Liceo **Matematico**

LA SEZIONE AUREA
scheda di lavoro 5

Liceo Scientifico e Linguistico **Ettore Majorana**

5.1) Considera due numeri positivi qualsiasi (numeri piccoli velocizzano il calcolo ma se preferisci puoi anche optare per numeri grandi o "particolari" come π) e scrivili nelle due caselle grigie in basso. Riporta poi nella prima casella libera la somma dei numeri scritti nelle due caselle precedenti e prosegui così (sommando sempre i due ultimi numeri scritti) fino ad occupare le ultime due caselle (i riquadri colorati con scritte le lettere D e N)

						$\rightarrow$ …
… $\rightarrow$						$\rightarrow$ …
… $\rightarrow$					D	N

Con la calcolatrice calcola ora il rapporto N/D , scrivilo su un foglio e non dire a nessuno quanto hai ottenuto. Con buona approssimazione, l'insegnante ti saprà dire che numero hai scritto.

Per capire come funzione il "trucco" (che trucco non è, si tratta di vera matematica), dobbiamo richiamare quanto visto sulle frazioni continue periodiche, specificamente sullo sviluppo di $\sqrt{2}$:

Dal calcolo $\sqrt{2}=1+0,\boxed{414213562}...=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{0,414213562...}}=1+\dfrac{1}{2,\boxed{414213562...}}=...$ si deduce che $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. Grazie a questa relazione si può insistere con successive sostituzioni fino ad ottenere $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\dfrac{1}{1+1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$.

Si ricava in questo modo la forma compatta di $\sqrt{2}$ come frazione continua periodica $\left[1;\overline{2}\right]$

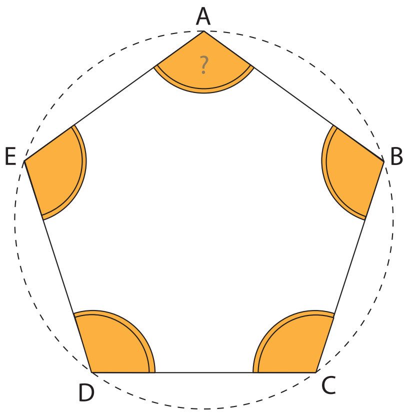
Riassumendo, per sviluppare $\sqrt{2}$ si è usata la relazione in basso:

se x è $\sqrt{2}$, allora vale la relazione $\boxed{x=1+\dfrac{1}{1+x}}$

Come vedremo anche oggi riusciremo a trovare un valore proprio sviluppando una frazione continua periodica, stavolta partendo da un problema di geometria:

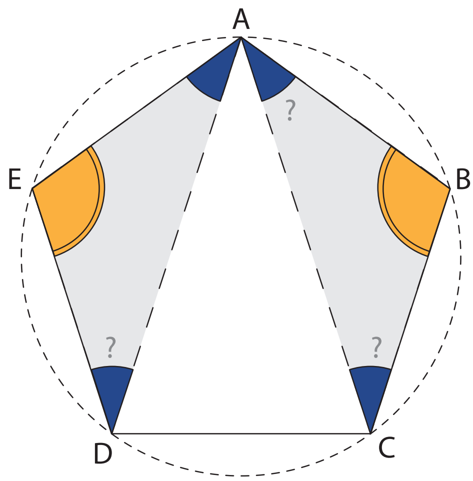
Per andare spediti è opportuno rinfrescare alcuni teoremi sui triangoli:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (cioè misura $180°$).
- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.
- Un triangolo con due angoli congruenti è isoscele (con base il lato compreso fra i due angoli).



5.2a) Considera un pentagono regolare $ABCDE$ (*vedi a fianco*) inscritto in una circonferenza. Quanto misurano (in gradi sessagesimali) i cinque angoli interni?

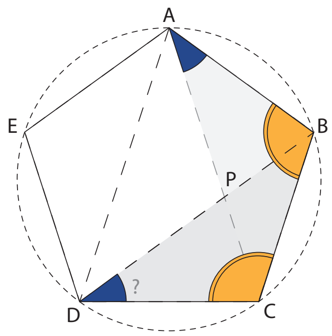
$$A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}A \cong B\widehat{C}D \cong C\widehat{D}E \cong E\widehat{A}B \cong \boxed{}$$



5.2b) Determina l'ampiezza dei seguenti angoli (*vedi illustrazione a fianco* $\rightarrow$). Nota bene: invece di compilare le caselle in basso, puoi semplicemente scrivere il valore accanto agli angoli contrassegnati da un punto interrogativo.

