LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE TERZA

Le matrici

1. Premessa

La **matrice** è una semplice tabella di numeri con un certo numero *n* di righe e *m* di colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Se *m*=*n* la matrice si dice **quadrata**, altrimenti si parla di matrice **rettangolare**.
Si deve al matematico **Cayley** ((*Richmond upon Thames, 16 agosto 1821 – Cambridge, 26 gennaio 1895*) la notazione e lo studio delle matrici come trasformazioni e come oggetti matematici su e con cui operare.

In una matrice quadrata gli elementi a_{ij} per i quali i=j si dicono appartenenti alla *diagonale principale* della matrice.
Si chiama **trasposta** di una matrice A la matrice, indicata con il simbolo A^T, che ha come colonne le righe di A e come righe le colonne di A.

Si definisce **matrice nulla** la matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0.

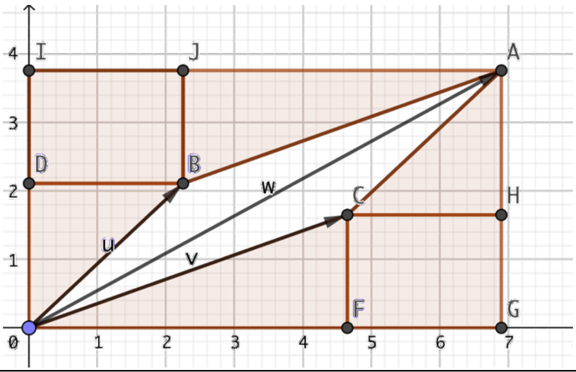
2. Determinante di una matrice quadrata

2.1. Determinante di una matrice quadrata 2x2

Come già sappiamo il determinante di una matrice quadrata $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di ordine 2 si calcola nel seguente modo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

Vediamo come si interpreta geometricamente questo risultato. Siano $\vec{v}(a;b)$ e $\vec{u}(c;d)$ due vettori del piano cartesiano.



L'area del parallelogramma si può ottenere sottraendo dall'area del rettangolo OIAG le aree dei due triangoli congruenti ACH e ODB, le aree dei due triangoli congruenti OCF e BJA e, infine, le aree dei due rettangoli congruenti IDJB e CFGH; dunque risulta che l'area complessiva del parallelogramma è:

$$(a+c)\cdot(b+d) - 2\left(\frac{c\cdot d}{2}\right) - 2\left(\frac{a\cdot b}{2}\right) - 2(c\cdot b)$$

che è esattamente il valore assoluto del determinante di $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposta di lavoro 1
Dimostrare e verificare analiticamente quanto sopra esposto.

Teorema 1: Il determinante di una matrice quadrata **2**x**2** vale 0 **se e solo se** vale uno dei seguenti casi:
- Sono uguali a 0 tutti gli elementi di una riga o di una colonna
- Gli elementi delle due righe sono proporzionali.

Dim: Sia uguale a 0 il determinante della matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora segue che *ad=bc. Si hanno allora due possibilità:*
- *ad=bc=0* e allora sono uguali a zero o una riga o una colonna;
- *ad=bc* $\neq 0$ e allora le due righe sono proporzionali in quanto si ha che $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (le due righe sono proporzionali) e anche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (le due colonne sono proporzionali).
-

Proposta di lavoro 2
Dimostrare il viceversa del teorema sopra riportato.

2.2. Determinante di una matrice quadrata 3x3

Calcoliamo ora il determinante di una matrice quadrata di ordine **3**.
Per estendere la nozione di determinante alle matrici quadrate $n \times n$, dobbiamo premettere due definizioni.
- Si chiama **minore complementare di un elemento a_{ij}** di una matrice $\mathcal{A}$, e si indica con M_{ij}, **il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga *i* e la colonna *j* dalla matrice $\mathcal{A}$**.

Si chiama **complemento algebrico di un elemento a_{ij}** o **cofattore di a_{ij}** di una matrice $\mathcal{A}$, e si indica con $\mathcal{A}_{ij}$, il numero così definito: $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$ dove M_{ij} indica il minore complementare di a_{ij}.

quindi il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} è uguale al minore complementare se $i+j$ è pari, mentre è uguale al suo opposto se $i+j$ è dispari.

Fatte queste premesse, possiamo introdurre la seguente definizione.

Def.**1**: Il **determinante per una generica matrice $n \times n$ è** il numero che si ottiene moltiplicando ciascun elemento di una riga (o di una colonna) della matrice per il rispettivo complemento algebrico e sommando i prodotti ottenuti.

Esempio
Si calcoli il determinante della seguente matrice:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante secondo la prima riga, perché essa contiene uno zero.
Si ha:
$\det(\mathcal{A})=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2\cdot(-3+1)=-1-4=-5.$

La definizione data è ben posta, nel senso che si potrebbe dimostrare che il determinante non dipende dalla particolare riga o colonna scelta: ciò fa sì che nella pratica, per calcolare un determinante, convenga scegliere la riga o la colonna che contiene più zeri. Alcune proprietà che possono essere utili per rendere più veloci il calcolo di un determinante sono espresse nel seguente teorema.

Def.2: Una matrice si dice **regolare** se il suo determinante è diverso da zero.

Teorema 2: Sia $\mathcal{A}$ una matrice quadrata; allora valgono le seguenti proprietà.

- Se $\mathcal{A}$ ha una riga o una colonna di zeri, $\det(\mathcal{A})=0$.
- Se $\mathcal{A}$ ha due righe o due colonne uguali, allora $\det(\mathcal{A})=0$.
- Se a una riga (colonna) si aggiunge una qualunque altra riga (colonna), eventualmente moltiplicata per un numero, il determinante non cambia.
- Se si scambiano due righe (o due colonne), il determinante cambia segno.
- Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga (colonna) per un numero k, anche il determinante risulta moltiplicato per k.

