

Liceo Matematico – Classe seconda

Lezione n.5 tempo 1h (dalle 13 alle 14)

a oggi 5 ore per a.s. 2017/2018

Martedì 14 novembre 2017

Unità didattica: ROMA AMOR

E' stato presentato il volume "Visioni della simmetria. I disegni periodici di M. C. Escher" di Doris Schattschneider.

La particolarità del libro è la presenza dei **disegni di preparazione e gli studi sulla tassellazione** di Escher.

I ragazzi si sono mostrati molto interessati.

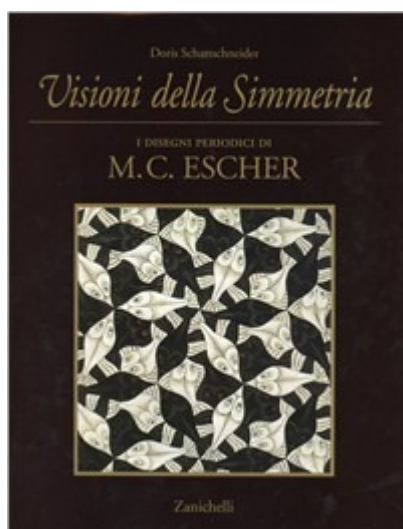
Nella seconda parte della lezione viene introdotto lo studio delle trasformazioni geometriche (vedi dispense allegate prime due pagine)

MATERIALE:.

1) Visioni della simmetria.

I disegni periodici di M. C. Escher

Doris Schattschneider



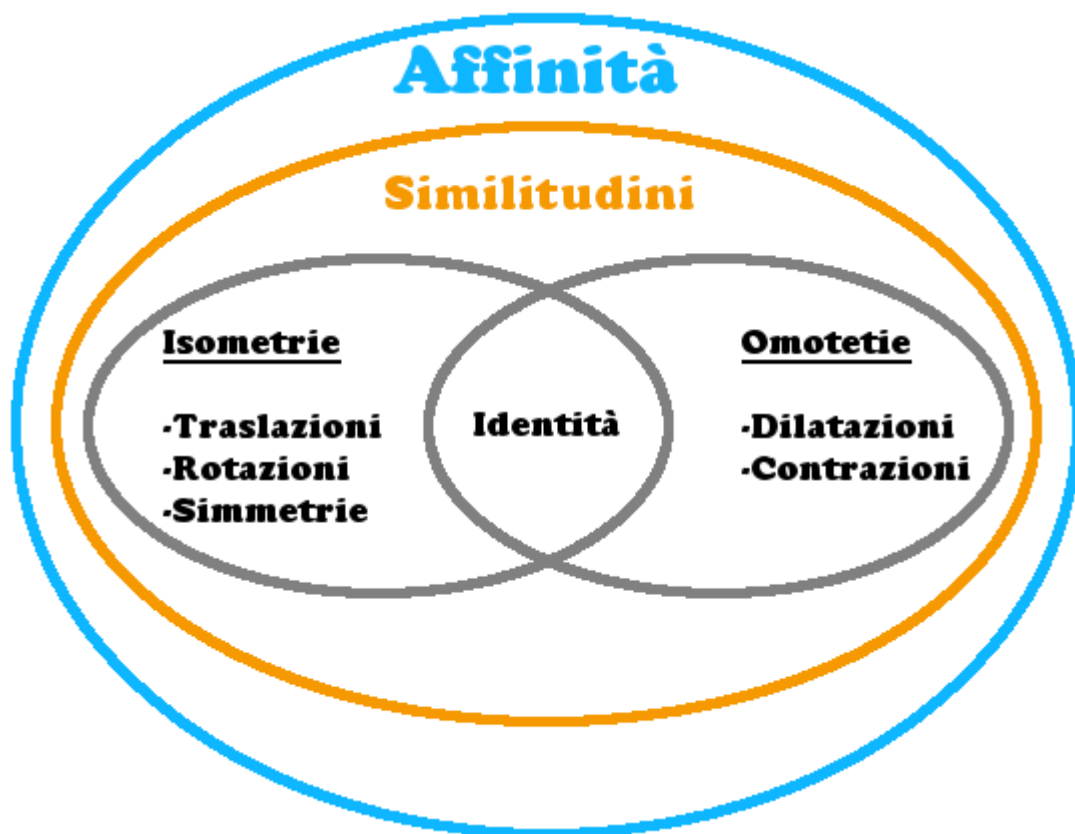
2) Dispense allegate

Donatella Ricalzone

Le tassellazioni

sono ricoprimenti del piano mediante figure geometriche disposte senza lasciare parti vuote, come, per esempio, nel pavimento di una stanza. Nell'arte sono state rappresentate tassellazioni nelle quali figure geometriche vengono ripetute mediante traslazioni, simmetrie e loro composizioni.

Trasformazioni geometriche



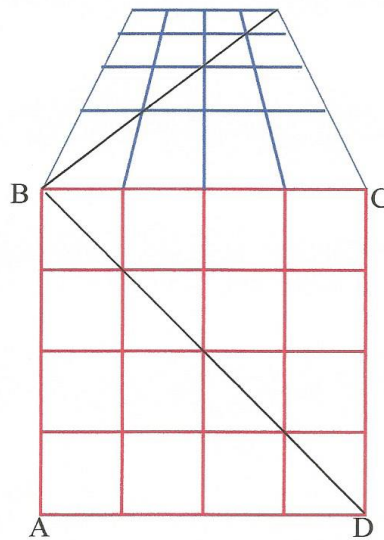
Contenuti

Trasformazione geometriche

Una trasformazione geometrica del piano è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano

Invarianti

Ogni trasformazione si caratterizza per *qualche cosa che rimane invariato*: i propri invarianti



Esempio:

il reticolato ABCD è rappresentato in prospettiva: l'elemento che rimane invariato è l'allineamento dei punti.

