GLI ASSIOMI DI EUCLIDE E GLI ASSIOMI DEGLI ORIGAMI

Lezioni 3h

Attività di laboratorio 3h

*Gli elementi* di Euclide è il più famoso libro della storia della Matematica ed è la prima discussione sistematica conosciuta della Geometria.

Euclide sapeva che, usando una riga (senza l'indicazione delle lunghezze) e un compasso, era possibile svolgere un gran numero di operazioni geometriche come disegnare un pentagono, un esagono e un cerchio. Ciò era largamente noto a quel tempo e il fatto che Euclide fosse in grado di farlo non è certo insolito.

Tuttavia, quel che Euclide fece e che nessun altro aveva fatto prima, fu l'utilizzo di un approccio sistematico alla Geometria. Ogni costruzione geometrica e ogni risultato matematico contenuti ne *Gli elementi* derivava passo dopo passo da un insieme di 5 assunzioni ( assiomi), che includevano le operazioni di base che era possibile fare con riga e compasso:

1. dati due punti, si può disegnare una linea retta che passi per i due punti;
2. ogni segmento può essere esteso indefinitamente;
3. dato un punto e un segmento che parte da quel punto, è possibile descrivere un cerchio con il punto dato come centro e il segmento come raggio;
4. tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. data una retta e un punto P esterno alla retta data , c'è una e una sola altra retta che passa per P e che non incontra la retta originale.

Queste assunzioni, note come *assiomi* di Euclide, sembrano ovvi e sicuramente Euclide stesso li considerò ovvi in quanto auto-evidenti. Ma la loro bellezza sta nel fatto che possono essere usati per costruire dimostrazioni geometriche di teoremi che sono immensamente più complessi degli assiomi stessi.

C'è però anche una serie di limitazioni alla Geometria euclidea. Due tra i più famosi problemi dell'antichità erano la trisezione dell'angolo (dividere un angolo in tre parti uguali) e la duplicazione del cubo (costruire un cubo che abbia esattamente un volume doppio del cubo iniziale). Nella leggenda, i cittadini dell'antica Delo si trovarono di fronte al secondo problema quando l'oracolo di Delfi chiese loro di raddoppiare il volume del loro altare, al fine di scongiurare la peste (o una piaga). Questo, tuttavia, era impossibile usando solo il metodo con riga e compasso di Euclide e lo stesso accadde per la trisezione dell'angolo. Invece, entrambi i problemi possono essere risolti utilizzando gli origami! Insomma, la Geometria degli origami è più potente di quella euclidea.

*Prof.ssa Daniela Casale*

Gli **assiomi di Huzita-Hatori** sono gli assiomi su cui si basa la matematica degli origami. I primi sei assiomi sono stati formulati dal matematico italo-giapponese Humiaki Huzita nel 1992, e descrivono le operazioni che sono consentite quando si piega un pezzo di carta, come nell'arte dell'origami. Il settimo assioma è stato aggiunto dal matematico giapponese Koshiro Hatori.

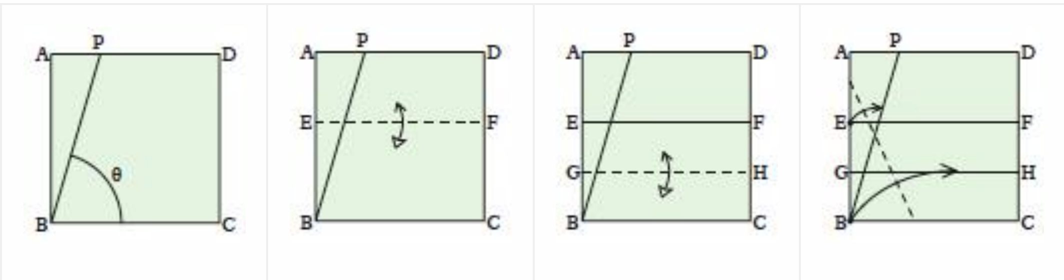
Gli assiomi si basano sulle ipotesi che ogni operazione sia eseguita su un piano, e che tutte le piegature siano in linea retta. Gli assiomi sono i seguenti:

1. Dati due punti P1 e $P_2$, esiste un'unica piegatura che passi per entrambi.
2. Dati due punti $P_1$ e $P_2$, esiste un'unica piegatura che porti $P_1$ su $P_2$.
3. Date due linee rette $r_1$ e $r_2$, esiste sempre una piegatura che porti $r_1$ su $r_2$.
4. Dati un punto P e una retta r, esiste un'unica piegatura perpendicolare a r che passi per il punto P.
5. Dati due punti $P_1$ e $P_2$ e una retta r, se esiste una piegatura passante per $P_2$ che porti $P_1$ su r allora tale piegatura può essere costruita.
6. Dati due puntiP$_1$ e $P_2$ e due rette $r_1$ e $r_2$, se esiste una piegatura che porti $P_1$ su $r_1$ e $P_2$ su $r_2$. allora tale piegatura può essere costruita.
7. Dati un punto P e due rette $r_1$ e $r_2$, esiste sempre una piegatura perpendicolare a $r_2$ che porti P su $r_1$.

