

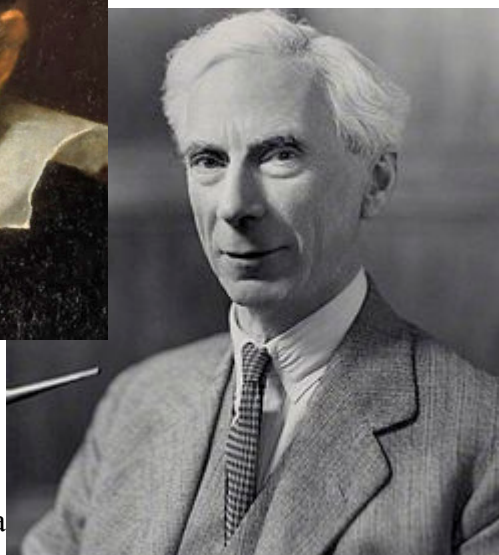
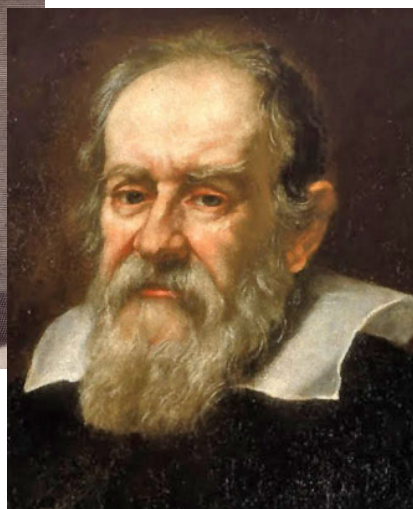
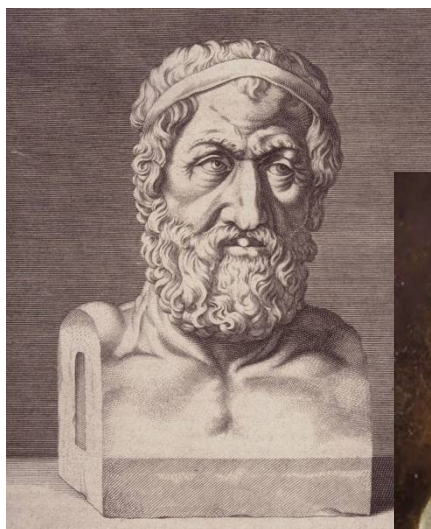


Istituto Statale 'Biagio Pascal'
Istituto Tecnico Tecnologico – Liceo Scientifico
Via Brembio,97- 00188 - Via dei Robilant,2 - 00194 – Roma
Centralino: 06-12112-4205 via Brembio - 06-12112-4225 Via dei Robilant
Codice meccanografico RMTF330002 C.F. 97046890584 Web: www.pascalroma.edu.it
Email: RMTF330002@istruzione.it Pec: RMTF330002@pec.istruzione.it

Liceo Matematico

U.D. 8

Paradossi. Dimostrazioni per assurdo e dimostrazioni assurde



Prof.ssa Giuseppe Bentivenga, prof.ssa Marina

L'obiettivo generale del percorso didattico è quello di contribuire a comprendere il nesso tra la cultura scientifica e la filosofia e di favorire una formazione culturale equilibrata tra il sapere matematico-scientifico e quello storico-filosofico. In particolare in questa unità didattica i paradossi di Zenone contro il movimento saranno utilizzati per introdurre le problematiche derivanti dalla divisibilità all'infinito e per abituare gli studenti alla dimostrazione per assurdo.

Obiettivi formativi

- Potenziare le capacità di analisi, di sintesi e rafforzare le capacità di giudizio critico
- Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico
- Correttezza nel ragionamento
- costruzioni geometriche

Obiettivi didattici

- Acquisire gli elementi fondamentali del pensiero di Zenone
- Conoscere analiticamente la struttura logica dei paradossi zenoniani
- Saper dimostrare il nesso tra i paradossi di Zenone e il pensiero di Parmenide
- Conoscere e saper usare il lessico specifico e i concetti-chiave del filosofo trattato
- Saper esporre in modo appropriato ed argomentato le dimostrazioni zenoniane
- Saper scrivere in forma simbolica proprietà geometriche
- Saper verificare con una costruzione geometrica una dimostrazione
- Saper verificare una costruzione geometrica con la dimostrazione
- Saper ripetere semplici dimostrazioni
-

Prerequisiti

- Prodotti notevoli. Raccoglimento a fattor comune.
- Conoscenza di figure piane: triangolo, parallelogramma, quadrato, circonferenza, proprietà del punto medio, della perpendicolare

Materiale

Riga e compasso

Dimostrazioni prese da Le Scienze n. 50 ottobre 1972 pg 100

Esperienza

- I paradossi contro il movimento di Zenone di Elea
- Paradossi e antinomie (paradosso del mentitore, paradossi di Galileo, antinomia di Russell e paradosso del barbiere, Grand Hotel di Hilbert)
- Giochiamo un po'. Caccia all'errore.
- Paradossi geometrici