I punti che nel reticolato sono in linea retta (come i lati o le diagonali rimangono in linea retta).

Le trasformazioni che tratteremo sono corrispondenze biunivoche e **collineazioni** (cioè hanno come invariante l'allineamento dei punti).

Ogni trasformazione si caratterizza per i propri invarianti

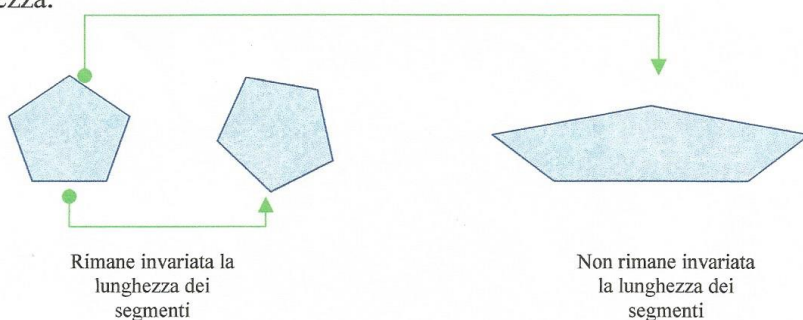
(vedi tabella degli invarianti pag. 37)

punto fisso: è un punto che corrisponde sé stesso nella trasformazione considerata,

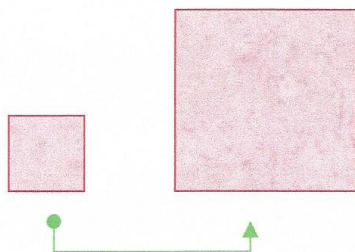
elementi uniti: è un elemento che viene trasformato in sé stesso non punto per punto, per esempio una retta parallela al vettore della traslazione).

Vediamo alcuni invarianti:

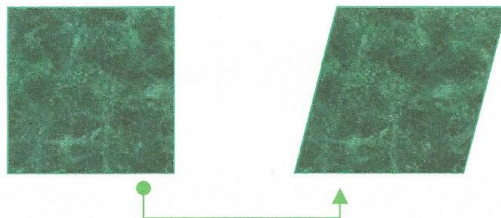
lunghezza dei segmenti: tutti i segmenti che si possono tracciare rimangono invariati come lunghezza.



Ampiezza degli angoli: gli angoli rimangono invariati.

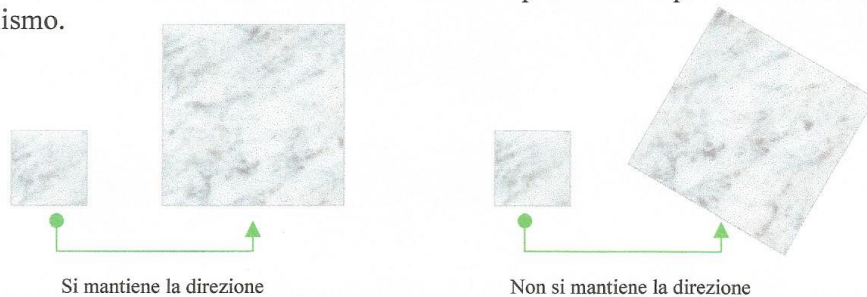


Parallelismo: rette parallele vanno in rette parallele.

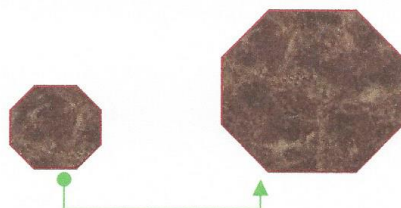


La direzione: Se ruotiamo una figura il parallelismo si mantiene ma le direzioni delle rette mutano.

Mantenere invariate tutte le direzioni è una richiesta più forte di quella di mantenere il parallelismo.

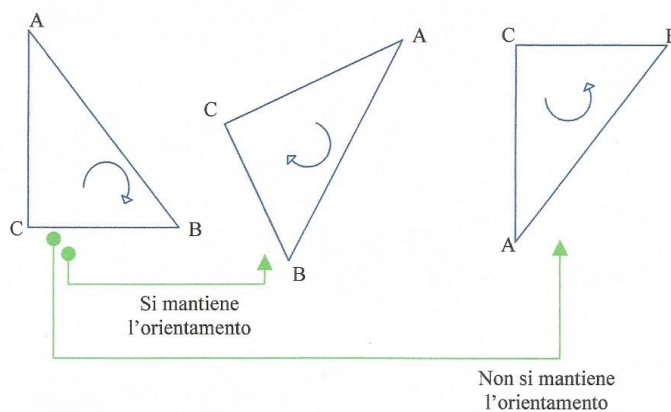


Rapporto tra i segmenti: ingrandiamo una figura in modo che se ne mantenga la forma e ogni segmento, per esempio, radoppi in lunghezza: il rapporto tra ogni segmento della figura trasformata e il corrispondente segmento della figura d'origine è 2.



Orientamento dei punti del piano: l'orientamento dei punti del piano è un'invariante quando, prendendo tre punti qualunque non allineati, si mantiene il verso di rotazione che essi descrivono (che può essere orario o antiorario);

esempio:



osservazioni:

1)

Ingrandimento	Spostamento rigido
<i>L'invariante globale è la forma delle figure</i>	<i>L'invariante globale sono le misure della figura</i>
Gli invarianti sono almeno: l'ampiezza degli angoli il parallelismo il rapporto tra i segmenti	Gli invarianti sono almeno: la lunghezza dei segmenti l'ampiezza degli angoli il parallelismo il rapporto tra i segmenti

2) Se una trasformazione mantiene la direzione

→ ha come invariante anche il parallelismo
(viceversa non è vero vedi le rotazioni)

Se una trasformazione mantiene la lunghezza dei segmenti

→ ha come invariante anche il parallelismo
(viceversa non è vero vedi gli ingrandimenti)

Se una trasformazione mantiene la lunghezza dei segmenti

→ ha come invariante l'ampiezza degli angoli
(viceversa non è vero vedi gli ingrandimenti).

