

LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE TERZA

Le coniche secondo Apollonio

1. Premessa

Apollonio, uno dei più grandi geometri del periodo classico, nacque a **Perga**, sotto il regno (dal 246 al 221 a.C.) di *Tolomeo III Emergete*. Le sue doti matematiche gli fanno meritare l'appellativo di "*grande geometra*". Secondo alcune fonti pare abbia soggiornato a lungo ad Alessandria studiando Matematica sotto la guida dei discepoli di *Euclide*.

La vita di Apollonio si sarebbe svolta circa 30 – 40 anni dopo *Archimede*, continuando così con una-due generazioni di distanza, la grande tradizione greca.

La sua opera più importante è *Le Coniche*, cui è stata affidata la sua fama nel tempo. Questa opera era composta da otto libri e contenente quasi 500 teoremi, ma di essi ci sono pervenuti solo i primi sette: i primi quattro sono in versione greca, mentre i restanti tre provengono da una versione araba del IX secolo, poi aggiornata e stampata in latino nel XVII secolo. In tale opera Apollonio non solo riporta risultati già noti, ottenuti dai suoi predecessori, ma aggiunge punti di vista nuovi e determina molte proprietà non note.

Le Coniche, insieme agli Elementi di **Euclide**, è un trattato molto considerato nel seicento ed i suoi risultati vengono ripresi integralmente da **Keplero** per lo studio delle orbite dei pianeti del sistema solare.

La prima edizione latina completa in epoca moderna del testo di Apollonio delle Coniche si deve al grande astronomo inglese **Halley** (1710) e si può comprendere l'interesse, non solo culturale, dell'astronomo, dopo che Keplero aveva posto l'ellisse a fondamento del movimento dei pianeti attorno al Sole.

2. Definizione di coniche secondo Apollonio

Con Apollonio le cose cambiano subito, a partire dalla definizione di cono. Una definizione diversa, come vedremo subito, implica anche un diverso modo di generare le sezioni. Per Apollonio il cono si ottiene (libro I, def. 1) a partire da una circonferenza data (detta "base") e da un punto (non complanare alla circonferenza) dato. Se da questo punto (che viene chiamato "vertice") si traccia una retta che lo congiunga con la circonferenza (e la retta si prolunga da tutte e due le parti rispetto al punto stesso) e, tenendo fisso il punto, si fa muovere la retta lungo la circonferenza, la retta descrive una superficie che viene detta "cono". Si tratta di una superficie composta da due parti (dette "**falde**"), opposte rispetto al vertice. Ciascuna di queste due falde cresce verso l'infinito quando la retta che le

descrive viene prolungata verso l'infinito. L'asse del cono è la retta passante per il vertice e il centro della circonferenza.

Si tratta di una definizione senza dubbio più complicata della precedente, ma ha vari pregi; innanzitutto il cono può essere anche **obliquo** (cioè il suo asse può formare un angolo qualsiasi con il piano di base), si hanno **due falde** (e quindi due rami di iperbole), il cono può essere prolungato verso l'infinito, ma soprattutto si possono ottenere tutti e tre i tipi di sezioni nello stesso cono, variando semplicemente l'inclinazione del piano secante (che non è più costretto, come prima, a essere perpendicolare a un lato del cono).

Apollonio definisce dunque tutti i tipi di coniche come sezioni piane di un cono circolare non necessariamente retto, a doppia falda: ciò che è variabile è l'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono.

La **parabola** si ottiene quando il piano secante è parallelo alle generatrici del cono, l'**ellisse** quando ne interseca una sola falda mentre l'**iperbole** quando ne interseca entrambe le falde.

2.1. Sezioni piane del cono

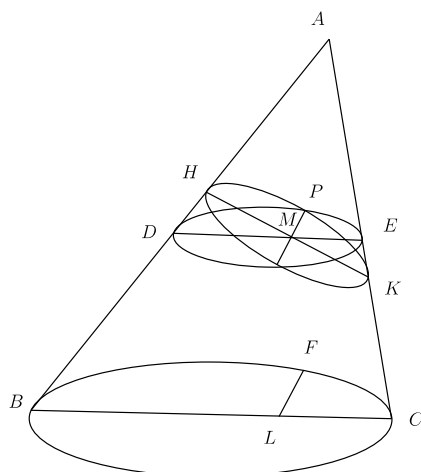
Le prime sezioni che Apollonio prende in esame sono quelle "**banali**", cioè che non sono sezioni coniche propriamente dette.