Verifica

- Ripetere semplici dimostrazioni

Tempi: 6 ore

1. I paradossi contro il movimento di Zenone di Elea

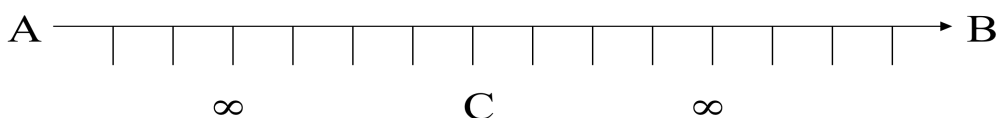
Nella prima parte della lezione sarà introdotto brevemente il pensiero di Parmenide e saranno spiegate in particolare le argomentazioni logiche che portano il Filosofo di Elea a sostenere che l'Essere vero è immobile e unico. Successivamente saranno presentati i quattro paradossi di Zenone (discepolo di Parmenide) contro il movimento, tralasciando quelli diretti contro la molteplicità.

Zenone, infatti, elabora i suoi famosi paradossi come una sorta di "difesa" delle tesi del Maestro. Gli avversari di Parmenide criticavano l'unicità e l'immobilità dell'Essere parmenideo poiché tali caratteristiche contraddicevano il senso comune e la realtà percepita con i sensi. Zenone si propone di difendere il pensiero di Parmenide dimostrando che se si accettano le tesi contrarie a quelle eleatiche, per esempio l'esistenza del movimento e della molteplicità, si giunge a conclusioni assurde.

Questo metodo confutatorio basato sulla dimostrazione per assurdo è noto come dialettica e consiste nell'ammettere come vera, in via di ipotesi, la tesi che si intende confutare, per ricavarne, poi, conclusioni logiche assurde che ne dimostrino la falsità. Zenone, quindi, accetta le tesi degli avversari di Parmenide, ovvero la molteplicità dell'Essere e l'esistenza del movimento, per dimostrarne l'assurdità e confermare quindi indirettamente l'unicità e l'immobilità dell'Essere.

Il paradosso della dicotomia

Se si ammette l'esistenza del movimento e l'infinita divisibilità dello spazio si giunge a conclusioni assurde.

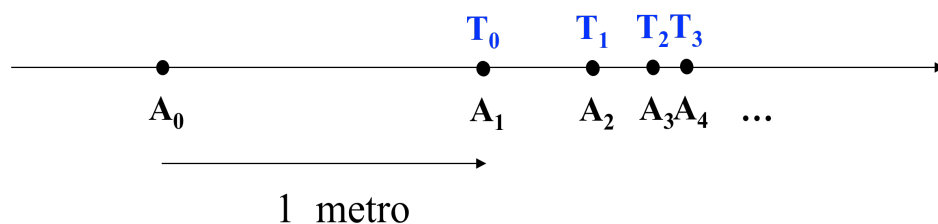


Se un corpo, infatti, si sposta da un estremo all'altro di uno spazio dato AB, prima di completare il percorso dovrà raggiungere C, il punto medio del segmento AB, ma prima di raggiungere C dovrà raggiungere il punto medio del segmento AC e così via all'infinito. Ma non è possibile percorrere infiniti parti di spazio in un tempo finito, dunque è assurdo supporre che i corpi si muovano in uno spazio infinitamente divisibile. Il movimento nel suo apparire sensibile non esiste, quindi risulta confermata la tesi parmenidea dell'immobilità dell'Essere vero.

Il paradosso di Achille e la tartaruga

Il secondo argomento contro il movimento è quello di Achille e la tartaruga. Se Achille gareggia con una tartaruga che parte con un passo di vantaggio, non riuscirà mai a raggiungere il lentissimo animale.

La distanza tra Achille e la tartaruga diventerà sempre più piccola ma non si ridurrà mai a zero, dunque Achille, dal punto di vista logico, non raggiungerà la tartaruga.



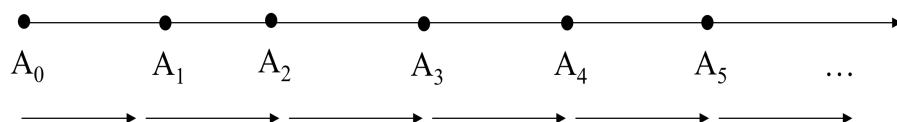
Supponiamo che Achille conceda 1 metro di vantaggio alla tartaruga. Nel tempo impiegato da Achille per andare da A_0 (il suo punto di partenza) ad $T_0 = A_1$, il punto di partenza della tartaruga, questa si sarà spostata nella posizione T_1 ; quando Achille giungerà al punto $T_1 = A_2$, la tartaruga avrà raggiunto la posizione T_2 . E così via all'infinito. La distanza tra A e T si ridurrà progressivamente, ma non sarà mai nulla perché il segmento è composto da infinite parti. Achille sarà costretto a correre all'infinito e non raggiungerà la tartaruga. La conclusione paradossale dell'argomentazione è un'ulteriore conferma della non esistenza del movimento e, quindi, dell'immobilità dell'Essere vero.

