

LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE TERZA

Le trasformazioni affini nel piano

Le matrici del secondo ordine

1. Matrici del secondo ordine e trasformazioni nel piano

Soffermiamoci sulle matrici del secondo ordine.

Si consideri la trasformazione affine, che lascia invariata l'origine:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Il trasformato $P'(x'; y')$ di un qualunque punto del piano $P(x; y)$ si può ottenere mediante la seguente moltiplicazione di matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Questa rappresenta la **forma matriciale** della trasformazione geometrica.

Al variare dei coefficienti si ottengono tutte le affinità del piano che lasciano come punto unito l'origine. Si comprende che tale affinità è individuata univocamente dalla matrice dei coefficienti:

$$\mathcal{M}_A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Def. 1: Una trasformazione si dice **diretta** se il determinante della matrice è positivo, altrimenti si parla di trasformazione **invertente**.

Di particolare importanza sono i vettori **unitari** degli assi del sistema di riferimento, $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si effettui una trasformazione affine che lascia fissa

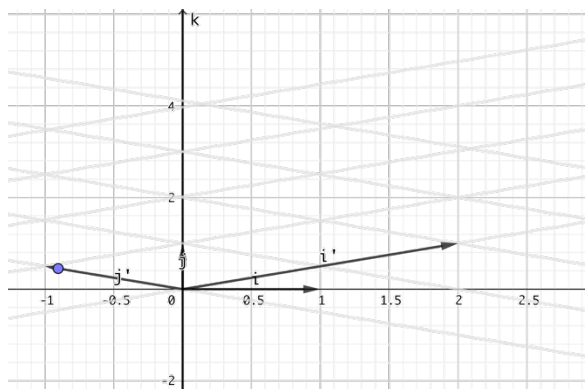
l'origine, di matrice $\mathcal{M}_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calcoliamo ora

i trasformati $i' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$$j' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque al reticolato "a quadretti" corrisponde il reticolato "a parallelogrammi" definito dai due vettori

i' e j' . Ecco che il piano di partenza è stato modificato e così sarà per le figure disegnate su di esso.



Si comprende meglio che, affinché $\mathcal{M}_A$ sia una trasformazione affine, deve essere $\det(\mathcal{M}_A) \neq 0$. Tale determinante, come già detto nella scheda 6, rappresenta il rapporto dell'area col segno del parallelogramma del nuovo reticolo con il quadrato unitario del reticolo del piano cartesiano originario.

Proposta di lavoro 1

Con l'ausilio di geogebra disegnare il reticolato individuato da $i' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $j' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tracciare poi i punti A(1;1), B(2;1) e C(-1;2) ed i relativi trasformati.

Proposta di lavoro 2

Riscrivere in forma matriciale la seguente trasformazione affine:

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 2y \end{cases}$$

Determinare poi il trasformato del triangolo di vertici A(1;-1), B(3;0) e C(1;4).

Svolgere la proposta anche mediante l'ausilio di GEOGEBRA, evidenziando il nuovo reticolato del piano.

Proposta di lavoro 3

Determinare la trasformazione affine, che lascia invariata l'origine, che trasforma i punti A(2;1), B(5;2) e C(3;8) nei punti A'(3;1), B'(7;3) e C'(11;-5).

Determinata la matrice, verificare con GEOGEBRA che i punti A', B' e C' siano i trasformati di A, B e C.

1.1. Casi particolari

Nel caso in cui il determinante sia **nullo** si può interpretare geometricamente nel seguente modo:

- se la matrice ha una riga nulla allora sia i' che j' hanno una stessa componente nulla, essi sono paralleli quindi il parallelogramma ha area nulla.
- Se invece è la colonna ad essere nulla allora uno dei due vettori i' , j' è nullo e anche in questo caso l'area del parallelogramma è nulla.
- Infine, se le righe (colonne) son proporzionali i due vettori i' , j' lo sono e sono dunque paralleli. Anche in questo caso il parallelogramma ha area nulla.

Se $\mathcal{M}_A$ rappresenta un'isometria allora, l'area è un'invariante, pertanto il determinante deve essere necessariamente:

- +1 isometria diretta
- -1 isometria invertente.

Non è necessariamente vero il viceversa: si potrebbe cioè avere una matrice con determinante pari a ± 1 ma che non sia un'isometria. Ad esempio il quadrato unitario del reticolo del piano cartesiano potrebbe trasformarsi in un parallelogramma la cui area in modulo è pari ad 1. In tal caso si manterrebbero solo le misure delle aree ma non quelle dei lati e degli angoli.

Esempio: La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ individua un'affinità **equivalente** che non è un'isometria.

Proposta di lavoro 4

Verificare con geogebra l'esempio sopra riportato.

Proposta di lavoro 5

Individuare le matrici delle seguenti trasformazioni affini:

identità.	simmetria rispetto all'asse delle ascisse.
simmetria rispetto alla prima bisettrice.	simmetria rispetto all'asse delle ordinate.
simmetria rispetto alla seconda bisettrice.	omotetia di centro origine e rapporto k .
trasformazione affine che lascia invariate le ascisse e moltiplica per k le ordinate.	

1.2. Matrici inverse e trasformazioni invertibili

Teorema 4: Se una matrice del secondo ordine è regolare allora esiste l'inversa e si ottiene dalla data scambiando tra loro gli elementi della diagonale principale, cambiando di segno a quelli della diagonale secondaria e dividendo ciascun elemento per il determinante della matrice, cioè:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Delta = a \cdot d - b \cdot c.$$

Proposta di lavoro 6

Dimostrare il teorema sopra riportato.

Proposta di lavoro 7

Applicare il teorema alle matrici seguenti: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ anche con GEOGEBRA.

Proposta di lavoro 8

Data la trasformazione $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = -x + y \end{cases}$ individuarne la sua inversa, anche con GEOGEBRA.

1.3. Composizione di affinità con le matrici

La composizione di due affinità è un'affinità avente come matrice il prodotto delle matrici. Attenzione perché il prodotto tra matrici in genere non è commutativo.

Proposta di lavoro 9

Si considerino le matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di cui alla proposta 5. Effettuarne la composizione e la relativa rappresentazione su GEOGEBRA.

Bibliografia

- **L.Mancini Proia, M. Menghini**, Le affinità ovunque: le matrici e le loro applicazioni nelle scienze, *La Sapienza. Istituto Castelnuovo*, 1984.
- **Castelnuovo/Gori, Giorgi/Valenti**, Matematica oggi vol 2 – *La Nuova Italia*.
- **W Maraschini, M. Palma, Format**, SPE, vol 1- *Paravia*.
- **L. Sasso, C. Zanone**, Colori della Matematica edizione BLU - Volume 2, *Petrini editore*.