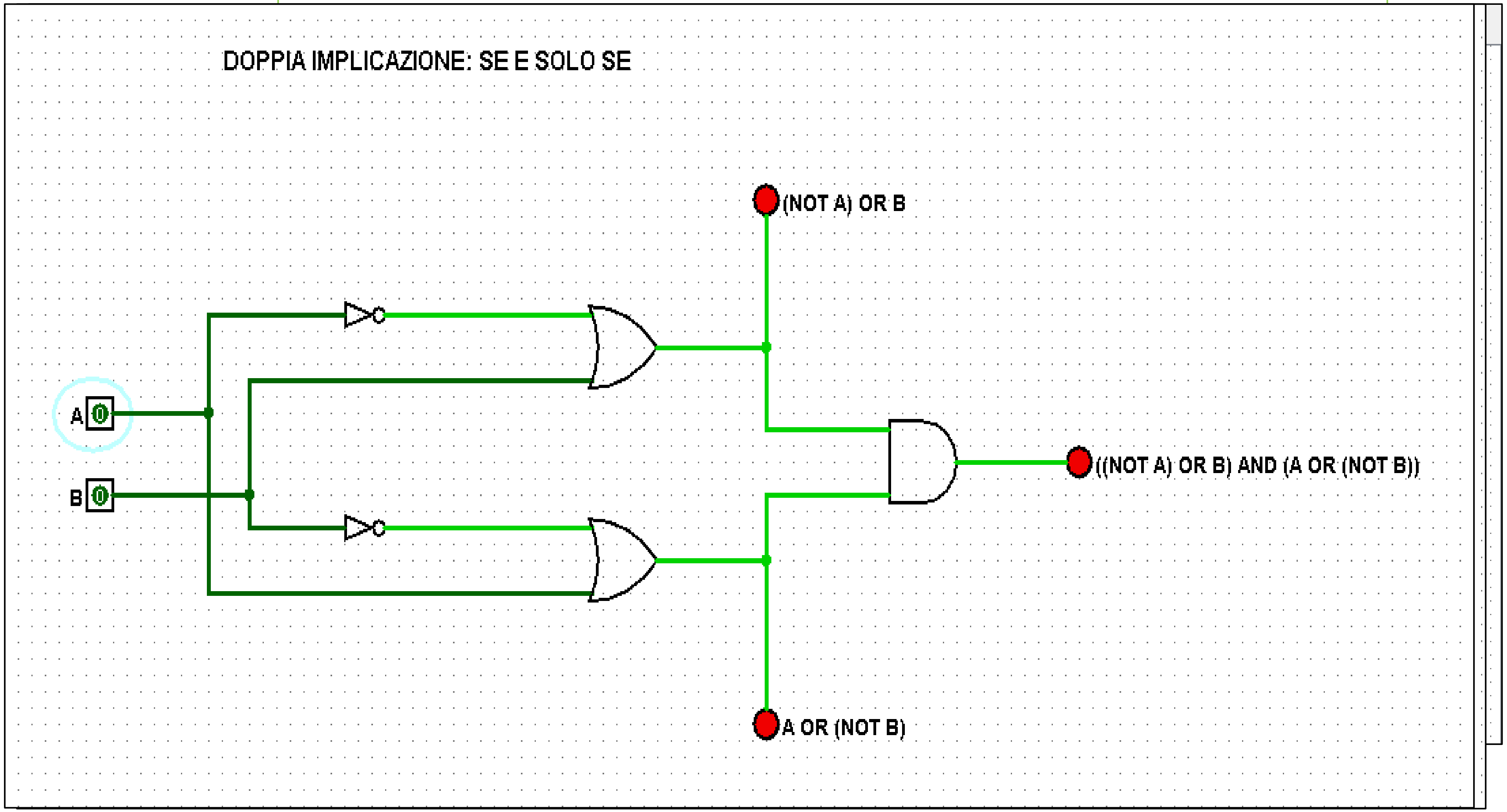
(NOT A) OR B

- ***Doppia implicazione***

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$$

((NOT A) OR B) AND ((NOT B) OR A)

Doppia implicazione



L'isola di Smullyan

Le tavole di verità per la risoluzione di indovinelli logici

THE ISLAND OF KNIGHTS AND KNAVES

Sull'isola di Smullyan ci sono due tipi di abitanti:

- **i cavalieri che dicono sempre la verità;**
- **i furfanti (o fanti) che mentono sempre.**

La logica dell'isola di Smullyan

Indichiamo con ***A un*** **abitante dell'isola di Smullyan**:
egli è <u>un furfante o un cavaliere</u>.