Trasformazioni isometriche

Si dice isometria una trasformazione che conserva tutte le misure di segmenti (quindi degli angoli).

Traslazione

Idea intuitiva: oggetto su una scala mobile.

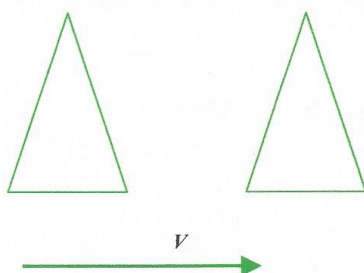
Definizione: una trasformazione geometrica del piano in sé individuata da un vettore (cioè da una classe di segmenti orientati aventi uguale *direzione*, *verso* e *lunghezza*).

Invarianti: allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, direzione, rapporto tra i segmenti, orientamento dei punti del piano.
Quindi: forma, area, perimetro.

Elementi uniti e fissi: non ci sono punti fissi (tranne che per la traslazione di vettore nullo, cioè l'identità).

Ci sono rette unite: quelle parallele al vettore traslazione.

Esempio:



Rotazione

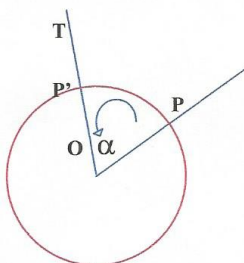
Idea intuitiva: orologio.

Definizione: una trasformazione geometrica del piano in sé individuata da un centro, dall'ampiezza di un angolo e da un verso.

L'ampiezza dell'angolo e il verso di rotazione possono essere assegnati attraverso un'unica informazione: *un numero reale*. Infatti, per convenzione i numeri reali positivi definiscono rotazioni in senso antiorario, mentre i numeri reali negativi definiscono rotazioni in senso orario.

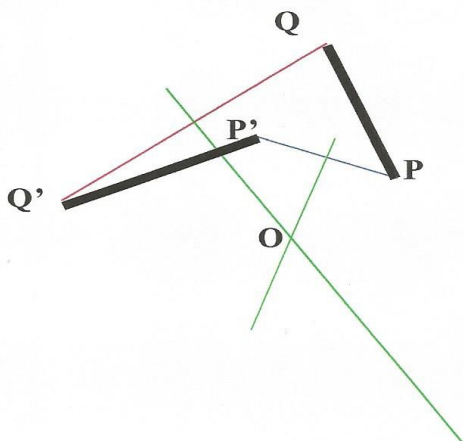
Dal punto di vista delle trasformazioni geometriche, tutte le possibili rotazioni sono quelle che corrispondono a valori dell'ampiezza α compresi tra 0° e 360° . Una rotazione di ampiezza α coincide con una rotazione di uguale centro e ampiezza $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (qualunque sia $k \in \mathbb{Z}$).

Dato il centro O, l'angolo α e il verso trovo il trasformato di P con riga, goniometro e compasso:



Si traccia la semiretta con origine in O e passante per P. Per disegnare un angolo α a partire da OP ci vuole un goniometro e troviamo il punto T. uniamo T con O. Ora puntiamo il compasso in O e tracciamo un arco che parte da P fino ad incontrare TO in P' (P' è il punto corrispondente nella rotazione).

Per determinare centro e angolo devo avere due punti trasformati:



Il centro di una rotazione si individua tracciando gli assi dei segmenti aventi per estremi due punti corrispondenti. Il punto di intersezione di tali assi è il centro di rotazione

La rotazione, poiché corrisponde a un movimento rigido sul piano, è una collineazione che mantiene tutte le misure: è una isometria

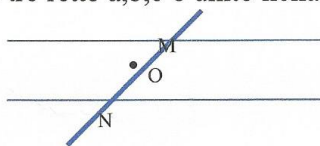
Invarianti: allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, rapporto tra i segmenti, orientamento dei punti del piano.
Quindi: forma, area, perimetro.

Elementi uniti e fissi: il centro della rotazione è fisso.
Ogni circonferenza con centro nel centro di rotazione è unita.

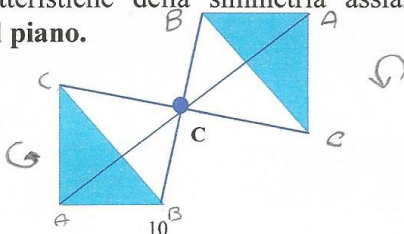
Simmetria centrale

È una rotazione di $+180^\circ$ o -180° .

Gli invarianti sono quelli della rotazione e in più mantiene le direzioni.
L'insieme delle tre rette a, b, c è unito nella simmetria S_O di centro O, punto medio di MN



Attenzione non ha le caratteristiche della simmetria assiale infatti **non muta l'orientamento dei punti del piano.**



Simmetria assiale

Idea intuitiva: immagine allo specchio oppure ribaltamento.

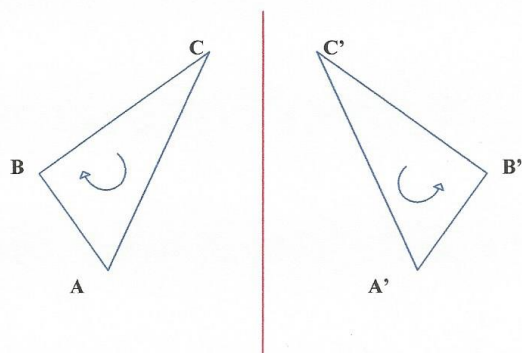
Definizione: una trasformazione individuata da un asse di simmetria (che è l'asse di tutti i segmenti che uniscono due punti trasformati).

Invarianti: allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, rapporto tra i segmenti.
Quindi: forma, area, perimetro.

Elementi uniti e fissi: l'asse di simmetria è fisso (ogni punto è fisso)
Ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è unita.