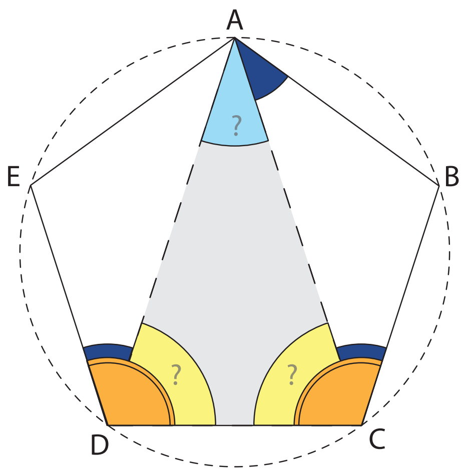
$C\widehat{A}B = \boxed{}$ $\quad B\widehat{C}A = \boxed{}$

$D\widehat{A}E = \boxed{}$ $\quad E\widehat{D}A = \boxed{}$



5.2c) Indicato con P il punto d'intersezione fra DB e AC ($\leftarrow$ *vedi a fianco*), determina l'angolo $C\widehat{D}B$.

$C\widehat{D}B = \boxed{}$



5.2d) Considera ora il triangolo ADC $(\rightarrow)$ e determina l'ampiezza dei suoi angoli interni.

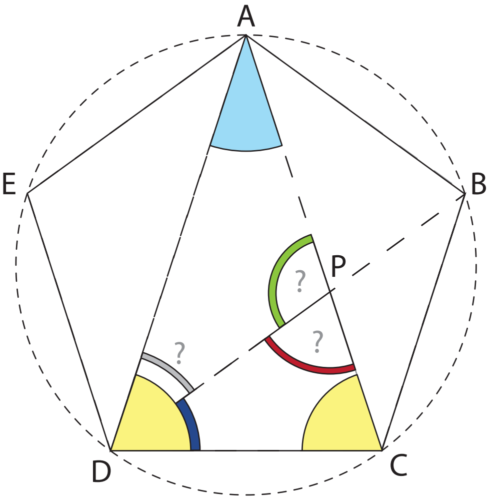
$A\widehat{D}C = \boxed{}$ $\quad A\widehat{C}D = \boxed{}$ $\quad D\widehat{A}C = \boxed{}$

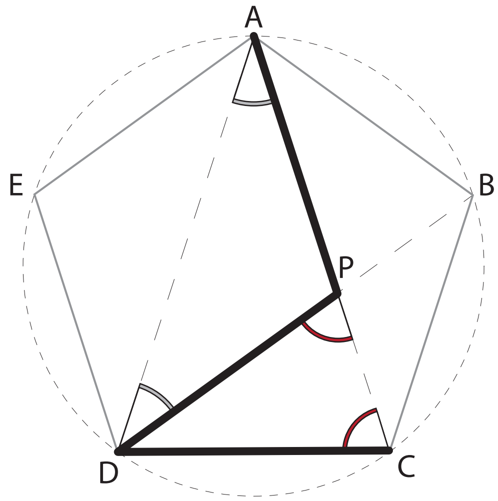
5.2e) Per finire determina l'ampiezza degli angoli richiesti in basso (nelle caselle bianche) e riscrivi le ampiezze degli angoli già calcolati indicati sotto (nelle caselle grigie).

$D\widehat{P}C =$ ______ $A\widehat{D}P =$ ______

$D\widehat{P}A =$ ______

$D\widehat{C}P =$ ______ $D\widehat{A}P =$ ______





5.2f) Alla luce dei tuoi calcoli sugli angoli, cosa puoi dire circa le lunghezze dei segmenti DC, DP e PA (*messi in rilievo nella figura a fianco*)?

____

____

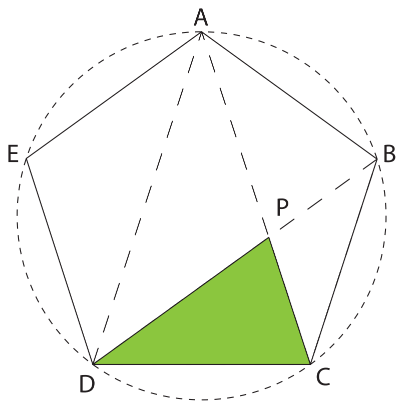
____

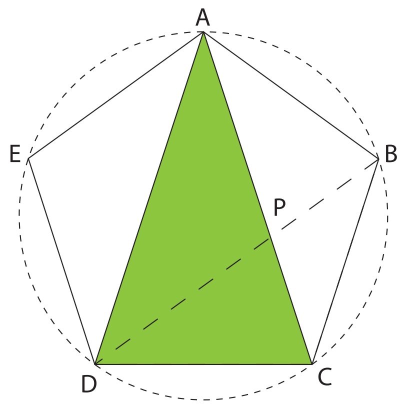
____

Arrivati a questo punto è necessario chiarire un'altra questione di Geometria, molto facile da comprendere:

