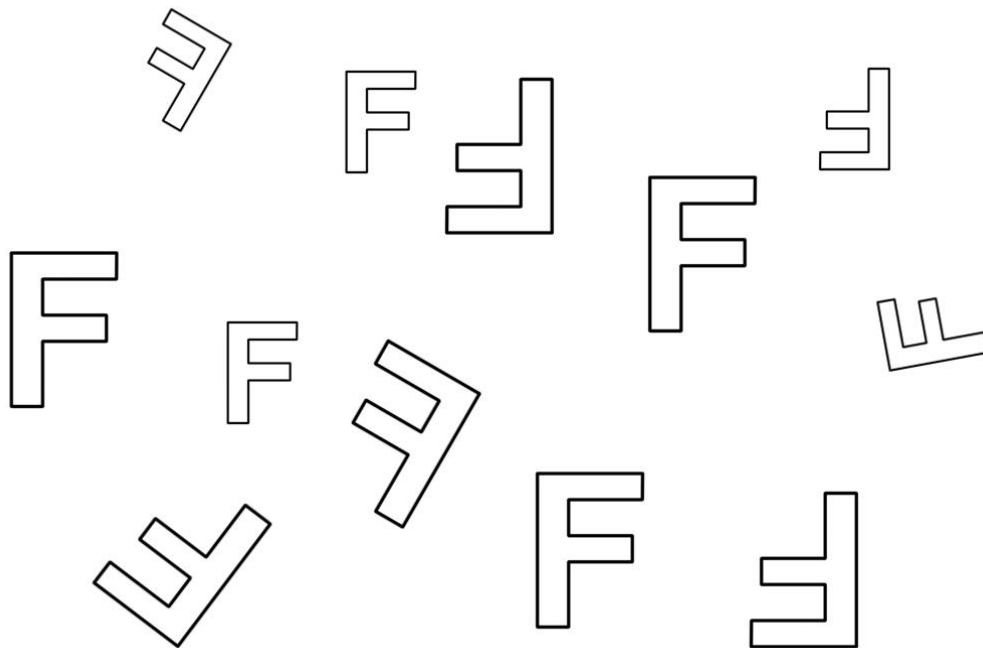


## LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE" LICEO MATEMATICO

### 1. Uguali o diversi?

Cosa vuol dire che due figure sono "uguali"? Come si effettua un'associazione tra due figure che porta a dire che sono uguali? La risposta non è affatto banale.

Quale dei seguenti poligoni sono uguali?



Se ci riflettiamo bene le risposte possono essere molteplici. Vediamone alcune.

1. Possiamo fare una prima distinzione tra poligoni "grandi" e "piccoli". Ci sono quindi due classi di poligoni: la prima comprende 7 poligoni "grandi" e la seconda 5 poligoni "piccoli".
2. Possiamo fare un'altro tipo di distinzione tra poligoni "dritti" e "speculari". Ci sono due classi di poligoni: la prima comprende 10 poligoni "dritti" e la seconda 2 poligoni "speculari".
3. Se consideriamo entrambe le distinzioni precedenti, possiamo dire che ci sono quattro classi di poligoni: la prima comprende 6 poligoni "grandi e dritti", la seconda 4 poligoni "piccoli e dritti", la terza 1 poligono "grande e speculare", la quarta 1 poligono "piccolo e speculare".
4. Possiamo inoltre considerare diversi due poligoni se uno è "girato" rispetto all'altro. Avremo quindi cinque classi composte rispettivamente da 5, 3, 2, 1, 1 poligoni.
5. Se inoltre, al criterio del punto precedente, aggiungiamo la distinzione tra "grande" e "piccolo", avremo sette classicomposte rispettivamente da 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1 poligoni.
6. Se ci interessa solo la forma, allora possiamo considerare uguali tutti i poligoni e avremo quindi una sola classe composta da 12 poligoni.
7. Se consideriamo invece uguali due poligoni se sono costituiti dagli stessi punti, allora avremo ben 12 classi ognuna delle quali è composta da un solo poligono.