"Il presupposto concettuale (e la forza logica) di questi due argomenti è la tesi che, posta l'infinità divisibilità dello spazio, il movimento di un corpo dato non raggiungerà mai la sua meta, poiché, dovendo superare gli infiniti punti di cui consta qualsiasi distanza, dovrà impiegare un tempo infinito.

[...] Ora, poiché l'ipotesi della divisibilità all'infinito è logicamente e matematicamente legittima, la difficoltà dell'argomento risiede proprio nel dover ammettere una sfasatura tra piano logico-matematico e piano fisico-reale. Per questo motivo, alcuni matematici-filosofi, a partire da Bertrand Russell tendono ad esaltare Zenone per aver individuato una difficoltà autentica del pensiero umano. In particolare, si celebra Zenone per aver ammesso la possibilità della divisione all'infinito e quindi per aver posto il concetto che sta alla base del calcolo infinitesimale, che, tra l'altro offre validi strumenti di soluzione dell'argomento dell'Achille" (Abbagnano-Fornero, 2009)

Il paradosso della freccia

Il terzo paradosso si basa sulla premessa che il tempo sia composto da istanti. Zenone afferma che una freccia in movimento verso un bersaglio risulta in realtà ferma.

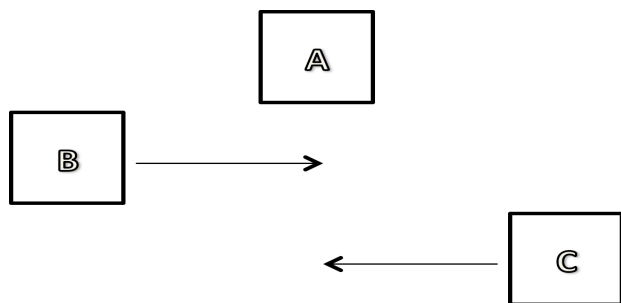


Il moto della freccia, infatti, può essere rappresentato come una serie di spazi, pari alla sua lunghezza, occupati un istante dopo l'altro. La freccia, però, risulta ferma in ciascuno spazio occupato, il suo movimento è formato quindi da una successione di spazi/istanti nei quali essa è immobile. Il movimento, dunque, non esiste perché non può essere il risultato di una somma di momenti di immobilità. La non esistenza del movimento conferma,

quindi, la correttezza della deduzione razionale dell'immobilità dell'Essere elaborata da Parmenide.

Il paradosso delle masse nello stadio

Il quarto paradosso è quello delle masse nello stadio.



Se due corpi B e C si muovono con la stessa velocità, rispetto ad un corpo immobile A, e in direzioni opposte, nel momento in cui si incrociano la massa B avrà una velocità relativa a C che risulterà doppia rispetto a quella relativa al corpo immobile A. In altre parole i due corpi B e C si muovono simultaneamente ad una certa velocità e al doppio di essa. Questa assurda conclusione logica secondo la quale una determinata velocità risulta uguale al suo doppio, conferma ancora una volta che il movimento è un'illusione della realtà percepita con i sensi e che, quindi, l'Essere vero, razionalmente concepito, risulta immobile.

I paradossi zenoniani sono stati spesso considerati giochi linguistici o pseudo-ragionamenti, in realtà queste argomentazioni hanno contribuito a sottolineare le difficoltà alle quali si va incontro nel momento in cui si combinano i concetti di lunghezza e di movimento con l'idea di infinito. Questi argomenti insieme alla scoperta delle grandezze incommensurabili "suscitarono presso i Greci una tale diffidenza nei confronti dell'infinito, da persuaderli a compiere qualunque sforzo pur di escludere tale concetto [...] da ogni seria costruzione scientifica" (Geymonat, 1970)

Bibliografia

- Ludovico Geymonat, Storia del pensiero filosofico e scientifico, Garzanti, 1970
- Carl B. Boyer, Storia della matematica, Isedi, 1976
- Nicola Abbagnano, Giovanni Fornero, La Filosofia, Paravia 2009

2. Paradossi e antinomie:

Iniziamo con alcune definizioni:

Paradosso: la parola deriva dal greco (parà e doxa) e significa «contrario all'opinione comune». Nell'accezione attuale, il termine «paradosso» assume una pluralità di significati e la sua accezione più generale è quella di «affermazione o credenza contraria a quanto ci si aspetta o all'opinione accettata».

Antinomia: si ha un'antinomia quando un procedimento o un ragionamento produce in modo corretto due soluzioni aventi rispettivamente la forma di tesi e antitesi portando a una conclusione del tipo: "**A se e solo se non A**" (in simboli $A \Leftrightarrow \bar{A}$)

Differenza tra paradosso e antinomia: un paradosso è una conclusione logica e noncontraddittoria che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose, mentre un'antinomia è una proposizione che risulta autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa.