La simmetria assiale non mantiene l'orientamento dei punti del piano

Esempio:

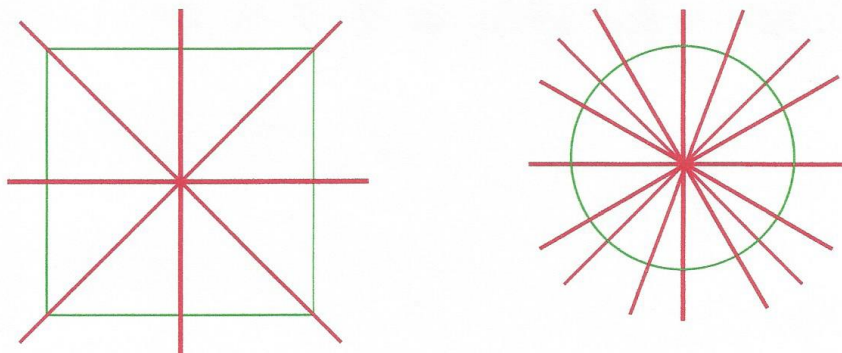


E' semplice dimostrare che la simmetria assiale è una isometria

Isometrie invertenti

Si ha quando non si mantiene l'orientamento dei punti del piano.

Figure simmetriche: due figure si dicono simmetriche se rimangono unite nella simmetrie (rispetto ad una retta o qualunque simmetria).



Trasformazioni non isometriche

Omotetie

Idea intuitiva: ingrandimento o rimpicciolimento in scala.

Definizione: dato un punto O e un numero reale K , diremo omotetia di centro O e rapporto di scala K , una trasformazione che:

- lascia fisso O
- trasforma ogni altro punto P in un punto P' allineato con O e P
- la distanza $OP' = K OP$
- Se $K > 0$ P' dalla stessa parte di P rispetto ad O
- Se $K < 0$ P'' è da parte opposta di P rispetto ad O

Una omotetia è completamente individuata dal centro O e dal rapporto OP'/OP .

Invarianti: allineamento dei punti, ampiezza degli angoli, parallelismo, direzioni, rapporto tra i segmenti, l'orientamento dei punti nel piano.

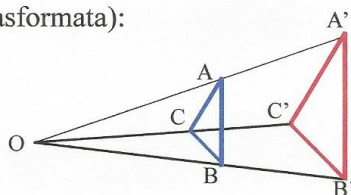
Quindi: forma, area, perimetro.

Elementi uniti e fissi: c'è un punto fisso detto centro (dell'omotetia) di proiezione. Ci sono figure unite: rette passanti per il centro di proiezione (scorrono su sé stesse).

Tra i segmenti corrispondenti di una omotetia c'è lo stesso rapporto $A'B'/AB$

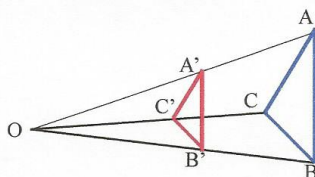
Schematizziamo (la figura rossa è la trasformata):

$K > 1$ ingrandimento



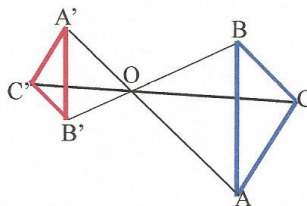
$K = 1$ identità

$0 < K < 1$ riduzione

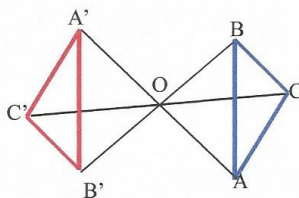


$K = 0$ implosione (a ogni punto del piano corrisponderebbe perciò un solo punto: il centro della omotetia. Non sarebbe allora una trasformazione geometrica perché non sarebbe una corrispondenza biunivoca del piano in sé).

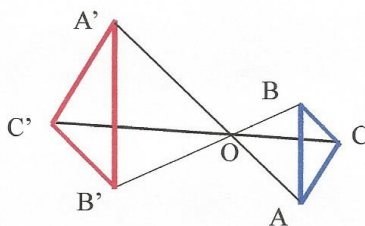
$-1 < K < 0$ riduzione



$K = -1$ simmetria centrale



$K < -1$ ingrandimento



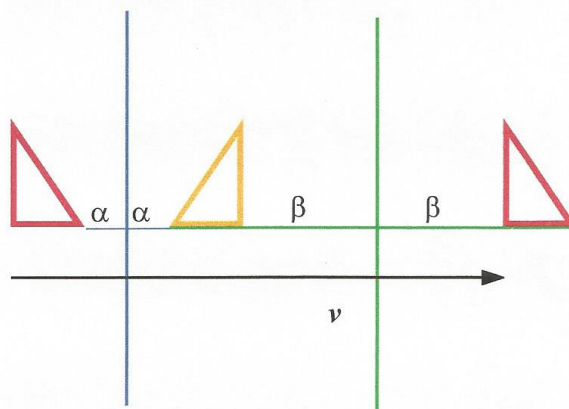
**Il rapporto tra le aree è K^2 , tra i perimetri $|K|$
Qualunque sia K l'omotetia non modifica l'orientamento dei punti del piano**

Composizione

Due simmetrie assiali con assi paralleli

composte danno una **traslazione**

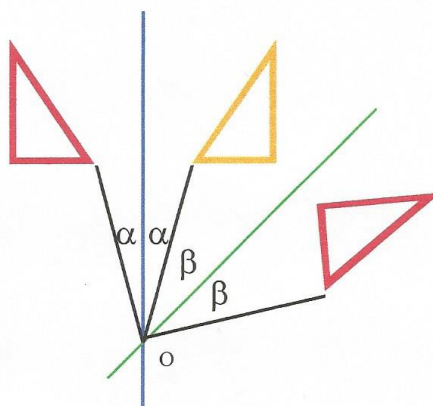
di vettore perpendicolare agli assi, nel verso dal primo al secondo con lunghezza pari al doppio della distanza tra gli assi.