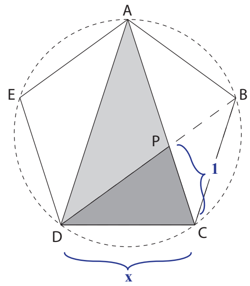
- Due triangoli con gli angoli congruenti possono avere dimensione diversa, ma hanno sicuramente la stessa forma (pensa per esempio a cosa succede graficamente "zoomando" un triangolo).
- Due triangoli con la stessa forma hanno lo stesso rapporto fra i lati (se per esempio un lato fosse lungo il doppio di un altro, tale rapporto si manterrebbe anche nel triangolo "zoomato").

Grazie a questa osservazione e agli angoli calcolati in precedenza, possiamo dire che i seguenti due triangoli CDP e DAC hanno la stessa forma e quindi lo stesso rapporto fra i lati:





5.3a) Alla luce dell'ultima osservazione e supponendo per semplicità che $\overline{DC} = x$ e $\overline{PC} = 1$ (vedi a fianco) , trova una proporzione che contenga, oltre ai numeri e alle operazioni, la sola incognita x e che inizi così: "x sta a 1 come…"



$x : 1 =$

5.3b) Riscrivi la proporzione scritta sopra (**5.3a**) in forma di frazione (abbandonando quindi il simbolo di divisione) e semplifica il membro di destra "spezzando" la frazione in due.

5.3c) Riscrivi la proporzione (**5.3a**) in forma di un'equazione fra prodotti, ricordando che in una proporzione il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi (noi ora non useremo questa equazione, è però importante tenerla a mente perché ricorrerà più in là).

5.3d) Usa l'equazione $x = \ldots$ trovata nel problema **5.3b)** per sviluppare il valore di x in frazione continua periodica (cerca di utilizzare l'idea usata nel caso dello sviluppo di $\sqrt{2}$)

5.4) Trova, per frazioni continue e utilizzando la tabella sottostante, approssimazioni via via più precise del valore trovato nel problema precedente. Avvertenza: ti renderai ben presto conto, che la "frazione classica" può essere ricostruita a partire dalla precedente, senza ripartire ogni volta dalla frazione continua generatrice.

"Profondità"	Sviluppo	Frazione "classica"	Valore decimale
1	1	$\boxed{\frac{1}{1}}$	1
2	$1+\frac{1}{1}$	$\boxed{\frac{2}{1}}$	2

3	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$	$1+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$	1,5
4	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$		
5	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$		
6	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$		
7	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$		
8	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}$		

5.5a) Prendi la calcolatrice e memorizza il seguente numero. Esso è comunemente chiamato **sezione aurea** (o *rapporto aureo* o *numero aureo*).

$$\boxed{\phi = 1{,}6180339887498948482...}$$

Come abbiamo visto la sezione aurea è uguale al rapporto fra due lunghezze interne alla stella regolare pentagonale e anche alla frazione continua $\left[1;\overline{1}\right]$. La sua definizione più classica è però la seguente:

Considera la seguente proporzione (detta appunto *aurea*) definita fra lunghezze: **Il tutto sta a una sua parte come questa sta al resto**. Per capirne meglio il significato, immagina su un segmento AC un punto B , tale che il rapporto fra $\overline{AC}$ (**il tutto**) e $\overline{AB}$ (**la parte**) sia uguale al rapporto fra $\overline{AB}$ (**la parte**) e $\overline{BC}$ (**il resto**).

A rigore, la definizione non discrimina tra *parte* e *resto*. La sezione aurea è però definita nel seguente modo:

Si chiama sezione aurea il rapporto fra la parte maggiore $\overline{AB}$ e la parte minore $\overline{BC}$

È facile dimostrare che questa definizione coincide con quella "pentagonale". Posto per semplicità $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=1$ (in questo modo x è al contempo la lunghezza di AB e il valore del rapporto cercato), si ha infatti la seguente traduzione matematica della proporzione: $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AC}:\overline{AB} \rightarrow \boxed{x:1=(x+1):x}$, identica a quella che abbiamo trovato nella stella pentagonale. Un'altra definizione equivalente (basta rileggere la proporzione dalla quale siamo partiti) è definire la sezione aurea come il rapporto fra la lunghezza complessiva $\overline{AC}$ e la parte maggiore ($\overline{AB}$) di un segmento diviso secondo la proporzione aurea.