Si considera ***a*** la proposizione logica elementare:
a **: A è un cavaliere.**

Si indica con $\boldsymbol{\alpha}$ **la proposizione affermata da A**.

Allora: $\boldsymbol{a \leftrightarrow \alpha}$

L'isola di Smullyan: n.28

28.

In this problem, there are only two people, A and B, each of whom is either a knight or a knave. A makes the following statement: "At least one of us is a knave."

What are A and B?

- A dice che **almeno uno** tra A e B è un furfante.

$$\alpha \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$$

Soluzione

- A è un cavaliere;
- B è un furfante.

a	b	$\bar{a} \vee \bar{b}$
~~1~~	~~1~~	~~0~~
1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~

L’isola di Smullyan: n.29

29.

Suppose A says, “Either I am a knave or B is a knight.” What are A and B?

- A dice che egli è un furfante **oppure** B è un cavaliere.

$$\alpha \equiv \overline{a} \vee b$$

Soluzione

- A è un cavaliere;
- B è un cavaliere.

a	b	$\overline{a} \vee b$
1	1	**1**
~~1~~	~~0~~	~~**0**~~
~~0~~	~~1~~	~~**1**~~
~~0~~	~~0~~	~~**1**~~

L'isola di Smullyan: n.31

31.

Again we have three people, A, B, C, each of whom is either a knight or a knave. A and B make the following statements:

A: All of us are knaves.
B: Exactly one of us is a knight.

What are A, B, C?

- A dice che sono tutti furfanti;
- B dice che c'è un solo cavaliere.

$$\alpha \equiv \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$$

$$\beta \equiv (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$$

Soluzione

- A è un furfante;
- B è un cavaliere;
- C è un furfante.

a	b	c	α	β
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	1	0	0	1
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~

L’isola di Smullyan: n. 32

32.

Suppose instead, A and B say the following:

A: All of us are knaves.
B: Exactly one of us is a knave.

Can it be determined what B is? Can it be determined what C is?

Soluzione:

- A è un furfante;
- B è un cavaliere

<u>oppure</u> un furfante;

- C cavaliere.

- A dice che sono tutti furfanti;
- B dice che c’è un solo furfante.

$$\alpha \equiv \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$$

$$\beta \equiv (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c})$$

a	b	c	α	β
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	0	1	0	0
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~

Ragionamento logico

Dietro ogni carta blu c'è una figura.

Quali carte devo girare per verificare la validità dell'affermazione?

Ragionamento logico

Siano *B* e *F* le seguenti proposizioni logiche atomiche:

- *B: la carta ha il dorso BLU*;
- *F: la carta rappresenta una FIGURA.*

L'affermazione precedente si può "tradurre" nella proposizione logica composta: B → F