Due simmetrie assiali con assi incidenti

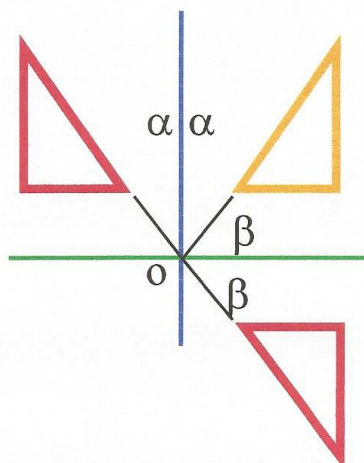
composte danno una **rotazione**

con centro nel punto di incidenza e ampiezza pari al doppio dell'angolo tra il primo asse e il secondo.



Due simmetrie assiali con assi perpendicolari (rotazione attorno ad O di un angolo piatto)
composte danno una **simmetria centrale**

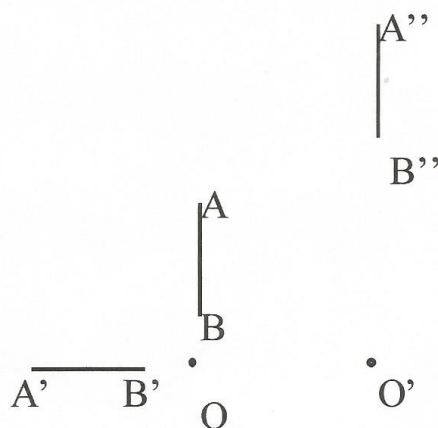
Il prodotto di due simmetrie ad assi perpendicolari è commutativo



Due rotazioni

la composizione di due rotazioni è una **rotazione** se i due centri coincidono;

se i centri non coincidono e le ampiezze sono $90^\circ + K \cdot 360^\circ$ e $-90^\circ + K \cdot 360^\circ$
abbiamo una **traslazione**



Composizione di tre simmetrie assiali

È una simmetria invertente

È una **simmetria assiale** oppure una **glissosimmetria**

1) Tre assi paralleli → **simmetria assiale** con asse parallelo agli altri assi

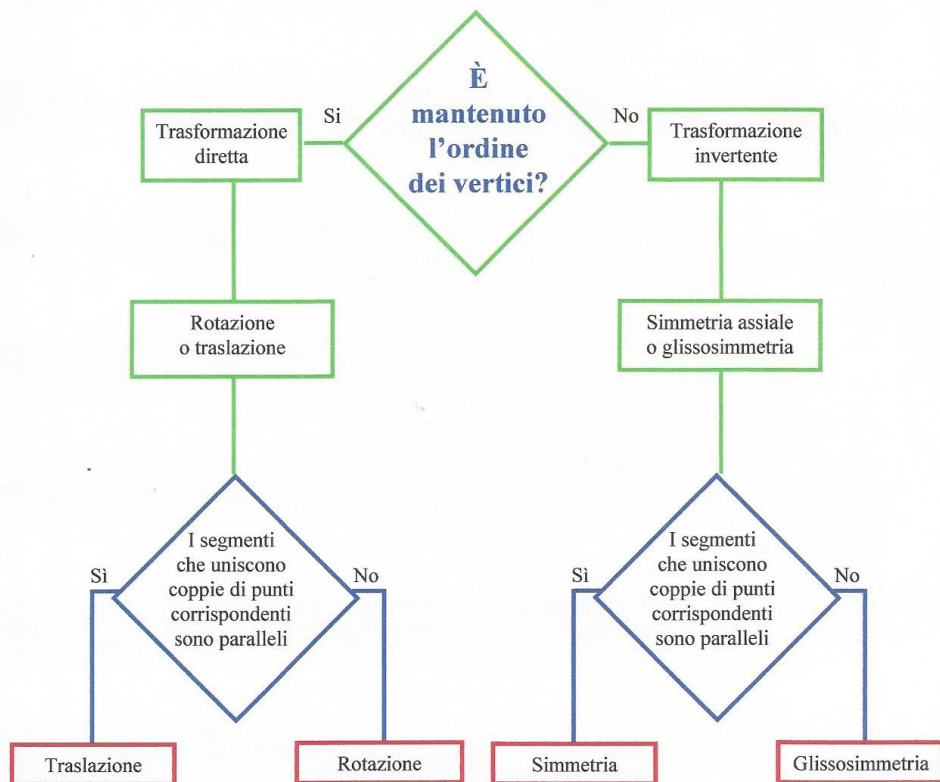
2) Tre assi incidenti → **simmetria assiale** con asse incidente nel punto di intersezione degli altri assi

3) Tre assi non paralleli
e non si intersecano
in un punto → rotazione + simmetria assiale

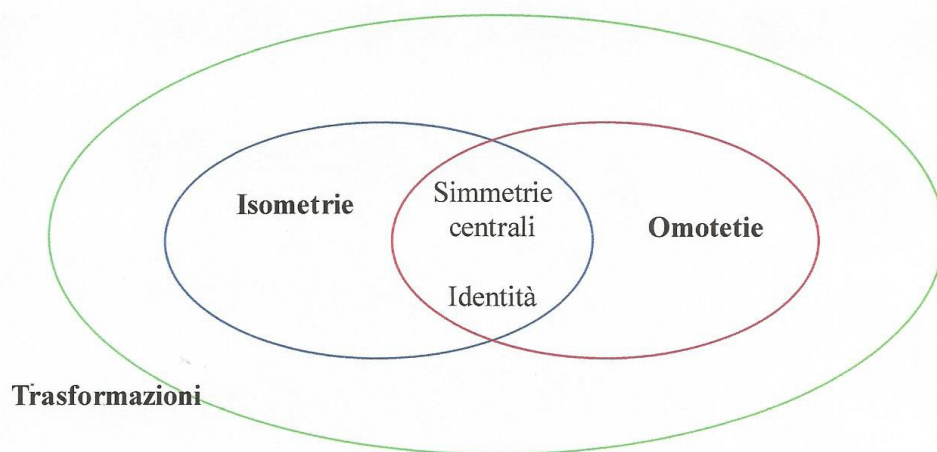
4) Due assi paralleli
e uno incidente → traslazione + simmetria assiale

