

LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"

LICEO MATEMATICO

1. Introduzione

“Un settore della matematica si chiama geometria, perché questo nome sembra abbastanza adatto, su basi emotive e di tradizione, a un numero abbastanza grande di persone competenti”. Si attribuisce ai matematici **Veblen** e **Whitehead** tale affermazione riguardo la geometria.

Ma che cos'è la geometria? C'è chi la definisce come il primo capitolo della fisica, o chi dice che è linguaggio o chi ne parla come un'arte, come un gioco e c'è chi si rifà semplicemente ad **Euclide**.

E se **Hilbert** affermava che la geometria non è altro che un capitolo della fisica, non si può non ricordare che la geometria euclidea è stata il primo esempio di sistema *ipotetico –deduttivo*, e quindi avrebbe senso dire che la geometria è il primo capitolo della logica.

Ma di geometria si può parlare anche ammirando le opere artistiche di **Gaudì** o di **Escher** oppure semplicemente giocando col Tangram e con i Lego (giochi che contengono tanta geometria ma che non sono la Geometria).

Singolarmente sono tutte affermazioni che ne definiscono un aspetto ma che non catturano in toto la sua natura: si arriva alla comprensione della geometria attraverso tutti questi canali.

Tradizionalmente nella scuola, la geometria viene presentata esclusivamente come modello ipotetico-deduttivo. A conferma di ciò, nel passaggio da scuola media a scuola superiore c'è a volte un cambio terminologico da *geometria intuitiva* a *geometria razionale*.

Ecco che allora si approccia alla geometria in termini rigorosi di *assiomi, postulati, definizioni e proposizioni* coerentemente al modello ipotetico –deduttivo.

È indubbio che le definizioni e le dimostrazioni hanno un ruolo importante e formativo: è necessario però comprenderne il valore ed evitare che si veda solo l'aspetto assiomatico col rischio di subirlo e non saperlo realmente dominare.

2. Cos'è una definizione

Sofferamoci dunque sullo strumento “linguaggio” che è un aspetto importante della matematica. E cerchiamo di farne un uso consapevole.

Quand'è che c'è bisogno di ricorrere alle definizioni? In realtà questo interrogativo ce lo si dovrebbe porre anche in contesti diversi dalla matematica.

Potremmo dire che si ricorre alle definizioni quando ci si vuole intendere in modo chiaro e non ambiguo con gli interlocutori. Quindi ci si mette d'accordo su un linguaggio comune da usare. Questo vale per la comunità dei matematici, come per quella dei chimici come per qualunque comunità che voglia comunicare in modo non ambiguo.

Ad esempio, se si parla di due angoli supplementari, ciascuno di noi sa che ci si riferisce a due angoli la cui somma è 180° .

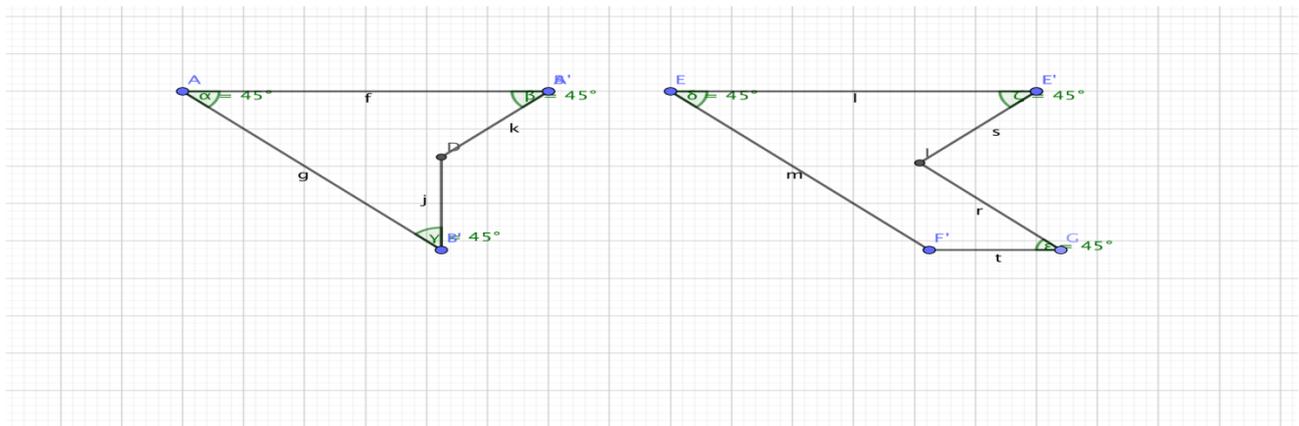
Le definizioni sono opera dell'uomo e quindi si possono inventare e, se ben formulate, avranno sempre una connotazione rigorosa.