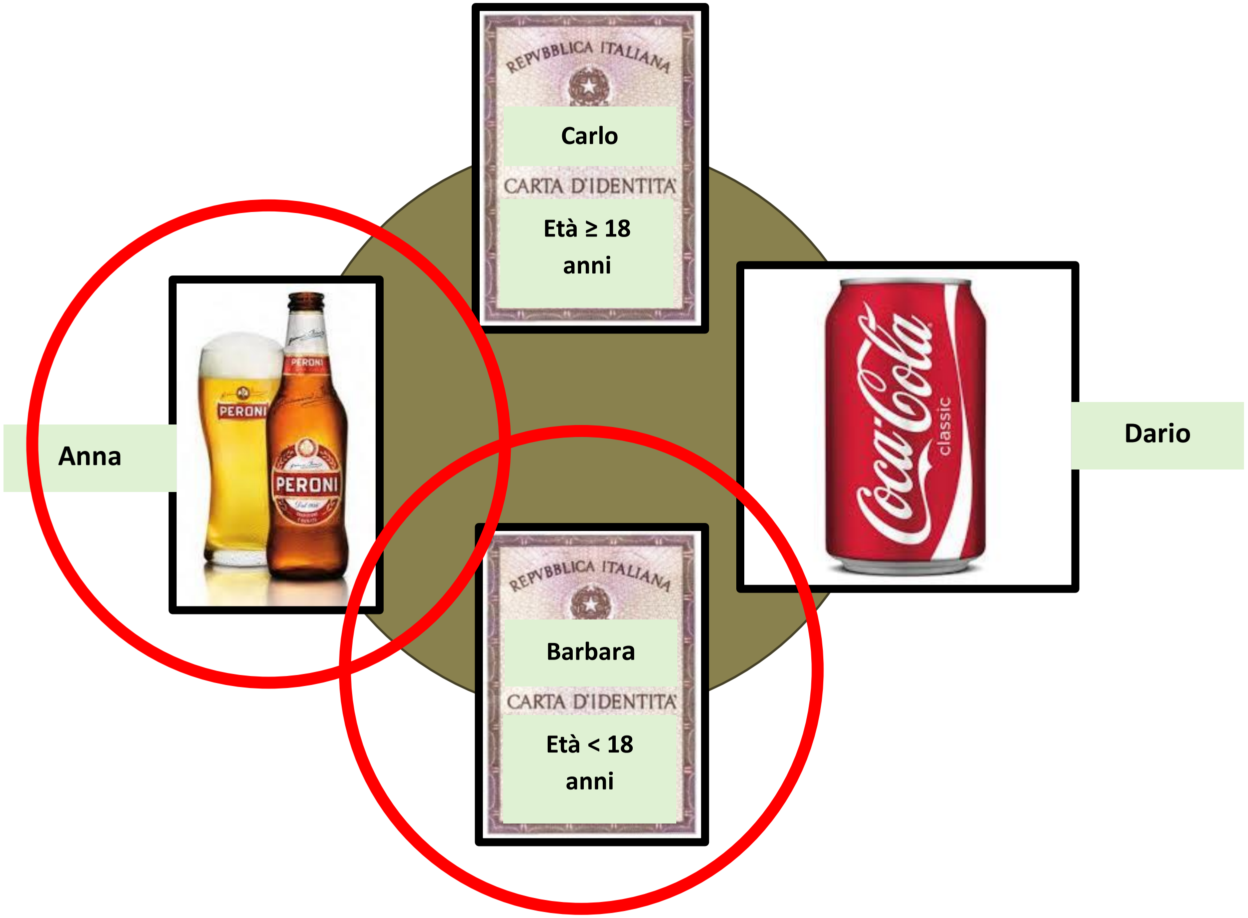
Soluzione

Devo girare la **carta BLU** e quella che NON rappresenta una FIGURA, cioè il **2 di picche**.

B	F	B → F
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Quattro persone stanno bevendo sedute al tavolo di un bar.

Ragionamento logico



Un agente delle FF.OO. deve accertare che sia stata rispettata la legge che vieta la vendita di alcolici ai minorenni. Su chi deve indagare?

Propositiones ad acuendos juvenes

Problemi medievali

Raccolta di 53 problemi

di Alcuino di York

A cura di Raffaella Franci

Alcuino di York

Northumbria 735- Tours 804

Alcuino di York

Monaco inglese (735 - 804)

Convocato ad Aquisgrana alla corte di Carlo Magno

Direttore della Schola Palatina

Il problema di attraversamento n.18

XVIII.

PROPOSITIO DE HOMINE ET CAPRA ET LUPO.