Glissosimmetria

**La glissosimmetria è la composizione di una rotazione con una simmetria assiale
oppure di una traslazione con una simmetria assiale e viceversa**



Rappresentazione delle isometrie con i diagrammi di Eulero - Venn



Simmetria centrale $K = -1$ nell'omotetia



Identità: traslazione $V(0;0)$
rotazione $0^\circ \pm K 360$

Liceo Matematico – Classe seconda

Lezione n.6 tempo 1h (dalle 13 alle 14)

a oggi 4 ore per a.s. 2017/2018

Giovedì 16 novembre 2017

Unità didattica: ROMA AMOR

Alla lezione ha partecipato anche il prof. M Gaudio, docente di storia dell'arte presso l'Istituto.

Agli alunni vengono presentate le linee guida per eseguire una tassellazione del piano (elementare).

Con molto entusiasmo hanno preso carta e penna e si sono cimentati tutti nel disegno con buoni risultati

Materiale:

- Fogli A4 e A3 millimetrati, matita gomma righello.
- Linee guida per la creazione di tassellazione.
- **Visioni della simmetria. I disegni periodici di M. C. Escher** Doris Schattschneider

Allegati:

- Come disegnare una tassellazione: linee guida
Sito di riferimento (il materiale è stato comunque rivisitato)
https://issuu.com/cotronigrazia/docs/impariamo_a_disegnare_come_escher1
- Foto dei lavori eseguiti dagli alunni

Donatella Ricalzone

Impariamo a disegnare come Escher

Il primo pavimento

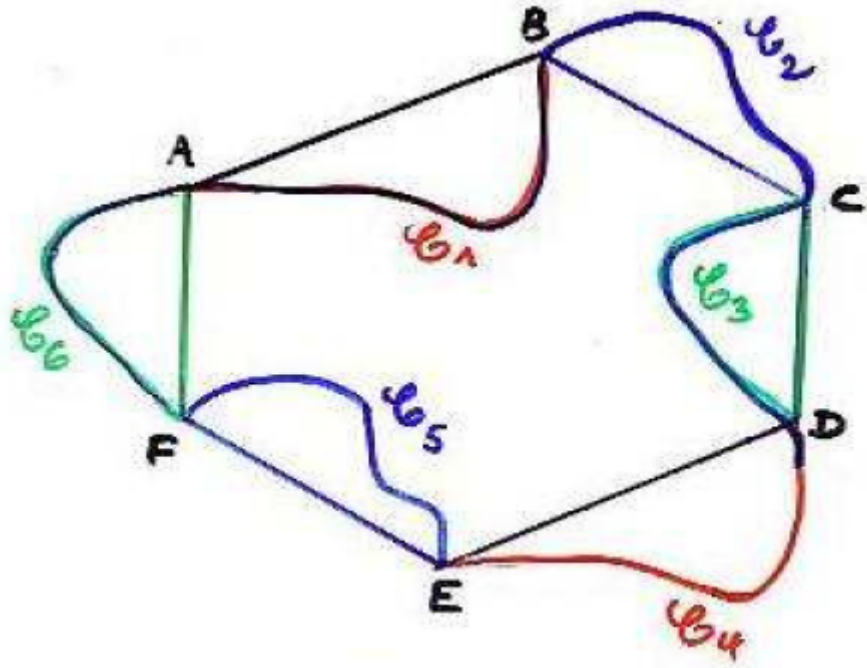
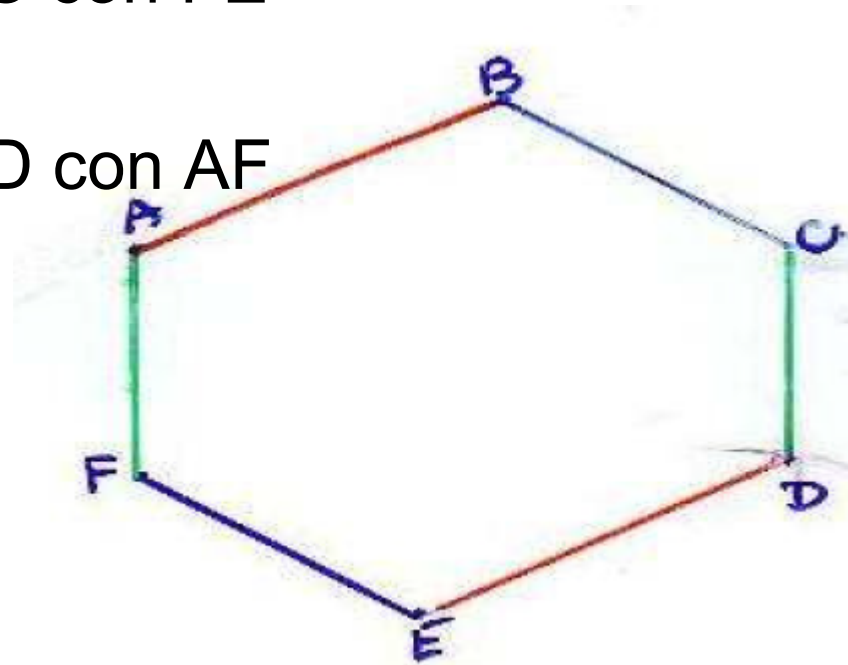
Il primo pavimento che consideriamo un pavimento ottenuto da un motivo di base che ricopre il piano avendo applicato ad esso delle traslazioni

Il motivo di base è la più piccola superficie grazie alla quale è possibile pavimentare il piano.