L'interpretazione geometrica del determinante di una matrice di ordine **2** può essere estesa al caso tridimensionale: il parallelepipedo individuato dai tre vettori $\vec{v}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{u}(x_2;y_2;z_2)$, e $\vec{w}(x_3;y_3;z_3)$, ha volume che si può dimostrare essere espresso dal valore assoluto del determinante:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Proposta di lavoro 3
Verificare quanto sopra esposto considerando il determinante di una matrice di ordine 3.

Proposta di lavoro 4
Calcolare il determinante della matrice $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$ e della sua trasposta. Cosa si osserva?

3. Le operazioni tra matrici

3.1. La somma tra matrici

Date due matrici A e B dello stesso tipo $m \times n$, si definisce **matrice somma** di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ la matrice (del medesimo tipo) che ha come elementi le somme degli elementi di uguale posto delle matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Data una matrice, si definisce **prodotto tra la matrice data e un numero reale *k*** la matrice ottenuta moltiplicando per quel numero ogni elemento della matrice data. In tal caso il prodotto è commutativo.

Proposta di lavoro 5

Interpretare geometricamente la moltiplicazione di uno scalare per un vettore: $k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e la somma di due vettori: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Proposta di lavoro 6

Date le due matrici $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinare le matrici $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ e $3\mathcal{A} - 2\mathcal{B}$.

3.2. Il prodotto tra matrici

L'operazione di moltiplicazione tra matrici non si definisce per matrici qualsiasi ma per una coppia di matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che il numero delle colonne di $\mathcal{A}$ sia uguale al numero delle righe di $\mathcal{B}$.

Sia $\mathcal{A}$ una matrice $n \times k$ e $\mathcal{B}$ una matrice $k \times m$. Il prodotto $C = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ delle due matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è la matrice $n \times m$ il cui generico elemento $\mathbf{c_{ij}}$ è così ottenuto:

si moltiplica ciascun elemento della riga *i* della matrice $\mathcal{A}$ per l'elemento di uguale posto della colonna *j* della matrice $\mathcal{B}$ e si sommano i prodotti ottenuti.

L'operazione di moltiplicazione tra matrici è definita dunque solo tra due matrici tali che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda.
Si dimostra che il prodotto tra matrici in generale non è un'operazione commutativa.

Proposta di lavoro 7

- Moltiplicare le seguenti due matrici: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

  Verificare poi che $A \cdot B \not\equiv B \cdot A$.

- Moltiplicare le seguenti due matrici: $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- Moltiplicare le seguenti due matrici $\mathcal{E}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{F}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: dedurre dal risultato quale legge non vale nel prodotto tra matrici.
- Verificare mediante GEOGEBRA quanto sopra calcolato.

In realtà si può dimostrare il seguente fondamentale teorema:

Teorema 3: (di Binet) Il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei due determinanti.

3.3. Matrice inversa

Una matrice quadrata $\mathcal{A}$ si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata $\mathcal{B}$ dello stesso ordine, detta inversa di $\mathcal{A}$, tale che $\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{A} = \mathcal{I}$, essendo I la **matrice unitaria o identità**, cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria appartiene alle matrici **diagonali,** cosi dette perché hanno tutti gli elementi nulli eccettuati quelli sulla diagonale principale.

Teorema 4: Una matrice $\mathcal{A}$ di ordine *n* è invertibile se e solo se è regolare, cioè il suo determinante è diverso da zero.
In tal caso sussiste la seguente relazione:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{C^T} \ ,$$

dove $\mathcal{A}^{-1}$ indica la **matrice inversa** di $\mathcal{A}$ e C^{T} indica la **trasposta** della matrice *C* i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi della matrice $\mathcal{A}$.

Esempio

Determinare la matrice inversa di $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la matrice *C* costituita dai cofattori degli elementi della matrice $\mathcal{A}$.

$$c_{11} = 1 \cdot (0-1) = -1;\ c_{12} = -1 \cdot (0+1) = -1;\ c_{13} = 1 \cdot (2-0) = 2$$

$$c_{21} = -1 \cdot (0) = 0;\ c_{22} = 1 \cdot (0) = 0;\ c_{23} = -1 \cdot (-1-2) = 3$$

$$c_{31} = 1 \cdot (-2-0) = -2;\ c_{32} = -1 \cdot (0+1) = -1;\ c_{33} = 1 \cdot (2-0) = 0.$$

Da cui si ha $C=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, quindi $C^T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ne segue che $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,(A)} \cdot \boldsymbol{C^T} =$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Proposta di lavoro 8

Verificare che, per quanto riguarda la matrice dell'esempio precedente, si ha $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\,\mathcal{A} = \mathcal{I}$

Proposta di lavoro 9

Determinare la matrice inversa di $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Verificarne il risultato mediante Geogebra.

Bibliografia

- **L.Mancini Proia, M. Menghini**, Le affinità ovunque: le matrici e le loro applicazioni nelle scienze, *La Sapienza. Istituto Castelnuovo, 1984.*
- **Castelnuovo/Gori, Giorgi/Valenti**, Matematica oggi *vol* 2 – *La Nuova Italia.*
- **W Maraschini, M. Palma, Format,** SPE, vol 1- *Paravia.*
- **L. Sasso, C. Zanone,** Colori della Matematica edizione BLU - Volume 2, *Petrini editore.*