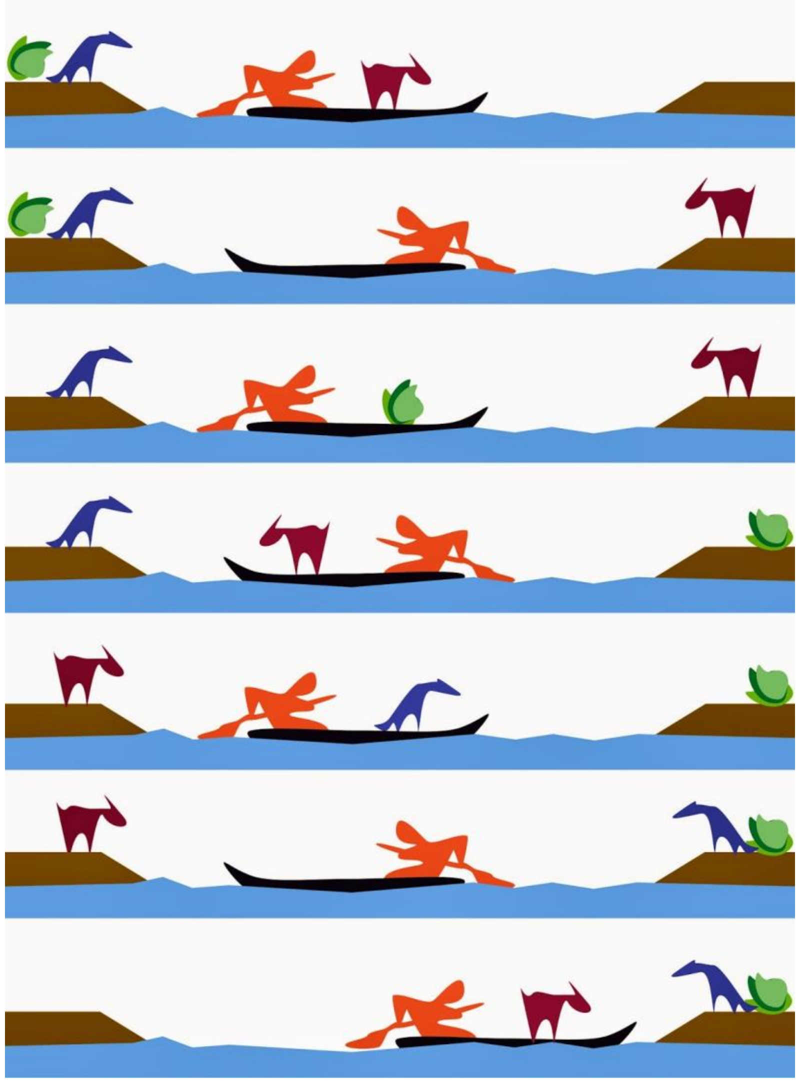
Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum, capram, et fasciculum cauli. Et non potuit aliam navem invenire, nisi quæ duos tantum ex ipsis ferre valebat. Præceptum itaque ei fuerat ut omnia hæc ultra illæsa omnino transferret. Dicat, qui potest, quomodo eis illæsis transire potuit?

Lupo, capra e cavolo

Un uomo doveva trasportare al di là di un fiume un lupo, una capra e un cavolo e trovò una barca che poteva portare soltanto due di essi.

Gli era stato ordinato di trasferire tutti senza alcun danno.

Si determini come può trasferirli tutti indenni.



Un allarme per il pastore

Un allarme si attiva quando, <u>in assenza del pastore</u>, si trovano insieme <u>il lupo E la capra OPPURE la capra E il cavolo</u>.