Ad esempio, la proposizione 3 afferma: "*Se un cono viene tagliato con un piano passante per l'asse, la sezione che si ottiene è un triangolo*". Si tratta di un triangolo fondamentale nel prosieguo della teoria: il "**triangolo per l'asse**".

Inoltre, la proposizione I.4^[1]_{SEP} afferma che "*Tutte le sezioni di un cono parallele alla base sono circonferenze*".

Un risultato meno intuitivo è però quello riportato nella proposizione I.5: "*La sezione subcontraria è una circonferenza*".

Le circonferenze non si ottengono dunque solamente come sezioni con piani paralleli alla base ma anche con quella che viene detta **sezione subcontraria**. Essa viene generata nel seguente modo. Si consideri un piano perpendicolare al piano di base BC e sia ABC il triangolo per l'asse generato da questo piano (figura 2). Si consideri ora un altro piano HK perpendicolare al piano del triangolo ABC che tagli un triangolo AHK simile ad ABC ma posto in senso contrario. Tale sezione del cono viene detta sezione subcontraria.



Coniche, proposizione I.5 **La sezione subcontraria è una circonferenza.**

Dimostrazione. Sia P un qualunque punto dell'intersezione fra la superficie conica e il piano HK (subcontrario) e sia F un qualunque punto sulla circonferenza della circonferenza di base BC.

Si traccino i segmenti PM e FL perpendicolari al piano del triangolo ABC; questi segmenti incontreranno le rette HK e BC in due punti, che chiameremo rispettivamente M e L. I segmenti PM e FL saranno paralleli. Si tracci per il punto M la retta DE, parallela a BC; il piano definito da DME e PM è parallelo alla base del cono.

Di conseguenza (prop. I.4) la sezione DPE che si ottiene sarà un cerchio e il rettangolo costruito su DM e ME ($DM \times ME$) sarà uguale al quadrato costruito su PM (PM^2). (secondo teorema di Euclide).

Ma poiché DE è parallelo a BC, l'angolo è uguale all'angolo ABC, (uguale, per ipotesi, a AKH).

Dunque, nei triangoli HDM e EKM gli angoli HDM e EKM sono uguali, così come gli angoli in M, opposti al vertice. Quindi i triangoli HDM e EKM sono simili; e, per similitudine di triangoli:

$$HM : MD = EM : MK \quad (1)$$

e possiamo scrivere:

$$HM \times MK = DM \times ME = PM^2 \quad (2)$$

Siccome P è un punto qualunque sull'intersezione del piano HK e della superficie conica, la sezione subcontraria sarà una circonferenza, dato che ogni suo punto soddisfa la proprietà (2).

Curiosità

Nelle proposizioni successive (propp. 6–10) Apollonio dimostra che un piano secante il cono che

non passi per il vertice e tale che l'intersezione (EF) fra il piano secante e la base del cono sia perpendicolare alla base del triangolo per l'asse (BC), individua sempre un diametro della sezione (DG), determinato dall'intersezione fra il piano secante e il triangolo per l'asse, e una "direzione delle ordinate" (EF) definita dall'intersezione fra piano secante e piano di base del cono. Il diametro, per definizione (def. 4), è quel segmento che biseca tutte le corde di una curva tracciate parallelamente a una direzione (detta "direzione delle ordinate"). Tale diametro sarà l'**asse** della sezione (ovvero l'angolo che forma con le ordinate sarà retto) se, e solo se, il piano del triangolo per l'asse risulta perpendicolare al piano di base; cosa che si verifica sempre nel caso particolare che il cono sia retto.

Apollonio dimostra inoltre che se la sezione non è né subcontraria né parallela si ottengono tre tipi di curve, diverse dalla circonferenza. Le distingue a seconda che il piano secante:

1. incontri entrambi i lati del triangolo per l'asse nella stessa falda del cono (ellisse);
2. sia parallelo a uno dei lati del triangolo (parabola);
3. incontri entrambi i lati, ma uno in una falda e uno in un'altra (iperbole).