Ad esempio, possiamo definire un poligono **Piripicchio** un qualunque poligono avente un angolo retto e due lati congruenti. E si può andare avanti dando delle casistiche più precise a seconda che i lati congruenti siano o meno consecutivi. E possiamo dar loro un nuovo nome e quindi studiare le proprietà di questi nuovi oggetti e le loro relazioni.

La cosa importante è che vengano utilizzate in modo coerente.

Esempio 1) Un poligono si dice **blu** se ha tre angoli consecutivi di 45° . Esiste un triangolo blu? Esiste un quadrilatero blu? Pentagoni blu? Ed esagoni?

Si capisce subito che non esistono triangoli blu. Mentre possono esserci quadrilateri, pentagoni ed esagoni (si provi a disegnarne qualcuno).



Proposta di lavoro 1) Un poligono si dice **rosso** se ha almeno tre lati consecutivi congruenti tra loro.

Esplorare la definizione similmente a quanto riportato nell'esempio 1.

Proposta di lavoro 2) Un poligono si dice **piripacchio** se ogni lato è perpendicolare ad un altro lato del poligono. Esiste un triangolo piripacchio? Esiste un quadrilatero piripacchio? Pentagoni piripacchio? Ed esagoni?

3. Definizioni equivalenti

Ragioniamo un po' su come fornire la definizione di un ente matematico.

Qual è, ad esempio, la definizione di triangolo isoscele?

Un triangolo si dice isoscele se ha:

- a. Due lati congruenti;
- b. Due angoli congruenti;
- c. L'altezza relativa alla base che coincide con la mediana relativa alla base;
- d. L'altezza relativa alla base che coincide con la bisettrice dell'angolo al vertice.

Quella appena riportata è una definizione sovrabbondante, nel senso che ciascuna proprietà enunciata definisce da sola il triangolo isoscele e da essa possono venir dedotte le restanti. Bisogna quindi che si stabilisca ciò che realmente è necessario e sufficiente ed istituirlo come definizione e ciò che da questa possa esser dedotto ed indicarlo come proprietà.

Nel caso del triangolo isoscele, la **a** rappresenta la sua definizione e le **b**, **c**, **d** rappresentano le proprietà.

Se due definizioni sono **equivalenti** significa che individuano lo stesso ente. Se A e B sono due definizioni di un o stesso ente, per mostrarne l'equivalenza si deve mostrare che da A segue B e che da B segue A.

Per mostrare che due definizioni non sono equivalenti, è sufficiente un controesempio, ossia un oggetto che verifichi una delle due definizioni ma non l'altra.

Proposta di lavoro 3) Verificare che le **a** e **b** di cui sopra sono definizioni equivalenti del triangolo isoscele. Verificare poi che **a** è equivalente a **c** e che **a** è equivalente a **d**.

Proposta di lavoro 4

- Dimostrare che un quadrilatero avente i lati opposti paralleli ha anche i lati opposti congruenti viceversa.
- Stabilire se “quadrilatero con i lati a due a due congruenti” può essere una definizione corretta di parallelogramma.
- Stabilire se “quadrilatero con le diagonali tra loro perpendicolari” può essere una definizione corretta di rombo.
- Stabilire se “quadrilatero con le diagonali congruenti e tra loro perpendicolari” può essere una definizione corretta di quadrato.

4. Trapezio o non trapezio

Può capitare che lo stesso ente matematico possa essere definito in modo differente in libri di testo differenti. Ciò non è intrinsecamente un errore, però, una volta scelta la definizione da adottare, si deve esser coerenti con essa.