L'antinomia di Epimenide o Paradosso del mentitore.

Nota fin dal VI secolo, è probabilmente la più antica ricordata dalla storia della filosofia; può essere espressa in vari modi:

Proposizione A: la "proposizione A" dice il falso.

La domanda che ci si deve porre è se la proposizione A sia vera o falsa; è facile vedere che se la proposizione è vera allora il suo significato implica che sia falsa, ma se è falsa ciò significa che è vera, cioè A appare contemporaneamente vera e falsa.

I paradossi dei quadrati e quello della ruota di Galileo Galilei

“Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente...”

Galilei (1564-1642)

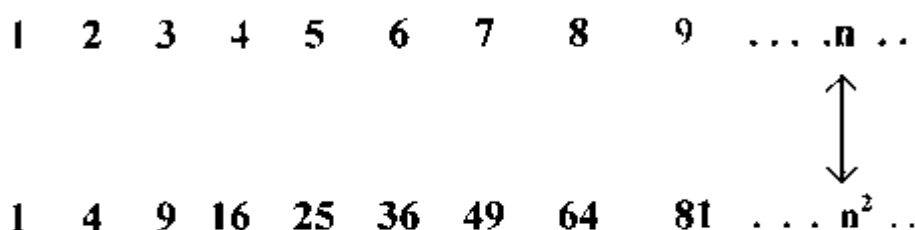
Nell'opera “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla *mecanica* e i movimenti locali”) Galileo scrisse di matematica ed in particolare di due paradossi

Si consideri l'insieme dei numeri naturali (più comunemente indicati con la lettera maiuscola N), e se ne consideri il sottoinsieme dei quadrati perfetti. Creiamo un collegamento tra i due insiemi, un'associazione detta uno-a-uno che leghi ad ogni elemento dei numeri naturali uno ed un solo quadrato (un facile esempio di funzione

biettiva, che studieremo con più attenzione). Galilei pensò di legare ad ogni numero naturale il suo quadrato. Pertanto, all'uno associamo sé stesso (che è un quadrato perfetto), al due il quattro, al tre il nove... e così via. Essendo questo un palese esempio di funzione biettiva,

Galilei mise in luce la stranezza del risultato ottenuto: dire che esiste una corrispondenza uno-a-uno tra questi insiemi significa...che sono ugualmente grandi!

Cioè che esistono tanti numeri naturali quanti quadrati perfetti, pur definendo questi ultimi un sottoinsieme proprio dei naturali.



Un confronto simile si può ottenere con il secondo paradosso: **il paradosso della ruota.**

Si immaginino due ruote concentriche (o semplicemente due circonferenze concentriche) e si immagini di farle scivolare lungo una linea retta. In ogni istante ad un punto della retta corrispondono esattamente un punto nella ruota più grande ed uno nella ruota più piccola, fino ad aver compiuto un giro completo. Conclusione? Le due ruote (o circonferenze) hanno esattamente lo stesso numero di punti del segmento descritto dall'inizio al termine dello scorrimento lungo la retta. Ma ancora più paradossale è il fatto che le due ruote hanno entrambe lo stesso numero di punti del segmento e quindi...sono di ugual lunghezza.



Galileo iniziò a considerare la filosofia e la matematica come facce di una stessa medaglia, forse spinto dal misticismo e della forte dose di logica filosofica necessaria a comprendere e trattare argomenti matematici delicati, proprio come l'infinito. Ne "Il Saggiatore" egli scrive:

“La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

La portata rivoluzionaria di queste parole diviene ancora più rilevante se contestualizzata

in un'epoca, quella dello scienziato, in cui la sola filosofia concepita era figlia di una religione spesso cieca e sicuramente non muta. Unire, quindi, in un'unica visione sia la matematica che la filosofia rende anche il nostro discorso ben più completo e la comprensione dei paradossi una molla che ci innalza verso domande più fini e profonde. Non dimentichiamoci, infatti, che la matematica vive e opera in un contesto, grazie a persone e ne plasma la cultura. Anche la cultura dell'infinito ha permesso, sicuramente in secoli meno buii di quello di Galileo, di liberare il *modus vivendi* dell'uomo da ogni convinzione e ci ha spinto a capire che la ragione va intesa più in fondo, al di là dell'intuito.

L'antinomia di Russell.

Formulato dal filosofo e logico britannico Bertrand Russell tra il 1901 e il 1902, è una delle antinomie più importanti della storia della filosofia e della logica. Può essere enunciato così:

L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

Si tratta più propriamente di un'antinomia che di un paradosso.