Nota bene: in alcuni testi la sezione aurea è definita come il rapporto fra parte minore e parte maggiore. Il valore in questo caso è il reciproco di quello che abbiamo usato noi. Spesso questa "versione" di sezione aurea viene indicata con il simbolo φ.

5.6) Che tipo di numero è ϕ (razionale o irrazionale)?

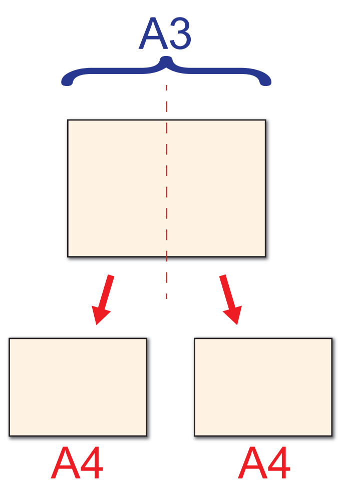
5.7a) Calcola ϕ^2. Cosa osservi?

5.7b) Calcola $\frac{1}{\phi}$. Cosa osservi?

5.7c) Approssima il valore dell'espressione infinitamente lunga $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$, calcolando prima $b_1=\sqrt{1}$, poi $b_2=\sqrt{1+b_1}$, poi $b_3=\sqrt{1+b_2}$ … (sulla calcolatrice basterà digitare ogni volta $\boxed{\sqrt{\ }}+\boxed{(}+\boxed{1}+\boxed{+}+\boxed{\text{ANS}}+\boxed{)}$). Sapresti giustificare il risultato?

5.8) I formati DIN A, cioè i famosi A3, A4, A5,…, hanno due importanti caratteristiche:

- Hanno tutti la stessa forma (il rapporto fra lato lungo e lato corto non cambia mai)
- Dividendo un foglio a metà si ottengono due fogli del "formato successivo" (*vedi figura a fianco*)



5.8a) La domanda è (*leggi anche il consiglio in basso*)…

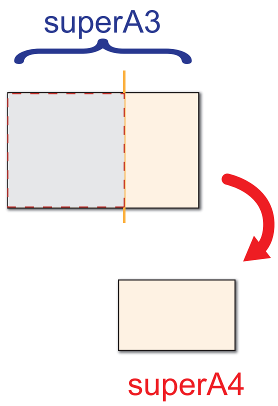
In quale rapporto stanno i lati, cioè quanto vale $\dfrac{\textit{lato lungo}}{\textit{lato corto}}$?

Consiglio: costruisci una proporzione ponendo uguale a 1 *la lunghezza del lato corto del foglio A3 e denotando con* x *la misura del suo lato lungo (in questo modo la lunghezza* x *sarà proprio uguale al rapporto cercato)*

5.8b) Verifica il risultato trovato misurando con un righello le lunghezze dei lati di un comune foglio A4.

5.8c) Al **Liceo Matematico** si vuole introdurre un nuovo formato rettangolare denominato *superA*. Esso ha le seguenti due caratteristiche:

- Tutti i rettangoli *superA* hanno la stessa forma (il rapporto fra lato lungo e lato corto non cambia mai)
- Tagliando da un foglio *superA* il quadrato costruito sul lato corto, si ottiene il formato *superA* successivo (*vedi figura a fianco*)



In quale rapporto stanno i lati, cioè quanto vale

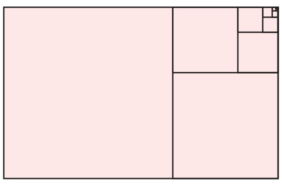
$$\frac{lato\ lungo}{lato\ corto}?$$

....

....

....

Consiglio: Come prima, poni uguale a 1 *la lunghezza del lato corto di un foglio superA3 e denota con* x *la misura del lato lungo. Fai in modo di non utilizzare altre incognite al di fuori di* x *.*



5.8d) Armato di righello, matita e forbici, costruisci un rettangolo *superA* di lato corto lungo 15 cm e verifica le proprietà che contraddistinguono il formato (*a fianco è mostrato un taglio ripetuto all'infinito*)

5.8e) Traendo ispirazione dall'ultima rappresentazione, supponendo che il lato corto del rettangolo misuri 1 e ragionando sulle aree dei quadrati via via più piccoli che si vanno a creare, stabilisci il valore della serie (infinita) $\boxed{1+\frac{1}{\phi^2}+\frac{1}{\phi^4}+\frac{1}{\phi^6}+\ldots}$? Aiuto: è utile osservare che il rapporto fra i lati dei quadrati ch

e si vanno a creare (dal maggiore a scendere) è $1/\phi$, cioè il rapporto fra lato corto e lato lungo dei rettangoli.

....

....

....

....