Ad esempio, in alcuni libri di testo si legge che *un quadrilatero è un trapezio se ha almeno una coppia di lati paralleli*.

Secondo tale definizione i parallelogrammi diventano un caso particolare di trapezio.

Altra definizione conosciuta di trapezio, che è anche quella da noi adottata, è la seguente: *un quadrilatero è un trapezio se ha esattamente una coppia di lati paralleli*.

Sono entrambe definizioni ben poste. Questo non è un unicum della matematica. Importante è che quando si sceglie di usarne una si sia coerenti con la scelta adottata.

Proposta di lavoro 5

Rappresentare con i diagrammi di Elulero-Venn la relazione insiemistica degli insiemi dei quadrilateri. Evidenziare come cambia a seconda della definizione di trapezio adottata.

5. Ancora sul significato di definizione

Per introdurre un linguaggio simbolico e scientifico, dobbiamo già disporre di un linguaggio naturale come l'italiano. Comunque è importante fare una distinzione tra linguaggio naturale e linguaggio matematico. Nel nostro caso si tratta di spiegare nel linguaggio naturale che cosa intendiamo con la parola definizione in *matematica*.

Secondo i vocabolari, una definizione consiste nell'individuare e nell'illustrare le proprietà essenziali di un oggetto, concreto o astratto, che permettano di riconoscerlo fra gli altri oggetti. Pertanto, definire una parola, o un'espressione di più parole, significa determinarne il significato mediante una frase costituita da termini di significato già noto, in modo da individuare le qualità peculiari e distintive di quella parola.

La situazione in matematica è simile: con una definizione si introduce una parola nuova per indicare gli oggetti che godono di determinate proprietà. Per esempio, diciamo che "un numero naturale si chiama primo quando è maggiore di 1 e ammette come divisori solo sé stesso e 1".

Ci sono importanti differenze fra le definizioni di un vocabolario e le definizioni matematiche.

In primo luogo, in matematica è tassativamente proibito un qualunque circolo vizioso: in ogni definizione deve comparire una e una sola parola nuova, quella che, appunto, si sta definendo. Invece, un vocabolario deve riportare tutte le parole che usa: in queste condizioni è inevitabile la presenza di circoli viziosi. In matematica il problema è superato con la presenza dei concetti primitivi, che non esistono in un vocabolario.

Il punto è che mentre la matematica si propone di evitare ogni ambiguità, la situazione in un vocabolario e nella lingua parlata è diversa: anzi, un riferimento incrociato (due parole ciascuna delle quali viene spiegata usando l'altra) può essere utile per cogliere meglio i significati e i contesti d'uso. Per esempio si può provare a cercare sul vocabolario la definizione della parola *definizione*.

Inoltre, una definizione in un vocabolario registra l'uso che viene fatto di una parola, cercando di spiegarne il significato profondo. Una definizione dovrà enucleare i caratteri salienti di questi concetti, fornendo una o più chiavi di lettura. Per esempio la parola teorema ha più significati in un vocabolario.

Invece, una definizione matematica, di per sé, ha solo un carattere convenzionale e non necessariamente rispecchia una situazione esterna (come abbiamo già visto nelle definizioni dei poligoni **blu** e **piripacchio**). Di conseguenza, una definizione matematica è sempre corretta, purché sia corretta la sua struttura nel senso che contenga una sola parola nuova: in un testo di matematica una definizione potrà discostarsi dalla terminologia usuale, oppure essere discutibile e inopportuna sul piano didattico, ma non sarà mai "sbagliata". I discorsi precedenti ai riferiscono alle definizioni matematiche in senso proprio.

Bisogna aggiungere che in ambito scientifico le definizioni non rispondono sempre a criteri così precisi: spesso nelle definizioni in biologia (cellula, ...) si elencano alcune caratteristiche frequenti, mentre in fisica (forza, massa, ...) capita di limitarsi ad una prima descrizione di concetti che saranno poi chiariti dai successivi sviluppi. Anche in matematica, del resto, spesso si introducono nuovi termini (algoritmo, calcolo approssimato, ...) con spiegazioni che, a rigore, non sono vere e proprie definizioni.