Russell immaginò di creare una suddivisione degli insiemi in due categorie:

- Gli insiemi che tra i loro elementi hanno loro stessi, cioè gli insiemi che appartengono a sé stessi; si cita spesso come esempio "l'insieme di tutti i concetti astratti", che appartiene a sé stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto.

$$\{x \in X\}$$

- Gli insiemi che tra i loro elementi non hanno loro stessi, cioè gli insiemi che non appartengono a sé stessi; ad esempio, come notò Russell stesso, "l'insieme di tutte le tazze da tè" non è una tazza da tè.

$$\{x \notin X\}$$

Se definiamo *R* come *l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi*, abbiamo:

$$R = \{x \mid x \notin X\}$$

Il problema posto da Russell a questo punto fu se **R appartiene o meno a sé stesso**.

Ma supponendo ad esempio che *R* vi appartenga, si avrebbe che:

- *R* appartiene a sé stesso;
- Quindi *R* soddisfa la definizione;
- Quindi *R* è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
- Quindi *R* non appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

Partendo invece dall'affermazione contraria, cioè supponendo che R non appartenga a sé stesso, si avrebbe che:

- R non appartiene a sé stesso;
- Quindi R non soddisfa la definizione;
- Quindi R non è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
- Quindi R è un insieme che appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

In termini logici:

$$\{R \in R \Leftrightarrow R \notin R\}$$

In sintesi, il paradosso di Russell si può enunciare così: l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso. Formalmente,

$$\text{Se } R = \{x \mid x \notin X \text{ allora } R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Variante del paradosso di Russell

Il **paradosso del barbiere** è un'antinomia e può essere enunciata così:

« In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e solo gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso? »

Se, come apparirebbe plausibile, il barbiere si radesse da solo, verrebbe contraddetta la premessa secondo cui il barbiere rade solo gli uomini che non si radono da soli.

Se invece il barbiere non si radesse autonomamente, allora dovrebbe essere rasato dal barbiere, che però è lui stesso: in entrambi i casi si cade in una contraddizione.

La somiglianza con il paradosso di Russell sta nel fatto che il villaggio del barbiere si potrebbe considerare diviso in due parti:

- Quella degli uomini che si radono da soli (che è assimilabile alla categoria degli insiemi che appartengono a se stessi nella versione originale dell'antinomia).
- Quella degli uomini che, non radendosi da soli, vengono rasati dal barbiere (nella versione originale, gli insiemi che non appartengono a se stessi).

Il problema è in quale categoria vada incluso il barbiere: infatti, sia che venisse incluso nella prima, sia che venisse incluso nella seconda, la situazione sarebbe contraddittoria.

Il barbiere è un insieme che appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

Si è detto che questo paradosso costituisce una riformulazione solo approssimativa del paradosso di Russell perché, proprio a causa del suo aspetto concreto, in realtà potrebbe

essere considerato semplicemente una dimostrazione per assurdo del fatto che non possono esistere barbieri con le caratteristiche citate.

Il paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.

Nel caso semplice, **arriva un singolo nuovo ospite**. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.

Un caso meno intuitivo si ha quando **arrivano infiniti nuovi ospiti**. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

Ancora più difficile: **ci sono infiniti alberghi con infinite stanze tutti al completo**. Tutti gli alberghi chiudono, tranne uno. Tutti gli ospiti vogliono alloggiare nell'unico albergo rimasto aperto. Sarebbe possibile procedere come prima, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti. Un modo alternativo, invece, è di assegnare ad ogni persona una coppia di numeri (n, m) in cui n indica l'albergo di provenienza, e m la relativa stanza. Gli ospiti sono quindi etichettati in questo modo:

$(1, 1)$	$(1, 2)$	$\dots$	$(1, m)$	$\dots$
$(2, 1)$	$(2, 2)$	$\dots$	$(2, m)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n, 1)$	$(n, 2)$	$\dots$	(n, m)	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

A questo punto basta assegnare le nuove stanze agli ospiti secondo un criterio ordinato, ad esempio per diagonali:

$(1, 1) \rightarrow 1; (2, 1) \rightarrow 2; (1, 2) \rightarrow 3; (3, 1) \rightarrow 4; (2, 2) \rightarrow 5; (1, 3) \rightarrow 6; \dots$

Questo paradosso, nonostante sia piuttosto elementare, ha contribuito, all'epoca ai matematici, ed oggi ai profani, a far comprendere la differenza profonda e sostanziale tra gli insiemi finiti e infiniti, aprendo le porte a gran parte delle moderne branche dell'aritmetica moderna: analisi non-standard e transfinita su tutte.

Giochiamo un po' (caccia all'errore)

***Tutti i numeri sono uguali!**

Dati due numeri a e b , dimostriamo che essi sono uguali! Indicando con c la loro differenza si ha:

$$a - b = c$$

E moltiplicando entrambi i membri per $a - b$:

$$(a - b)^2 = c(a - b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$$

Che si può anche scrivere:

$$a^2 - ab - ab + b^2 = ac - bc$$

Da cui:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

E dividendo entrambi i membri per $(a - b - c)$:

$$a = b$$

Dov'è l'errore?

Soluzione: Tutti i numeri sono uguali!

L'errore consiste nel dividere entrambi i membri dell'eguaglianza per $(a - b - c)$ che, essendo $a - b = c$, è eguale a 0; e dividere per 0 non ha senso.

