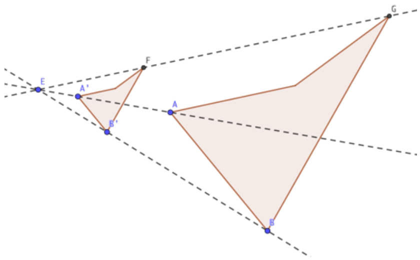
LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE TERZA

Le trasformazioni affini nel piano

1. Premessa



L'affinità è una corrispondenza biunivoca tra due piani o tra punti dello stesso piano che trasforma rette in rette, conservando il parallelismo.

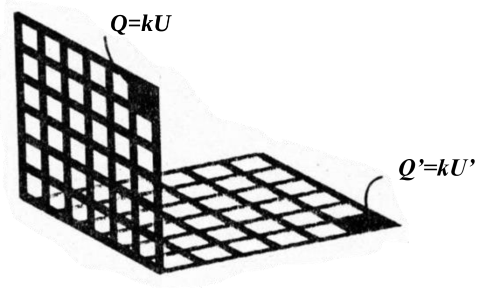
Si pensi alla trasformazione di una figura data dai raggi del sole. Se osservassimo l'ombra di un telaio esposto al Sole per tutto il giorno, potremmo notare che l'ombra è sempre un parallelogramma.

Questo perché, essendo il sole abbastanza distante dalla Terra, i suoi raggi si possono considerare paralleli; tali fasci passando sul telaio formeranno dei piani paralleli e, pertanto, le ombre delle astine parallele saranno a loro volta parallele.

Attenzione, se si prova a replicare l'esperimento a casa con una lampada, questa cosa non è più vera: <u>la fonte di luce in questo caso è troppo vicina e dunque non si ha una trasformazione affine</u>. In tal caso si parla di **trasformazione proiettiva o proiettività**.

Siano **Q** e **Q'** rispettivamente le aree del quadrato e della sua ombra, con $Q = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U}$ e' $Q' = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U'}$ Allora si può notare subito che i rapporti $\frac{Q}{U}$ e $\frac{Q'}{U'}$ sono costanti in quanto entrambi uguali a $\boldsymbol{k}$.

Ciò accade anche se sul telaio, con un certo numero di triangoli di area T, si traccia un poligono qualunque, rimarrà sempre invariato il rapporto tra $\frac{Q}{T}$ e $\frac{Q'}{T'}$.



L'osservazione porta a concludere che la trasformazione affine mantiene costante il rapporto tra le aree tra figure corrispondenti.

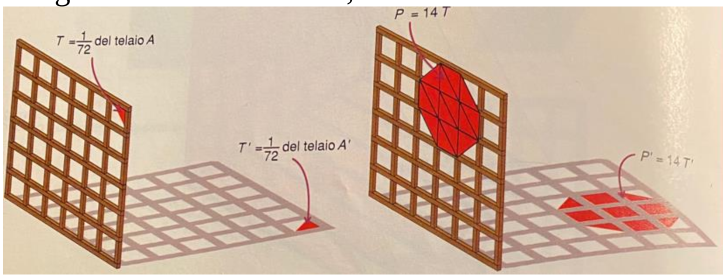
Si noti però che il rapporto tra segmenti corrispondenti non è costante. Infatti, il rapporto dei lati del quadrato ***U*** è pari ad 1 mentre il rapporto tra i lati del corrispondente parallelogramma ***U'*** non sempre è uguale ad 1

In sintesi, le proprietà invarianti per una trasformazione affine, sono le seguenti:

- Parallelismo e incidenza tra coppie di rette;
- Rapporti tra aree;
- Rapporti tra segmenti paralleli (e quindi anche tra segmenti che giacciono sulla stessa retta).

Proposta di lavoro 1

Si consideri il sopra detto telaio quadrato di lato assegnato e si costruiscano, con un certo numero di triangoli di area T, tre poligoni di numero di lati differenti. Verificare che resta sempre invariato il rapporto tra $\frac{Q}{T}$ e $\frac{Q'}{T'}$, dove **Q** e **Q'** rappresentano rispettivamente le aree del quadrato e della sua ombra.



Proposta di lavoro 2

Individuare quali tra i seguenti sono invarianti per l'affinità:

- Allineamento tra punti;
- misure di segmenti;
- ampiezze di angoli;
- direzioni;
- parallelismo;
- l'essere punto medio;
- l'essere il baricentro di un triangolo.