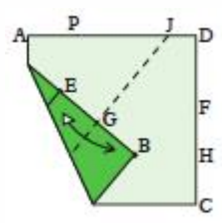
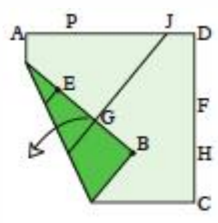
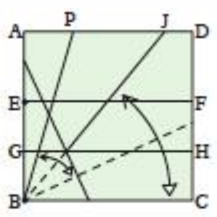
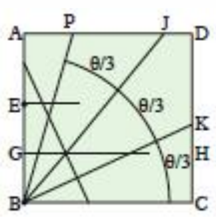
Si può notare che l'assioma (5) può avere zero, una o due soluzioni, mentre l'assioma (6) può averne zero, una, due o tre. In questo modo, le costruzioni geometriche che ne risultano sono più forti delle costruzioni con riga e compasso, dove il numero massimo di soluzioni di un assioma è due. Per questo motivo le costruzioni con riga e compasso possono risolvere al massimo equazioni di secondo grado, mentre le costruzioni per mezzo di origami possono risolvere anche equazioni di terzo grado.

**Trisezione dell'angolo**

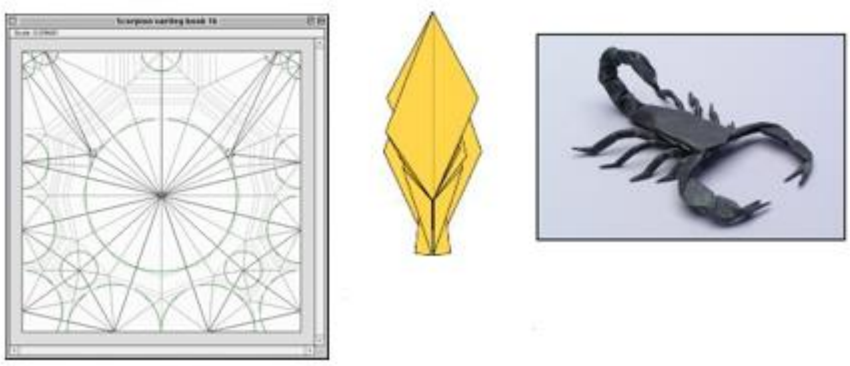
I sette assiomi sono la chiave sia per la trisezione dell'angolo sia per la duplicazione del cubo. Iniziamo con la costruzione dell'angolo. Seguendo le indicazioni descritte di seguito, è possibile vedere come questi semplici assiomi ci permettono di piegare la carta svolgendo un operazione impossibile per Euclide.




| | | | |
|---|---|---|---|
| Disegna l'angolo desiderato PBC in modo | Fai una piega orizzontale in un qualsiasi punto del | Piega la linea BC sulla linea EF e riapri il foglio, creando | Piega l'angolo in basso a sinistra in modo che il |

| | | | |
|---|---|---|---|
| che B sia in un angolo del quadrato. | quadrato, definendo la linea EF. | la linea GH. | punto E tocchi la linea BP e il punto B la linea GH. |
|   |   |   |   |
| Con l’angolo B ancora in alto, piega entrambi gli strati per continuare la piega che finisce in G in modo che continui fino al nuovo punto J. | Riporta B nella posizione iniziale. | Piega lungo la linea che parte da J estendendola fino a B. Piega il lato in basso BC sulla linea BJ e riapro il foglio. | Le due pieghe BJ e BK dividono l’angolo originale PBC in tre parti uguali. |

**Origami computazionali**
Uno dei pionieri degli origami moderni basati sulla Matematica è Robert J. Lang, un matematico americano e artista di origami. Nel 1989, Lang scrisse un articolo per la rivista *Engineering & Science* nel quale si chiedeva se un computer potrà un giorno disegnare un modello per origami superiore a quelli disegnati dagli umani. Era una questione che lo appassionava al punto che, nel 1990, decise di scrivere un software che facesse ciò.