***Dimostriamo che 4=5**

Consideriamo l'evidente eguaglianza:

$$16 - 36 = 25 - 45$$

Essa si può anche scrivere:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2}$$

Aggiungiamo $\left(-\frac{9}{2}\right)^2$ ad entrambi i membri:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(-\frac{9}{2}\right)^2$$

Ossia:

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

Da cui

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$4 = 5$$

Dov'è l'errore?

Soluzione: Dimostriamo che $4 = 5$

L'errore consiste nell'estrarre la radice quadrata dai due membri dell'eguaglianza, senza tener conto che questa ha due valori. Cioè dall'eguaglianza

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

non si può dedurre

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

Infatti, la prima eguaglianza equivale a:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

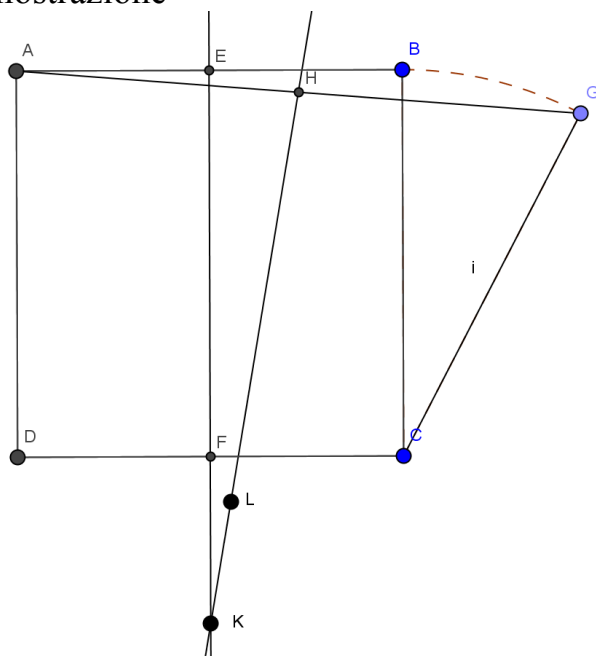
da cui è evidente che non si può dedurre:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Paradossi Geometrici

Teorema: Un angolo ottuso può essere uguale ad un angolo retto

Dimostrazione



Consideriamo il quadrato ABCD. Prendiamo E come punto medio. Con l'aiuto del compasso costruiamo il segmento CG con la stessa misura di CB. Consideriamo il segmento AG, e prendiamo il suo punto medio H. Tracciamo la perpendicolare ad AB passante per E, la retta interseca ed è perpendicolare a CD in F. F è punto medio di CD. Tracciamo la perpendicolare ad AG passante per H.

Poiché AB e AG non sono segmenti paralleli anche le loro perpendicolari non sono parallele quindi chiamiamo K il loro punto di intersezione.

In simboli, sinteticamente, abbiamo:

Quadrato: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$
 $\widehat{ABC} = 90^\circ$

Punto medio E: $\overline{AE} = \overline{EB}$

Costruzione CG: $\overline{CG} = \overline{CB}$

Punto medio H: $\overline{AH} = \overline{HG}$

retta EF: $AB \perp EF$

F è punto medio di CD: $\overline{DF} = \overline{FC}$

retta per H: $AG \perp HL$

Definizione di K: $(\text{retta AF}) \cap (\text{retta per H}) = K$

Consideriamo ora i due triangoli AHK e HGK,

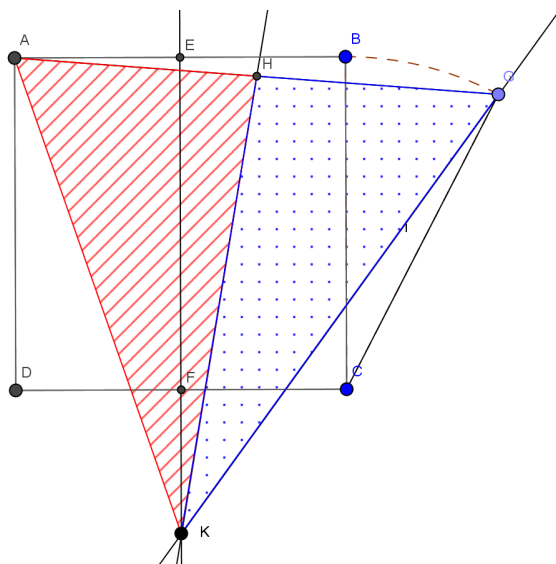


Figura 2.