Nel primo caso la curva-sezione che si ottiene sarà limitata, negli altri due prolungabile indefinitamente con il cono.

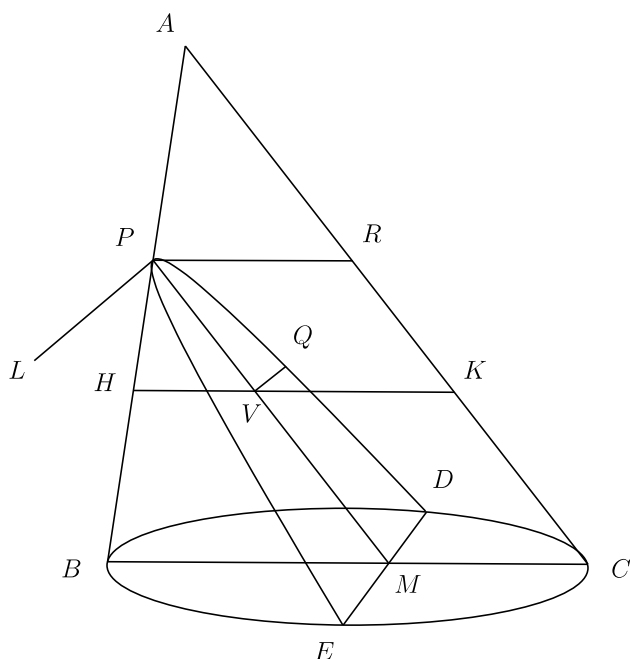
Proposta di lavoro 1: Costruire con Geogebra le coniche banali e non secondo la costruzione di Apollonio, così come indicato nel paragrafo 2.1. Costruire anche le circonferenze come sezioni subcontrarie.

A questo punto Apollonio passa a determinare una proprietà caratteristica delle tre curve suddette.

2.2. La parabola

Il "sintomo" della parabola è descritto nella proposizione I.11:

*"Dato il cono ABC di vertice A e base BC si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati del triangolo per l'asse. Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM. Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che $PL:PA = BC^2:BA \times AC$ allora $QV^2 = PL \times PV$. La sezione così ottenuta si chiama parabola e la retta fissa PL (rispetto alla quale si realizza l'uguaglianza fra il quadrato di una qualsiasi ordinata e il rettangolo costruito sull'ascissa e tale retta fissa) è detta lato **retto** della parabola."*



Dimostrazione: Sia BC il diametro del cerchio di base del cono; DE l'intersezione fra il piano secante e cerchio di base. Sia HK una parallela a BC passante per il punto V. Poiché l'ordinata QV è anche parallela a DE, il piano passante per i tre punti H, Q, K sarà parallelo alla base del cono e lo taglierà in un cerchio di diametro HK.

Inoltre dato che QV è perpendicolare a HK (per l'osservazione 1), ne segue che

$$HV \times VK = QV^2 \quad (4)$$

Inoltre, per similitudine di triangoli:

$$BC:AC = HV:PV \text{ e } BC:AB = VK:PA \text{ Di conseguenza, } BC^2:AC \times AB = HV \times VK:PV \times PA. \quad (5)$$

$$\text{Per (4), inoltre, avremo } HV \times VK:PA \times PV = QV^2:PA \times PV$$

E quindi, per (5) si ha che $BC^2:AC \times AB = QV^2:PA \times PV$. Ma, per come abbiamo definito PL, si ha

$$PL:PA = BC^2:BA \times AC \quad (6)$$

$$\text{quindi } QV^2:PA \times PV = PL:PA.$$

D'altra parte è ovvio che $PL:PA = PL \times PV:PA \times PV$ e quindi si ottiene la tesi: $QV^2 = PL \times PV$.

Proposta di lavoro 2: Costruire la parabola secondo il metodo di Apollonio.