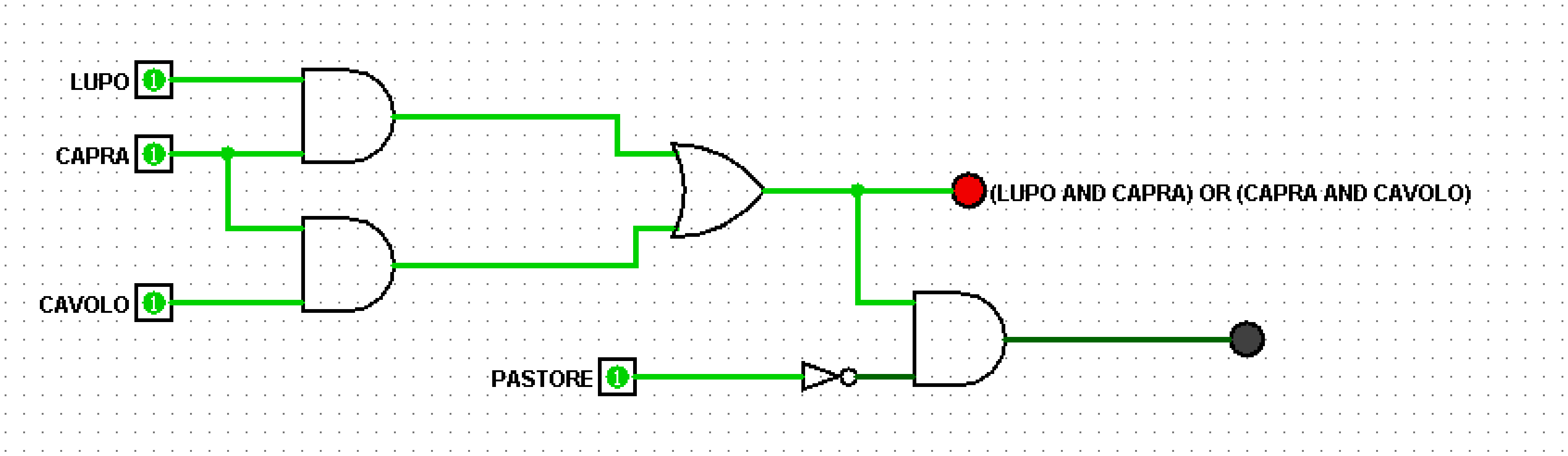
Relativamente allo stesso luogo, si indicano con *P*,*L*, *C*, *V* le proposizioni logiche atomiche:

- **P:il PASTORE è presente;**
- ***L*: il LUPO è presente;**
- ***C*: la CAPRA è presente;**
- ***V*: il CAVOLO è presente.**

Allora, in assenza del pastore la proposizione logica che soddisfa il problema è:

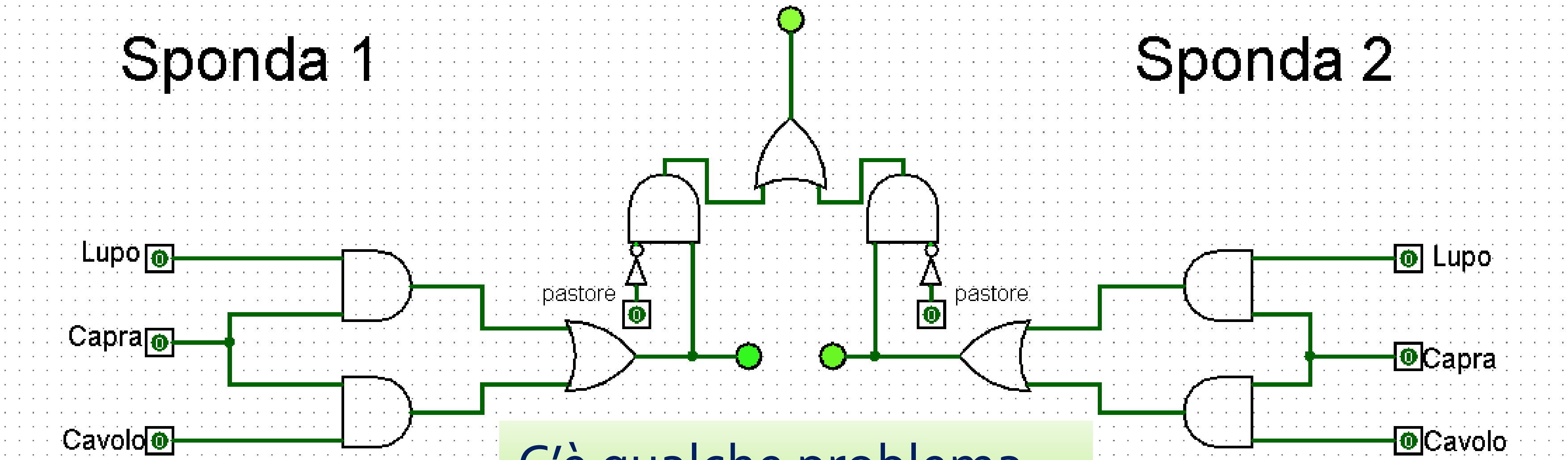
$$(\overline{\boldsymbol{P}}) \wedge [(\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V})]$$