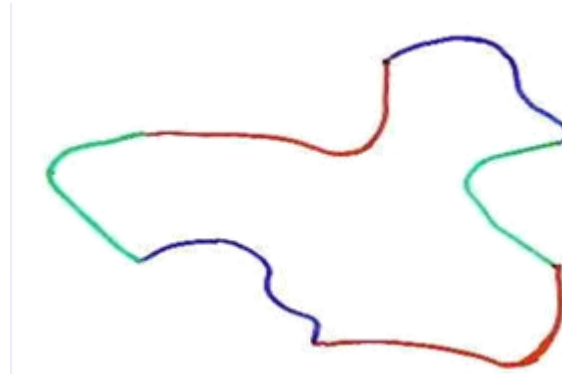
Partiamo da un esagono

I lati opposti dell'esagono sono ottenuti tramite delle traslazioni

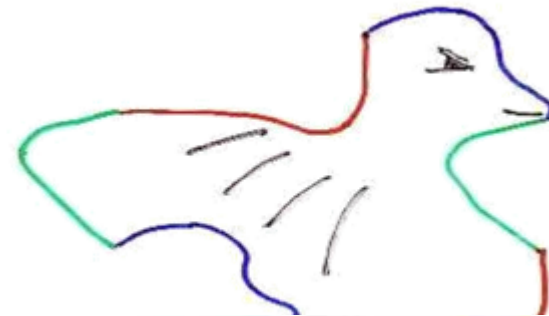
- o AB con ED
- o BC con FE
- o CD con AF



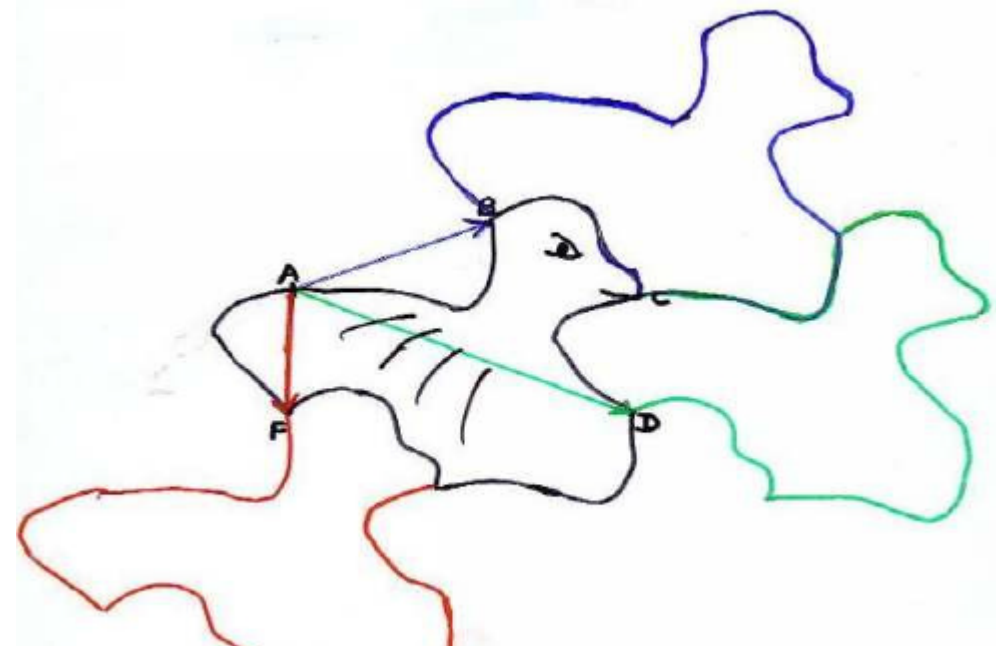
Poi si cancellano i
lati dell'esagono e si
ottiene il motivo di
base