*Da sinistra: pattern realizzato con il software TreeMaker, lo stadio iniziale e il modello finito. Immagine gentilmente concessa da* Robert J. Lang.

Dopo diversi mesi, Lang produsse la prima versione di una parte del software che chiamò *TreeMaker* (poiché le figure di partenza da lui usate somigliavano a degli alberi). Il programma era in grado di convertire un disegno a mano libera, o una figurina, in uno schema dal quale il modello poteva essere piegato.

*prof.ssa Daniela Casale*

In questo ambito, lo schema è una figura geometrica che contiene un lembo per ogni appendice del modello da costruire. Così, una gru con due ali, una coda e una testa è formata da una base con quattro lembi mentre un insetto con sei zampe , una testa e un addome è formato da una base con 8 lembi.

*Serpente a sonagli realizzato da Robert J. Lang*

All'inizio, *TreeMaker* era con le stesse parole di Lang "poco più di una curiosità matematica". Tuttavia, nei successivi 8 anni, con la crescita della sua comprensione dei pattern per gli origami, Lang aggiunse diversi algoritmi al programma. Nel 1998, *TreeMaker* era in grado di costruire l'intero pattern per una gran varietà di origami. Oggi, Lang ha una collezione di migliaia di sculture origami. Anche se molte di queste sono state realizzate senza l'aiuto di *TreeMaker*, alcune delle più complicate sarebbero state impossibili senza esso. Le immagini di queste sue opere le abbiamo usate all'interno di questo articolo.

**Tecnologia origami**

Anche se alcune costruzioni di Lang (e di altri) sono stupefacenti, è facile ridurre gli origami a semplice arte: bella ma non applicabile nel mondo reale. Invece, si scopre con sorpresa che la tecnica degli origami è utilizzata in vari ambiti tecnologici, dai telescopi spaziali agli airbag delle automobili.

*Alce realizzato da Robert J. Lang.*

*Prof.ssa Daniela Casale*

Da quando l'*Hubble Space Telescope* fu lanciato in orbita dallo *space shuttle Discovery* nel 1990, gli scienziati dello spazio hanno lavorato al suo probabile successore. Roderick Hyde del Diffractive Optics Group al Lawrence Livermore National Laboratory in Livermore (California, USA), uno a cui certamente non manca l'ambizione, porta avanti l'idea di costruire un telescopio quaranta volte più grande dell'Hubble. L'Hubble stesso non è proprio piccolo, con i suoi 13 metri di lunghezza e un'apertura di 2,4 metri. Il telescopio che propone Hyde avrebbe un'apertura intorno ai 100 metri e potrebbe raggiungere diverse centinaia di metri di lunghezza.

Immediatamente si è posto il seguente problema logistico: anche se uno strumento simile può essere progettato, come si fa a mandarlo in orbita?

La risposta arriva nel momento in cui ci si rende conto della possibilità di costruire delle lenti ripiegabili che possono essere impacchettate in uno *space shuttle*. La distanza tra i due estremi del telescopio può semplicemente essere ottenuta posizionando in orbita due lenti a un'adeguata distanza, dove una minor forza gravitazionale permette ad essi di rimanere. Vedendo immediatamente il collegamento con la piegatura della carta, il laboratorio ha contattato Robert J. Lang per chiedere un'opinione.

Negli anni successivi, e con l'aiuto di Lang, il team ha costruito un prototipo che si chiama *Eyeglasses* che ha cinque metri di diametro. L'attuale successore di Hubble, il *James Webb Space Telescope,* sarà lanciato nel 2013 e avrà degli specchi che si ripiegano come origami per essere trasportati dal missile.

Un'applicazione più comune, come lo sviluppo degli *airbag* delle automobili, mostra un altro esempio di utilizzo degli origami. Prima che l'airbag si gonfi durante un incidente, esso è piegato in uno spazio ristretto all'interno del volante o del cruscotto. Gli ingegneri hanno disegnato gli airbag modellando il processo di gonfiaggio sul computer. Per farlo, necessitavano di un algoritmo attraverso il quale potevano piegare l'intero airbag.

Usando un algoritmo dal suo software *TreeMakers*, Lang fu in grado di fornire agli ingegneri della German company EASI Engineering una soluzione per un dato problema. Essenzialmente si è trattato di rappresentare un airbag come una serie di poligoni, i cui lati rimangono allineati durante e dopo la piegatura, sistema che può essere ottenuto con un dettagliato pattern di piegatura come quelli usati da Lang per i suoi origami.

*Prof.ssa Daniela Casale*