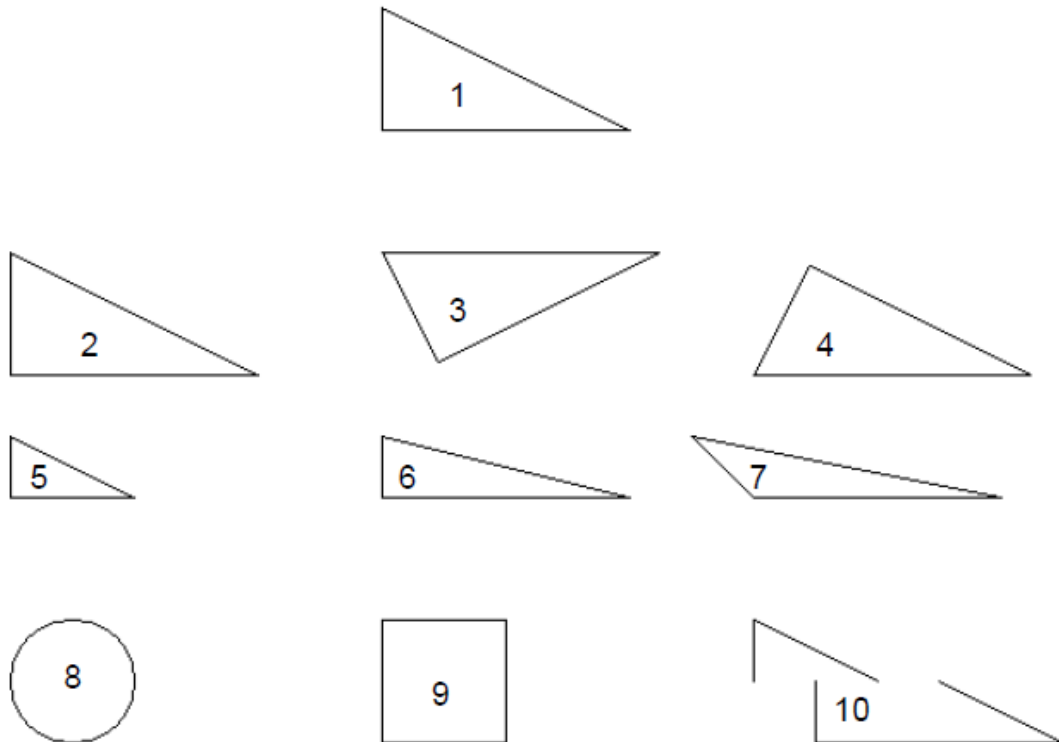
**Osservazioni**

Non abbiamo dato un elenco esaustivo delle possibili risposte. Naturalmente è possibile darne altre che porterebbero ad altre classificazioni.

Inoltre sono stati volutamente utilizzati dei termini poco precisi, che saranno specificati meglio in seguito.

**Proposta di lavoro 1**

Consideriamo le seguenti dieci figure. La figura 10 è formata da due spezzate; quella superiore contiene i suoi estremi mentre quella inferiore non li contiene.



Quali figure possiamo considerare "uguali" alla figura 1? Quante possibili risposte puoi dare? Per ogni risposta specifica la classificazione che hai operato.

**2. Relazione di equivalenza**

Sembra che abbiamo fatto solo una gran confusione! Ma in realtà non è così. Ci sono regole precise. Infatti quando affermiamo che due oggetti sono "uguali" lo sono secondo una precisa relazione di equivalenza.

**Definizione di relazione di equivalenza**

Dato un insieme  $A$ , una relazione  $\mathcal{R}$  si dice di **equivalenza** se è:

- **riflessiva** (ogni elemento è in relazione con se stesso; in simboli  $x\mathcal{R}x$ );
- **simmetrica** (se  $x$  è in relazione con  $y$ , allora anche  $y$  è in relazione con  $x$ ; in simboli, se  $x\mathcal{R}y$ , allora  $y\mathcal{R}x$ );
- **transitiva** (se  $x$  è in relazione con  $y$  e  $y$  è in relazione con  $z$ , anche  $x$  è in relazione con  $z$ ; in simboli, se  $x\mathcal{R}y$  e se  $y\mathcal{R}z$ , allora  $x\mathcal{R}z$ ).

Una relazione d'equivalenza definita su un insieme  $A$  determina su quest'ultimo una **partizione**, cioè una suddivisione di  $A$  in sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti.

I sottoinsiemi della partizione si definiscono **classi di equivalenza**.

L'insieme formato dalle classi di equivalenza si definisce **insieme quoziente** e si indica con  $A/\mathcal{R}$ . Si può definire, ad esempio, attraverso il concetto di relazione d'equivalenza, il **numero razionale assoluto**. Diremo che  $\frac{a}{b} \mathcal{R} \frac{c}{d}$  se e solo se  $ad=bc$ .

Le classi d'equivalenza sono dunque gli insiemi costituiti da tutte le frazioni tra loro equivalenti e si definirà numero razionale assoluto ciascuna classe di equivalenza generata da tale relazione.

Come abbiamo visto nell'esempio, definire una relazione d'equivalenza determina una classificazione. Naturalmente esistono classificazioni anche al di fuori della Matematica.