Abbiamo:

sono triangoli rettangoli in H

$$\overline{AH} = \overline{HG}$$

$\overline{HK}$ in comune

quindi se hanno i due cateti uguali hanno uguale anche l'ipotenusa

$$\overline{AK} = \overline{GK}$$

Consideriamo gli altri due triangoli DFK e FCK

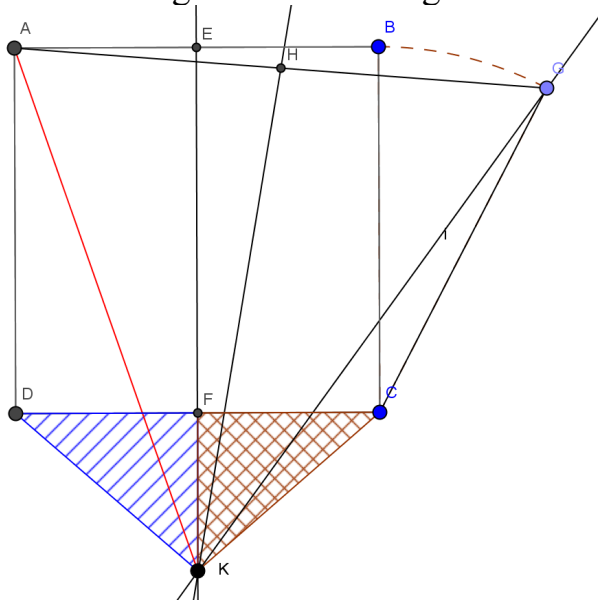


Figura 3

Anche questi due triangoli sono rettangoli, in F.

$$\overline{DF} = \overline{FC}$$

$\overline{FK}$ in comune

quindi le due ipotenuse sono uguali

$$\overline{DK} = \overline{CK}$$

Il triangolo DKC è isoscele e abbiamo i due angoli alla base uguali

$$\widehat{KDF} = \widehat{KCF}$$

Dalla figura 2 e dalla figura 3 .abbiamo che i triangoli ADK e GCK sono uguali perché hanno i tre lati uguali:

$$\overline{CG} = \overline{CB} \text{ per costruzione}$$

$$\overline{AK} = \overline{GK} \text{ dimostrazione figura 2.}$$

$$\overline{DK} = \overline{CK} \text{ dimostrazione figura 3}$$

Quindi hanno ordinatamente uguali gli angoli in particolare $\widehat{ADK} = \widehat{KCG}$

Se a questi sottraiamo gli angoli $\widehat{KDF}$ e $\widehat{KCF}$ (uguali) otteniamo angoli uguali

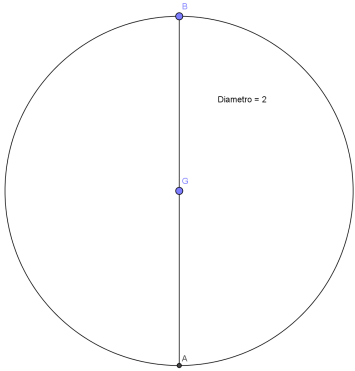
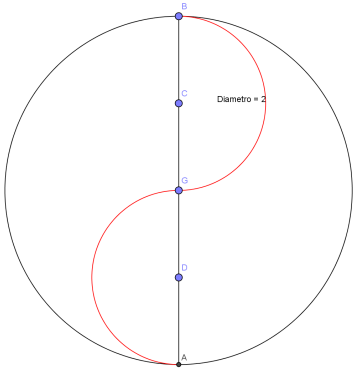
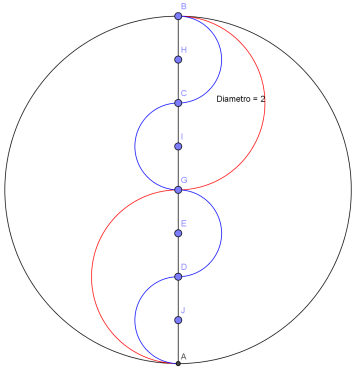
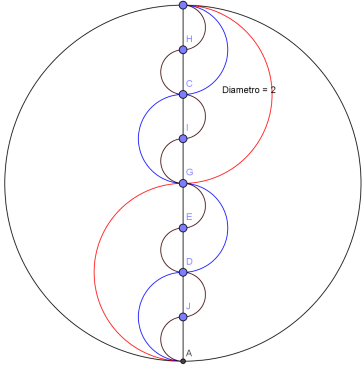
$$\widehat{ADK} - \widehat{KDF} = \widehat{ADF} \text{ angolo retto}$$

$$\widehat{KCG} - \widehat{KCF} = \widehat{FCG} \text{ angolo ottuso}$$

quindi abbiamo dimostrato che un angolo retto è uguale ad un angolo ottuso !!!!

Teorema: $\pi = 2$

Dimostrazione :

 Consideriamo una circonferenza con $r_1 = 1$. La misura della semicirconferenza sarà $L_1 = \pi r_1 = \pi$.	 Dividiamo a metà il diametro e costruiamo le 2 semicirconferenze di raggio $r_2 = \frac{1}{2}$. La somma delle due semicirconferenze $L_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \pi \right) = \pi$	 Continuiamo a dividere, ora $r_3 = \frac{1}{4}$ e la somma delle 4 semicirconferenze $L_3 = 4 \left(\frac{1}{4} \pi \right) = \pi$
	Continuiamo ancora a dividere $r_4 = \frac{1}{8}$ e la somma delle 8 semicirconferenze $L_4 = 8 \left(\frac{1}{8} \pi \right) = \pi$. Se dividiamo ancora infinite volte avremo sempre che la somma delle infinite semicirconferenze verrà sempre π. Ma se continuiamo la divisioni le semicirconferenze diventeranno sempre più piccole fino a coincidere con il diametro quindi $\pi = 2$	

Teorema: Se un quadrilatero ABCD ha l'angolo in A uguale all'angolo in C e AB congruente con CD allora esso è un parallelogramma.