Rete logica

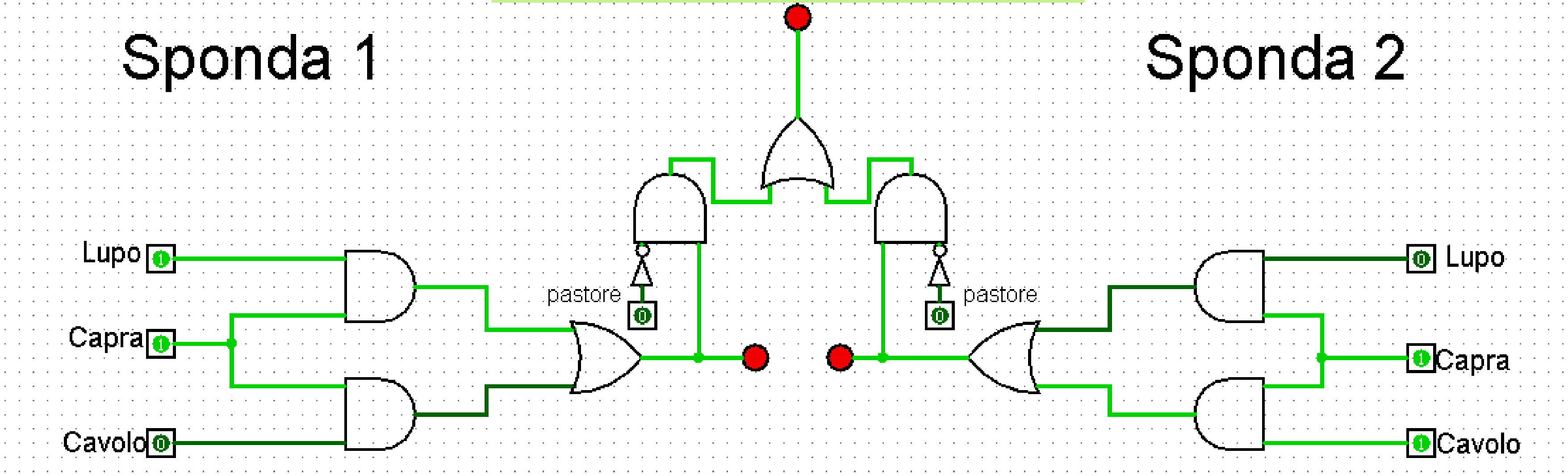


$$(\bar{P}) \wedge [(L \wedge C) \vee (C \wedge V)]$$

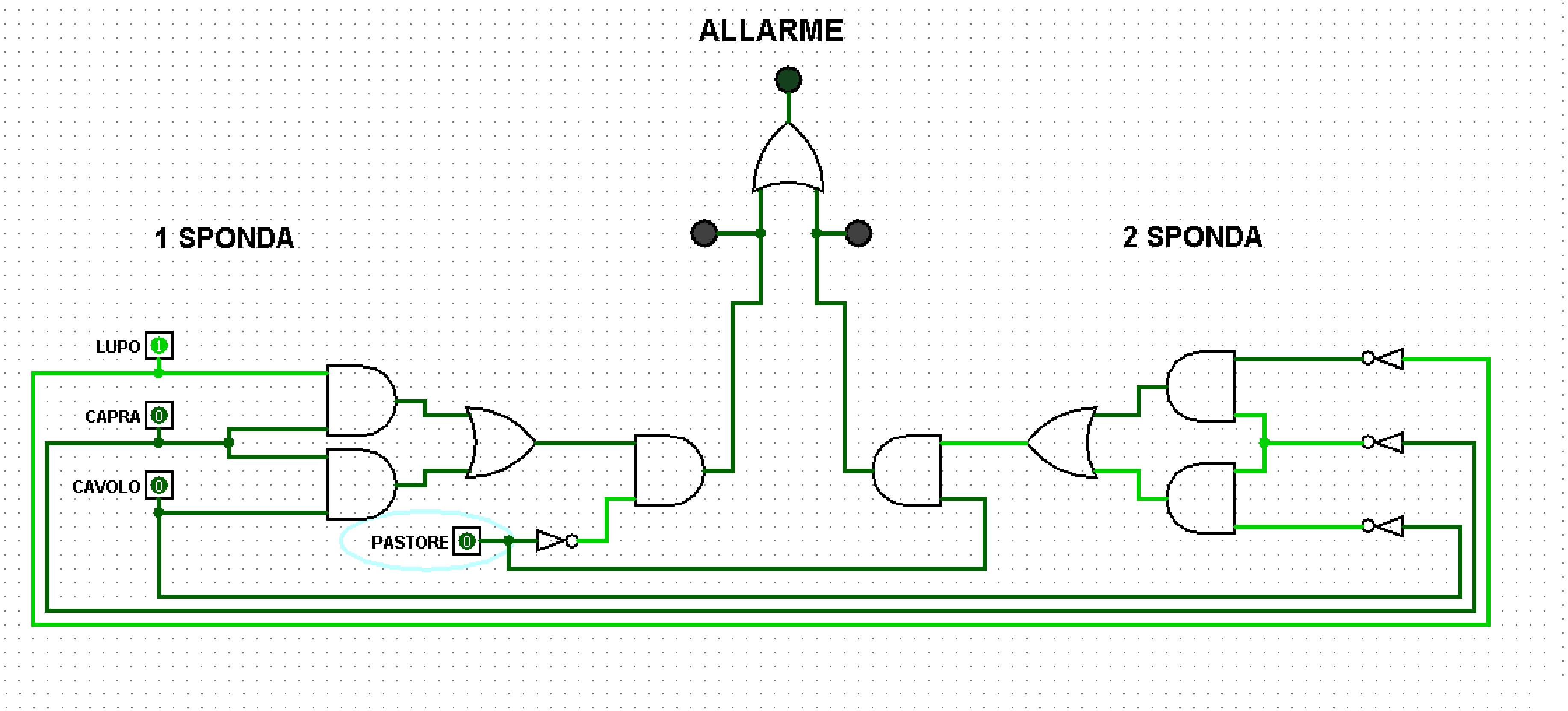
Rete logica sulle due sponde



C'è qualche problema…



L’allarme generalizzato



Tre coppie fratello-sorella

Tre ragazzi che avevano ciascuno una sorella dovevano attraversare un fiume.

Ogni ragazzo desiderava la sorella degli altri due.

Arrivati al fiume trovarono una barchetta che poteva portare solo due di essi.

Si determini come hanno potuto tutti attraversare il fiume senza che nessuna ragazza venisse oltraggiata.

Un allarme per le coppie fratello-sorella

L'allarme si attiva quando, una delle tre ragazze è lasciata senza il proprio fratello in presenza di almeno uno degli altri due ragazzi.

Per comodità di rappresentazione, diamo nome ai sei personaggi:

- 1° coppia: **Aldo e Anna;**
- 2° coppia: **Bruno e Barbara;**
- 3° coppia: **Carlo e Chiara.**