La classificazione forse più famosa, in ambito scientifico, è stata quella del naturalista svedese **Carlo Linneo** che, alla metà del XVIII secolo, in botanica e in zoologia elaborò un sistema di classificazione basato sulla specie, abbandonando i nomi comuni di piante e animali e sostituendoli con nomi scientifici, poi universalmente riconosciuti, formati da due nomi latini che indicano rispettivamente il genere e la specie (nomenclatura binomia). In tal modo tutti gli animali e le piante conosciute vennero suddivisi in gruppi (classi) in base ad alcune caratteristiche: quelle della specie.

### **Proposta di lavoro 2**

Quali tra le relazioni da te studiate sono da ritenersi d'equivalenza. Motivare la risposta ed indicare i corrispondenti insiemi quoziente.

## **3. Trasformazioni geometriche**

Quando definiamo "uguali" due figure geometriche, stiamo in pratica affermando che è possibile "trasformare" una figura nell'altra.

### **Definizione di trasformazione geometrica**

Si definisce **trasformazione geometrica** una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un altro punto del piano stesso.

In un certo senso fu **Felix Klein**, nel 1872, a portare all'evidenza come si può costruire una buona definizione di "uguaglianza di figure". Lo fece nella relazione in cui, dovendo, come nuovo docente dell'Università di Erlangen, presentare il programma scientifico a cui si sarebbe ispirato per gli anni a venire, riuscì a mettere insieme "i diversi filoni di ricerca allora esistenti in Geometria, creando un sistema da cui emergeva una panoramica di numerosi e nuovi problemi che si prestavano ad ulteriori sviluppi".

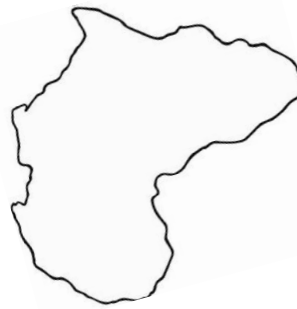
Una tappa fondamentale nella storia della matematica moderna! La chiave per mettere ordine fra i risultati che affollavano i libri di Geometria fu quella di intendere la geometria stessa come lo studio delle proprietà delle figure che non cambiano sotto l'azione di un "gruppo di trasformazioni". Non c'è allora una sola geometria, ma ce ne sono molte: fissare una di queste geometrie significa decidere quali sono le trasformazioni "lecite" con le quali si può passare da una figura data ad un'altra che le sia "uguale", cioè decidere quali sono gli "occhiali" con cui guardare.

***Sulle trasformazioni geometriche torneremo in seguito con maggiori dettagli.***

## 4. Ulteriori proposte di lavoro

### Proposta di lavoro 3

Che cosa rappresenta la figura qui a fianco?



### Proposta di lavoro 4

Fra i numeri naturali esiste una relazione dicendo che  $x$  è in relazione con  $y$  se la differenza tra i due è un numero pari. Si tratta di una relazione d'equivalenza? In caso affermativo determina l'insieme quoziente.

### Proposta di lavoro 5

Fra i numeri naturali esiste una relazione dicendo che  $x$  è in relazione con  $y$  se la differenza tra i due è un numero dispari. Si tratta di una relazione d'equivalenza? In caso affermativo determina l'insieme quoziente.

### Proposta di lavoro 6

Tra le rette del piano definiamo la seguente relazione: la retta  $a$  è in relazione con la retta  $b$  se  $a$  è parallela a  $b$ . Si tratta di una relazione d'equivalenza? In caso affermativo determina l'insieme quoziente. La risposta a questo quesito dipende dalla definizione di rette parallele?

### Proposta di lavoro 7

In Sicilia si utilizza la parola "apparpagno", in muratura, per indicare che due rette sono o parallele oppure perpendicolari. Verificare che la relazione "apparpagno" è una relazione d'equivalenza nell'insieme delle rette del piano.

### Proposta di lavoro 8

Definiamo una relazione tra i poligoni del piano dicendo che due poligoni sono in relazione se hanno lo stesso numero di lati: verificare che è una relazione d'equivalenza.

### Proposta di lavoro 9

Definisci alcune relazioni d'equivalenza (almeno tre diverse tra loro e ognuna di esse diversa da quella proposta nell'esercizio precedente) tra le figure del piano.

### Proposta di lavoro 10

Quali sono le operazioni "lecite" nel gioco del Tetris? Quando, in questo contesto, è sensato dire che due figure sono uguali? Identificate la relazione d'equivalenza sottostante.

## Bibliografia e Sitografia

- **G. Accascina**, *Trasformazioni geometriche nel piano* - Dispense del corso di Didattica della Matematica - SSIS A.A. 2001-2002
- **L. Cateni, C. Bernardi, S. Maracchia**, *Elementi di algebra 1*, Le Monnier.
- **M. Dedò**, *Galleria di metamorfosi*, Mimesis edizioni
- <https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/relazioni/relazioni.pdf>
- <http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=165>