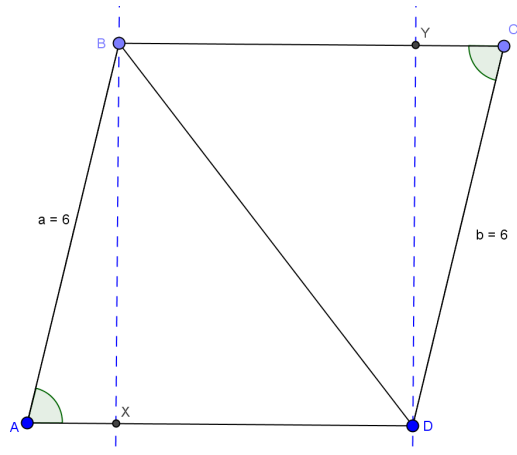
Dimostrazione: Ricordiamo che il parallelogramma è definito come quadrilatero con i lati opposti paralleli, e si dimostra che:

- I. Gli angoli opposti sono uguali, (gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari)
- II. i lati opposti sono congruenti
- III. le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

Si dimostrano anche i tre teoremi inversi.

1. se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali allora è un parallelogramma
2. se un quadrilatero ha i lati opposti congruenti allora è un parallelogramma
3. se un quadrilatero ha le diagonali che si tagliano a metà allora è un parallelogramma

Quindi la dimostrazione cercherà di dimostrare uno dei tre teoremi 1) o 2) o 3).



Consideriamo quindi il quadrilatero ABCD con $\overline{AB} = \overline{CD}$ e

$$\hat{B}AD = \hat{B}CD$$

Tracciamo la perpendicolare da B ad AD e da D ad BC.

$$BX \perp AD \text{ e } DY \perp BC$$

Quindi due triangoli rettangoli BXA e DYC sono congruenti perché hanno:

- l'ipotenusa (AB e DC) uguale per ipotesi,
- i tre angoli uguali (uno è l'angolo retto, l'altro lo è per ipotesi il terzo per differenza).

Quindi sono congruenti e avranno:

$$\overline{BX} = \overline{DY} \text{ e } \overline{AX} = \overline{CY}$$

Consideriamo ora i due triangoli rettangoli BXD e DYB, hanno l'ipotenusa BD in comune e i cateti BX e DY congruenti (appena dimostrato), quindi sono congruenti, in particolare hanno $\overline{XD} = \overline{YB}$. Sommando si ha

$$\overline{AX} = \overline{CY} +$$

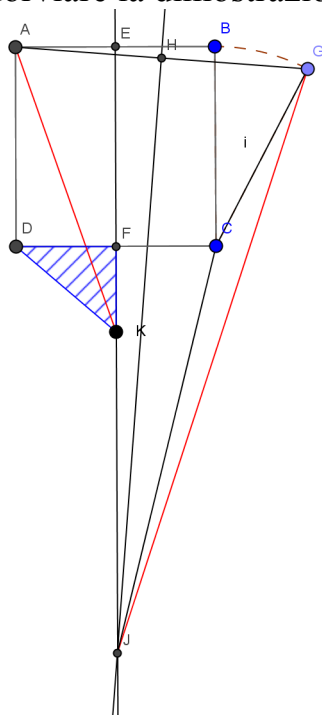
$$\overline{XD} = \overline{YB} \text{ si ottiene } \overline{AD} = \overline{CB}$$

quindi il quadrilatero ha i lati opposti congruenti ed è **quindi un parallelogramma** (teorema 2.)

Sembra vero ma il teorema è **FALSO**, trovare un controesempio.

Perché?

Il **primo** teorema è stato scelto per far costatare che un'errata o approssimata costruzione può fuorviare la dimostrazione.



L'errore consiste nel punto K che in realtà sta più lontano dal lato CD e quindi il triangolo GK è completamente al di fuori del quadrato di partenza.

L'intersezione fra la perpendicolare di AG e la perpendicolare di AB è il punto J, e il triangolo KCG (errato) è in realtà JCG

Il **secondo** teorema mostra che pur costruendo una successione corretta i singoli termini rimangono sempre della stessa "forma", semicirconferenze, quindi la loro somma sarà sempre π

Il **terzo** teorema è stato scelto per far vedere che nella costruzione abbiamo, involontariamente, sottointeso che le perpendicolari cadano all'interno del quadrilatero.

Questo è un possibile contro esempio.