Proposta di lavoro 6

Utilizzando il vocabolario e il libro di testo di matematica fare un confronto tra le definizioni di: teorema, triangolo, quadrato, angolo, trapezio.

6. Definizioni e teoremi

Un teorema stabilisce una proprietà e fornisce informazioni, una definizione serve solo per sostituire una nuova parola al posto di una frase più lunga: in quest'ottica, una definizione non è altro che una abbreviazione, che si introduce per comodità linguistica. Eliminando una definizione (cioè dicendo ogni volta, ad esempio, "quadrilatero con i lati uguali e gli angoli uguali" anziché "quadrato"), i vari enunciati perdono in concisione e in chiarezza, ma non nel loro contenuto. Per esempio, invece di enunciare il teorema "le diagonali di un rettangolo sono uguali", potremmo rinunciare alle parole diagonale, rettangolo (e anche angolo retto), ed esprimerci così: "se ciascun angolo di un quadrilatero è uguale al suo adiacente, allora i segmenti che congiungono vertici non consecutivi del quadrilatero sono uguali". La sostanza non è cambiata, ma mentre il primo enunciato è estremamente semplice e diretto, ci vuole una certa attenzione per capire il secondo.

Una definizione serve comunque a fissare l'attenzione su determinati oggetti e quindi, in un certo senso, anticipa il seguito di una trattazione: si introduce la definizione di altezza di un triangolo, perché si sa che questo concetto risulterà utile nel seguito.

Ma una definizione non può essere un punto di partenza per dimostrare qualche cosa.

Indubbiamente, una definizione semplifica, abbrevia e soprattutto chiarisce la forma in cui enunciamo un teorema; ma si tratta solo di ottenere un enunciato più comprensibile, o una dimostrazione più convincente. Le definizioni servono *soltanto* per dare altre definizioni.

È frequente in matematica che un oggetto sia caratterizzato da una proprietà, nel senso che quella proprietà esprime una condizione necessaria e sufficiente. Per esempio, in genere si definisce parallelogramma un quadrilatero con i lati opposti paralleli; poi si dimostra che un quadrilatero (non intrecciato) è un parallelogramma se e solo se ha un centro di simmetria, oppure se e solo se ha gli angoli opposti uguali, ecc. Spesso, in questi casi, la proprietà che caratterizza fornisce una definizione alternativa. Così, ciascuna delle proprietà che esprimono condizioni necessarie e sufficienti perché un quadrilatero sia un parallelogramma può essere assunta come definizione. Nella sostanza, non cambia nulla se definiamo un parallelogramma come un quadrilatero con i lati opposti congruenti e poi dimostriamo che i lati opposti sono anche paralleli.

Proposta di lavoro 7

Provare a dare la definizione di: asse di un segmento, triangolo scaleno, rombo, rettangolo, numero razionale, equazione, incognita, cubo, sfera, tetraedro.

Proposta di lavoro 8

"Si definisce triangolo rettangolo un triangolo in cui la mediana relativa al lato maggiore è congruente alla metà dello stesso". Si tratta di una definizione corretta? Perché?

Proposta di lavoro 9

"Si definisce trapezio isoscele un trapezio con le diagonali congruenti". Si tratta di una definizione corretta? Perché?

Proposta di lavoro 10

Si consideri il seguente teorema: "Ciascun angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti". Riscrivere l'enunciato senza utilizzare l'aggettivo adiacenti.

Proposta di lavoro 11

Si consideri il seguente teorema: "In una circonferenza, l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza". Riscrivere l'enunciato senza utilizzare le parole asse e corda.

Bibliografia

V. Villani, C. Bernardi, S. Zocante, R. Porcaro, *Non solo calcoli* Collana Convergenze - Springer

L. Cannizzaro, M. Menghini,, *Figure geometriche e definizioni* - Battagin PADERNO DEL GRAPPA

G. Caiati, A. Castellano, *Ruota, Trasla e...rifletti*, Mimesis.

M. Dedò, *Alla ricerca della Geometria perduta 1*, Egea- Centro PRISTEM Università Bocconi.