Si disegna
all'interno la figura
che si vuole

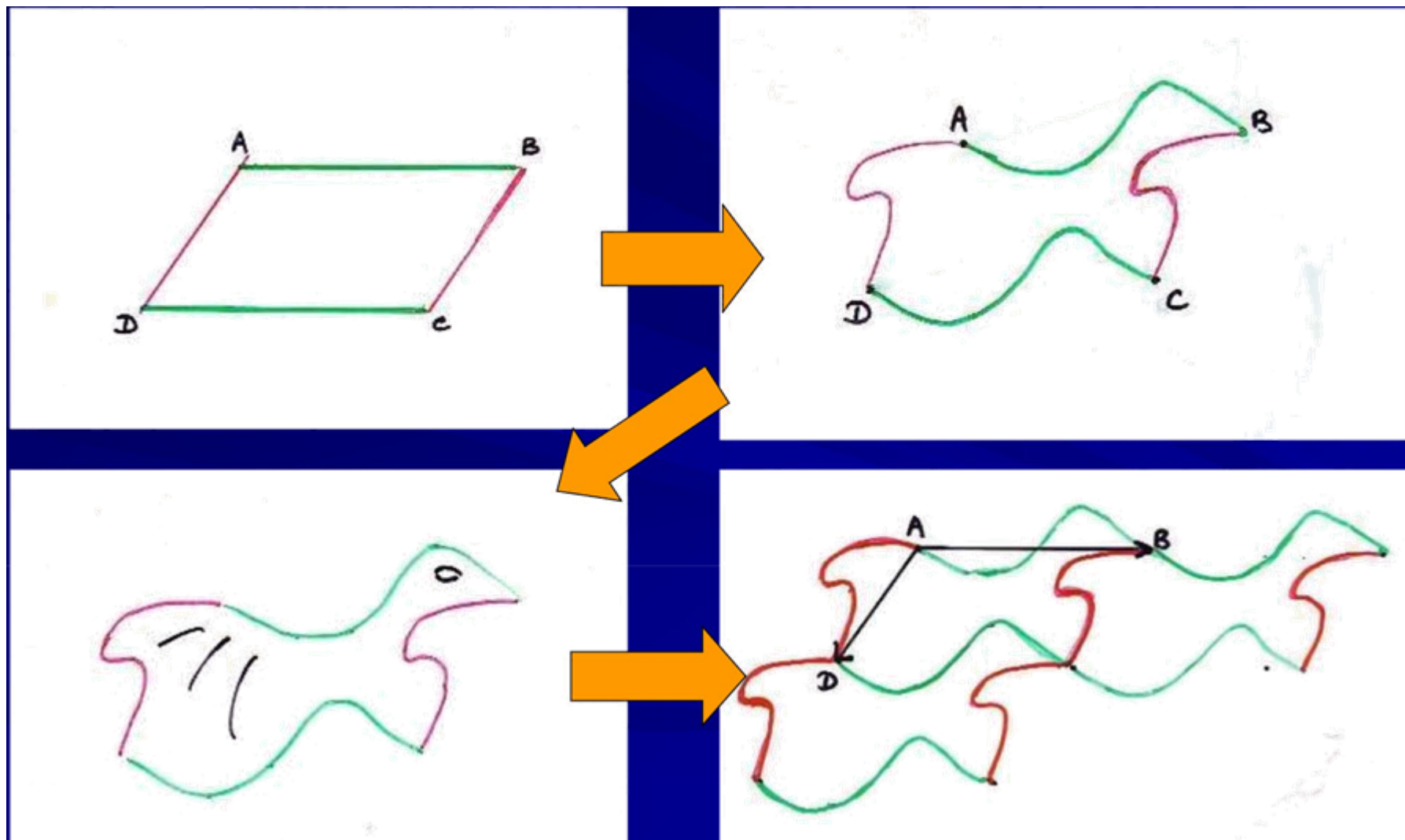


E infine si applicano e

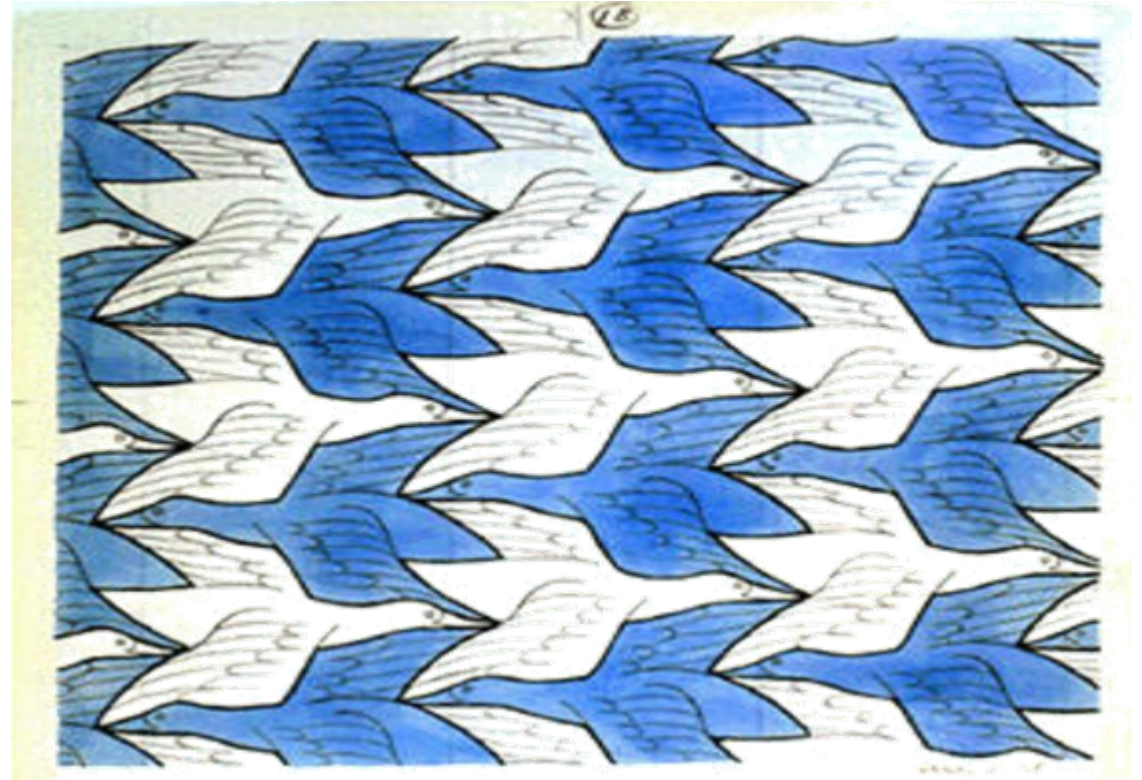
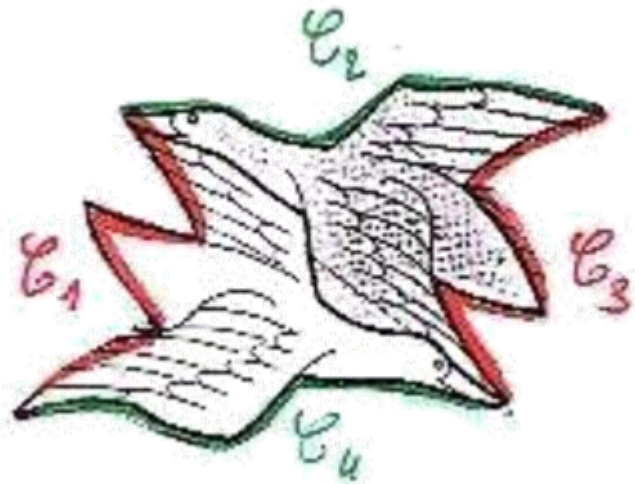


traslazioni per ottenere il
ricoprimento del
piano.

Si può partire anche a un
parallelogramma



Si può fare anche un doppio motivo
all'interno di uno stesso tassello



Oppure il tassello è lo stesso ma si disegnano
all'interno figure diverse