Come corollario si ha la prop. **I.20**:

”Nella parabola i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse; cioè, se Q_1 e Q_2 sono due punti sulla parabola e le rispettive ordinate sono Q_1V_1 e Q_2V_2 , allora:

$$Q_1V_1^2 : Q_2V_2^2 = PV_1 : PV_2.$$

Proposta di lavoro 3: Verificare il corollario (pro I.20)

I nomi di parabola, ellisse e iperbole furono assegnati da Apollonio. Parabola significa “uguale confronto”, ellisse sta per “mancanza” ed iperbole sta per “oltre”.

Cerchiamo di capire perché.

La tesi della proposizione I.1 può essere riformulata nel seguente modo: *il quadrato delle ordinate (QV^2) rispetto a un diametro fissato, è uguale al rettangolo avente come lati un segmento fisso (PL) e l'ascissa (PV) corrispondente all'ordinata QV .*

Questa operazione nella matematica greca veniva detta “applicare” un'area (QV^2) a un segmento dato (PL , detto “lato retto”), ricavando cioè l'altezza di un rettangolo (con base data) equivalente al quadrato iniziale.

Applicare o uguale confronto il cui termine greco è παραβαλλειν.

Dunque, nel caso dell'**ellisse**, l'area del quadrato delle ordinate (QV^2) deve essere uguale a quella di un rettangolo avente come altezza l'ascissa (PV) ma come base un segmento minore del lato retto; mentre, nel caso dell'**iperbole**, la base è un segmento maggiore del lato retto. Quindi, in sintesi, possiamo dire che si tratta di applicazioni di un'area ad un segmento con un difetto o con un eccesso.

Proposta di lavoro 4

Ricavare il **sintomo**, cioè la proprietà che descrive ellisse ed iperbole, come è stato fatto per la parabola, esaminando le tre figure seguenti in modo da descrivere le relazioni di proporzionalità ricavabili in base alla similitudine di adeguati triangoli.

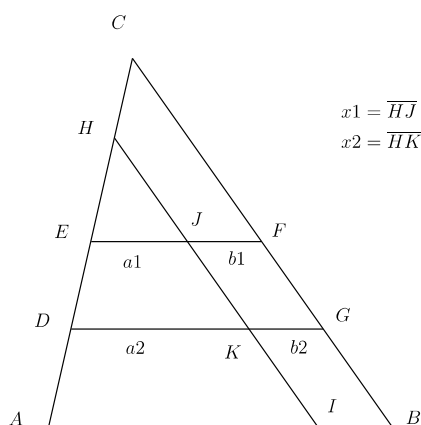


Figura 1 Parabola

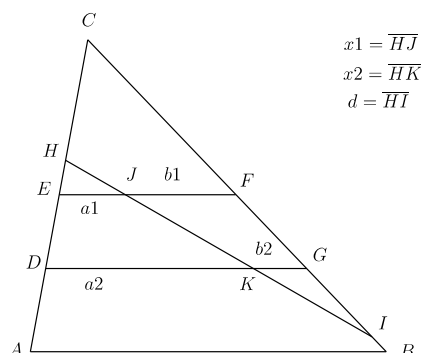


Figura 2 Ellisse

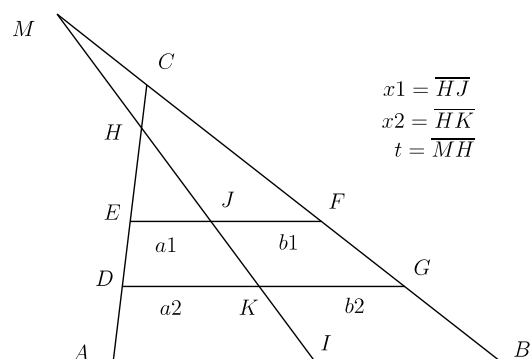


Figura 3 Iperbole

Bibliografia e Sitografia

- **R. Betti**, "Geometria Leggera – *Franco Angeli*
- **R. Bellè, P. D. Napolitani**, Le sezioni coniche dei Greci
- **C. Marchini**, Appunti di Geometria classica A.A. 2005-2006 Capitolo V – L'opera di Apollonio di Perge.
- <http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/coniche.html>
- http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=58&Itemid=160&lang=it
- <http://www.dm.uniba.it/ipertesto/coniche>