2. Equazioni di un'affinità

Comunque assegnate due terne di punti non allineati, esiste una ed una sola affinità che manda una terna nell'altra.

Per ogni punto e relativa immagine si impostano due equazioni, una per ciascuna coordinata. In totale **6**, quanti sono i coefficienti.

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

con $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, dove $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$

Osserviamo che, se il discriminante della matrice della trasformazione è diverso da zero, per il **teorema di Cramer**, il sistema ammette *un'unica soluzione*, quindi **ad ogni punto P associa univocamente il suo trasformato P'.**

Un'affinità si può pensare la composta di due successive trasformazioni:

- Un'affinità che lascia fissa l'origine

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + by \\ \bar{y} = cx + dy \end{cases}$$

- Una traslazione del punto P(x';y')

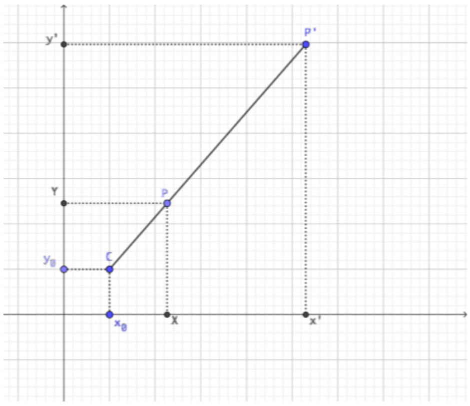
$$\begin{cases} x'' = x' + p \\ y'' = y' + q \end{cases}$$

Proposta di lavoro 3
Verificare analiticamente quanto stabilito nella **proposta 2.**

3. La similitudine

E' una particolare affinità che **<u>conserva anche gli angoli e i rapporti tra segmenti</u>** (<u>anche tra quelli non paralleli</u>).

Quindi trasforma:
- Rette perpendicolari in rette perpendicolari;
- Circonferenze in circonferenze;
- Triangoli simili in triangoli simili.



Una similitudine particolare è **l'omotetia**

Per il teorema di Talete, si ha:

$\boldsymbol{x' - x_0 = a(x - x_0)}$ e $\boldsymbol{y' - y_0 = a(y - y_0)}$

da cui ne segue che $\boldsymbol{\omega_{C,a}} = \begin{cases} \boldsymbol{x' = a(x - x_0) + x_0} \\ \boldsymbol{y' = a(y - y_0) + y_0} \end{cases}$

e quindi, in generale, $\boldsymbol{\omega_{C,a}} = \begin{cases} \boldsymbol{x' = ax + h} \\ \boldsymbol{y' = ay + k} \end{cases}$

Le similitudini si ottengono componendo un'isometria e un'omotetia.

Si dimostra che un'affinità è una **similitudine** se e solo se:

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ e $a \cdot b + c \cdot d = 0$ $(Affermazione\ \boldsymbol{A})$

che equivale a
$c = -b \wedge d = a$ oppure a $c = b \wedge d = -a$ $(Affermazione\ \boldsymbol{B})$

Le similitudini del piano sono dunque affinità aventi equazioni del tipo:

$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = -bx + ay + q \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases}$

con $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$, oppure $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$.

Il valore $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ si chiama **rapporto di similitudine.**

Proposta di lavoro 4
Dimostrare che l'affermazione $\boldsymbol{A}$ è vera sse è vera l'affermazione $\boldsymbol{B}$**.**

Proposta di lavoro 5
In una similitudine di rapporto k il rapporto tra i perimetri di figure corrispondenti è k, Il rapporto tra le aree di figure corrispondenti è k^2.

4. Le isometrie

Le isometrie sono particolari similitudini di **rapporto k=1**. Si dividono in:

- ***dirette***: *rotazioni* e *traslazioni*
- **indirette**: riflessioni e glisso-riflessioni.

Proposta di lavoro 6
Individuare la legge analitica delle seguenti isometrie: traslazione, riflessione rispetto assi cartesiani e rispetto alle bisettrici (I e III quadrante, II e IV quadrante) e verificare che il rapporto **k** sia uguale ad 1.

Bibliografia e Sitografia

- **Castelnuovo/Gori, Giorgi/Valenti**, Matematica oggi vol 2 – *La Nuova Italia*
- **W Maraschini, M. Palma, Format,** SPE, vol 1- *Paravia*
- **Mathesis**, Incontri Mathesis 1990***, Sezione PELIGNA*** *-Sulmona*