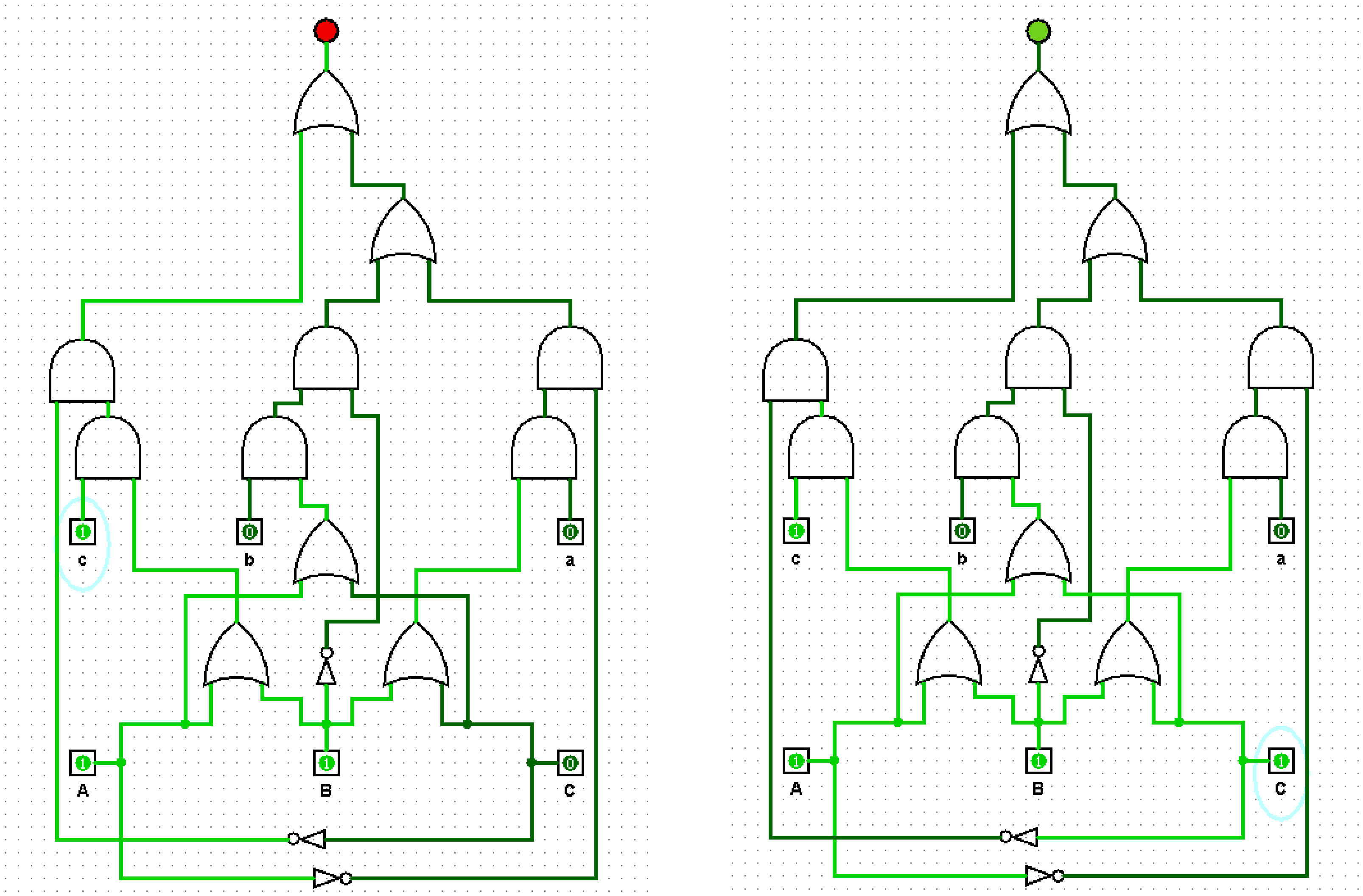
Indichiamo con ***A, B, C, a, b, c*** le proposizioni atomiche:

- ***A***: **Aldo è presente;**
- ***B***: **Bruno è presente;**
- ***C***: **Carlo è presente;**
- ***a***: **Anna è presente;**
- ***b***: **Barbara è presente;**
- ***c***: **Chiara è presente;**

La seguente proposizione logica risolve il problema:

$$\Big(\big(\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C})\big) \wedge \overline{\boldsymbol{A}}\Big) \vee \Big(\big(\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C})\big) \wedge \overline{\boldsymbol{B}}\Big) \vee \Big(\big(\boldsymbol{c} \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})\big) \wedge \overline{\boldsymbol{C}}\Big)$$

Rete logica per coppie fratello – sorella



$$\Big(\big(a \wedge (B \vee C)\big) \wedge \bar{A}\Big) \vee \Big(\big(b \wedge (A \vee C)\big) \wedge \bar{B}\Big) \vee \Big(\big(c \wedge (A \vee B)\big) \wedge \bar{C}\Big)$$