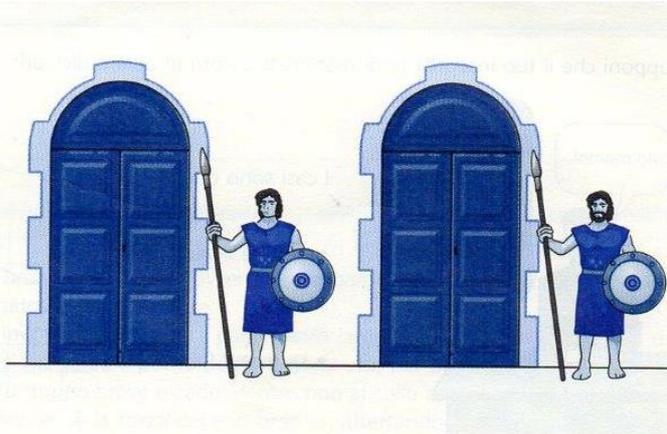


Indovinello logico

A un condannato a morte il Re dette un'ultima possibilità. Così si esprime il Re, delle cui parole non si poteva dubitare:

'Qui davanti a te ci sono due porte: dietro l'una c'è il patibolo, dietro l'altra c'è la libertà. Ogni porta ha una sentinella, ma mentre una dice sempre il vero, l'altra dice sempre il falso. Tu non sai quale delle due sentinelle dice il vero e puoi fare una sola domanda a una delle due sentinelle. Se indovini la porta giusta, sei libero!'

Il condannato a morte fece una domanda a una delle due sentinelle e fu dunque libero. Quale fu la sua domanda, frutto di ragionamento piuttosto che di fortuna?



Indichiamo le due porte con A e B

- A è la porta per il patibolo
- B è la porta per la libertà

Vi sono due sentinelle che indichiamo con V (quella che dice il vero) e F (quella che dice il falso).

Vi sono dunque soltanto queste due possibilità:

A	V	F
B	F	V

Il condannato a morte è molto indeciso su quale domanda fare, ma è anche incerto nello scegliere la sentinella a cui rivolgersi. Egli non sa, infatti, chi dice il vero e chi dice il falso. Per prima cosa, allora, egli scruta le sentinelle per cercare di capire, da uno sguardo, da un sorriso, da un cenno, se l'una delle due gli pare più affidabile. Ma non ne viene a capo. Dopo aver lungamente pensato (ma il tempo a disposizione non era molto, egli scelse di formulare una sola delle seguenti domande, a una delle due sentinelle scelta a caso:

- E' questa la porta per il patibolo?
- E' questa la porta per la libertà?
- La porta per la libertà è sicuramente quell'altra?
- Se io chiedessi all'altra sentinella qual è la porta per la libertà, quale risposta mi darebbe?
- Tu dici la verità?

Analizza le domande precedenti e le possibili risposte, sia nel caso che egli si sia rivolto alla sentinella bugiarda sia che si sia rivolto a quella veritiera. Individua così:

- qual è l'unica domanda che permette di effettuare una scelta che sicuramente porta alla libertà
- qual è il comportamento del condannato una volta ricevuta la risposta

.....

.....

LA CONGIUNZIONE

DEFINIZIONE: La congiunzione di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **A e B** » che risulta vera solo se entrambe le proposizioni sono vere.

Si scrive $A \wedge B$ oppure **A and B**

La tavola di verità associata a questa operazione può essere descritta nei seguenti modi (completa):

A	B	$A \wedge B$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

A	B	A and B
1
1
0
0

Esempi

- A:«La Terra è un pianeta»; B:«La Luna è un satellite della Terra»; $A \wedge B$:«La Terra è un pianeta e la Luna è un satellite della Terra». La proposizione $A \wedge B$ è vera perché sono vere sia A sia B.
- A:«10 è multiplo di 5»; B:«10 è un numero primo»; $A \wedge B$:« 10 è multiplo di 5e 10 è un numero primo». La proposizione $A \wedge B$ è falsa perché B è falsa

osserva: non tutte le «e» che incontriamo nella lingua italiana congiungono due proposizioni. Per esempio:

«io ho un gatto bianco e grigio» è una sola proposizione.

LA DISGIUNZIONE INCLUSIVA

DEFINIZIONE: La disgiunzione inclusiva di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione « **A o B** » che risulta falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.

Si scrive $A \vee B$ oppure **A or B**

La tavola di verità associata a questa operazione può essere descritta nei seguenti modi (completa):

A	B	$A \vee B$
v	v	..
v	f	..
f	v	..
f	f	..

A	B	A or B
..
..
..
..

Esempi

- A:«2 è minore di 3»; B:«2 è maggiore di 10»; $A \vee B$:« 2 è minore di 3 o maggiore di 10». La proposizione $A \vee B$ è vera perché pur essendo B falsa, A è vera.
- A:« 5 è minore di 3»; B:« 5 è maggiore di 10»; $A \vee B$:« 5 è minore di 3 o maggiore di 10». Quest'ultima proposizione è falsa perché sono false sia A sia B .

Esercizi

1. Completa la seguente tabella

Proposizione composta	A	B	Traduzione simbolica
Marco canta e non balla	Marco canta	Marco balla	$A \wedge \bar{B}$
Oggi fa caldo e vado a mare	Oggi fa caldo
Oggi non fa caldo o vado a mare			
Oggi non fa caldo o non piove			

2. Date le tre proposizioni elementari

A: «3 è un numero primo», B: «3 è divisore di 11», C: «2 è un numero dispari»,

attribuisci a ciascuna il suo valore di verità e, in seguito, stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni composte costruendo la relativa tavola di verità:

$A \vee B$

A	B	

$B \wedge C$

$A \wedge \bar{B}$

$\bar{B} \vee \bar{C}$

$A \vee \bar{B} \wedge C$

L' IMPLICAZIONE MATERIALE

DEFINIZIONE: L' *implicazione materiale* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione «**se A, allora B**» che risulta falsa solo se A è vera e B è falsa.

Si scrive $A \rightarrow B$, si legge «**A implica B**» oppure «**se A allora B**» oppure «**da A segue B**»

La tavola di verità associata a questa operazione può essere descritta nei seguenti modi (completa):

A	B	$A \rightarrow B$
v
v
f
f

A	B	$A \rightarrow B$
1
1
0
0

Esempio

A:«15 è un numero dispari»; B:«15 è divisibile per 7»; $A \rightarrow B$:« se 15 è un numero dispari allora è divisibile per 7 ». La proposizione $A \rightarrow B$ è falsa perché A è vera e B falsa.

LA DOPPIA IMPLICAZIONE

DEFINIZIONE: La *doppia implicazione* di due proposizioni **A** e **B** è la proposizione «**A se e solo se B**» che risulta vera se A e B sono entrambe vere o entrambe false.

Si scrive $A \leftrightarrow B$

La tavola di verità associata a questa operazione può essere descritta nei seguenti modi

A	B	$A \leftrightarrow B$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

A	B	$A \leftrightarrow B$
1
1
0
0

Esempio

La proposizione «un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo» è vera. Infatti essa è formata dalle due proposizioni A:«un triangolo è equilatero » e B:« un triangolo è equiangolo »; poiché A è vera e B è vera anche la proposizione $A \leftrightarrow B$ è vera.

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

DEFINIZIONE: Una proposizione composta è una tautologia se risulta sempre vera, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta

Esempio

La proposizione $A \vee \bar{A}$ è una tautologia: infatti dalla tavola di verità risulta

A	\bar{A}	$A \vee \bar{A}$
v	f	v
f	v	v

La proposizione «la squadra di calcio ha segnato un gol oppure non ha segnato» è una tautologia.

Esercizio

Verifica, con una tavola delle verità, che la seguente proposizione composta è una tautologia:

$(A \wedge B) \rightarrow A$

A	B
v	v		
v	f		
f	v		
f	f		

DEFINIZIONE: Una proposizione composta è una contraddizione se risulta sempre falsa, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta

Esempio

La proposizione $A \wedge \bar{A}$ è una contraddizione: infatti dalla tavola di verità risulta

A	\bar{A}	$A \wedge \bar{A}$
v	f	f
f	v	f

La proposizione «oggi è lunedì e non è lunedì» è una contraddizione.

Esercizio

Verifica, con una tavola delle verità, che la seguente proposizione composta è una contraddizione:

$A \wedge (\bar{A} \wedge B)$

A	B
v	v			
v	f			
f	v			
f	f			

EQUIVALENZA DI ESPRESSIONI LOGICHE

DEFINIZIONE: Due espressioni logiche nelle stesse variabili si dicono equivalenti se hanno uguale la relativa colonna della tavola di verità

Esempio:

Le proposizioni «se un numero è divisibile per 3 ed è divisibile per 4 allora è divisibile per 12» e «se un numero non è divisibile per 12 allora non è divisibile per 3 o non è divisibile per 4» sono equivalenti.

Esercizio

Il trattato della Comunità Europea contiene il seguente articolo:

Art.19

- a) Ogni cittadino dell’Unione residente in uno Stato membro di cui non è cittadino ha il diritto di voto e di eleggibilità alle elezioni comunali nello Stato membro in cui risiede, alle stesse condizioni dei cittadini di detto Stato
- b) Ogni cittadino dell’Unione residente in uno Stato membro di cui non è cittadino ha il diritto di voto e di eleggibilità alle elezioni del Parlamento europeo nello Stato membro in cui risiede, alle stesse condizioni dei cittadini di detto Stato

• Date le proposizioni:

A: “Essere cittadino dell’Unione”

B: “Essere residente nello Stato S membro dell’Unione”

C: “Essere cittadino dello Stato S membro dell’Unione”

D: “Avere diritto di voto alle elezioni comunali nello Stato S”

E: “Avere diritto di eleggibilità alle elezioni comunali nello Stato S”

F: “Avere diritto di voto alle elezioni del Parlamento europeo nello stato S”

G: “Avere diritto di eleggibilità alle elezioni del Parlamento europeo nello stato S”

formalizza le due parti dell’articolo 19 utilizzando le proposizioni e i connettivi

a)
b)

• Completa la tabella considerando l’articolo 19 del trattato, stabilendo se le affermazioni sono vere (V), false (F) oppure indecidibili (I), ovvero non si può stabilire il loro valore di verità basandosi soltanto sull’articolo riportato

Proposizione	V	F	I
Mario, che ha la cittadinanza italiana e la residenza a Parigi, ha il diritto di voto per le elezioni comunali di Parigi.			
Mario, che ha la cittadinanza italiana e la residenza a Parigi, può candidarsi per le elezioni comunali di Milano.			
Francois, cittadino francese, residente a Bologna, può votare a Bologna per le elezioni europee.			
Sonia, cittadina italiana, residente in Spagna, non può essere eletta in Spagna al parlamento europeo.			

