



L'argomento delle prossime lezioni sono le cosiddette **frazioni continue**: si tratta di uno strumento matematico potente e sottile, che ci aprirà parecchie porte e anche qualche botola segreta, sia di natura teorica che di puro e semplice calcolo. Partiamo da quest'ultimo caso e affrontiamo il più pratico dei problemi matematici, l'approssimazione numerica.

Tra i numeri più capricciosi che conoscete vi sono sicuramente $\sqrt{2}$ e π . Normalmente quando si parla di π si pensa al valore 3,14: sappiamo che si tratta soltanto di una prima approssimazione, perché π è un numero irrazionale, mentre 3,14 è il valore della seguente frazione:

$$3,14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50}$$

Volendo trovare una frazione (sempre ridotta ai minimi termini) che fornisca un'approssimazione migliore di $157/50$, si potrebbe considerare (calcolatrice alla mano) un numero maggiore di cifre dopo la virgola, per esempio $\pi = 3,1415$, e scrivere

$$3,1415 = \frac{31.415}{10.000} = \frac{6283}{2000}$$

Come c'era da aspettarsi, la maggiore precisione ha avuto il suo prezzo: la nuova frazione è composta da numeri interi più alti, è quindi più difficile da maneggiare o anche solo da memorizzare. Torniamo quindi a $157/50$ e tentiamo l'impossibile: trovare una frazione che approssimi π meglio di $157/50$ ma che sia composta da interi minori.

Per realizzare il nostro obiettivo possiamo andare a tentoni calcolando i valori numerici di tutte le frazioni con numeratore e denominatore appartenenti ad un certo intervallo. La tabella in basso mostra una prima serie di numeri con, in giallo, i valori con parte intera uguale a 3 (e che quindi sono prossimi a π). Le caselle vuote sono poste in corrispondenza di frazioni che non sono ridotte ai minimi termini e che quindi non ci interessano.

↓ D	→ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2		0,5		1,50		2,5		3,5		4,5		5,5		6,5		7,5		8,5
3		0,33	0,67		1,33	1,67		2,33	2,67		3,33	3,67		4,33	4,67		5,33	5,67
4		0,25		0,75		1,25		1,75		2,25		2,75		3,25		3,75		4,25
5		0,2	0,4	0,6	0,8		1,2	1,4	1,6	1,8		2,2	2,4	2,6	2,8		3,2	3,4

Purtroppo i numeri piccoli, comprensivi di virgola, di nuovo non spiccano nella mole complessiva di dati. Una semplice soluzione è considerare il reciproco dell'errore, con l'effetto di ribaltare “piccolo” e “grande” (nella speranza che i valori grandi si distinguano a prima vista). Consideriamo quindi per ogni N e D la seguente grandezza

$$\frac{1}{|\pi - N/D|}$$

In una tabella che contenesse i valori $1/|\pi - N/D|$ dovremmo quindi andare a caccia di valori alti e il numero da battere sarebbe $1/|\pi - 157/50| = 1/|\pi - 3,14| \approx 627,9$.

↓ D	→ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1		0,47	0,88	7,06	1,16	0,54	0,35	0,26	0,21	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07
2		0,38		0,61		1,56		2,79		0,74		0,42		0,30		0,23		0,19
3		0,36	0,40		0,55	0,68		1,24	2,11		5,22	1,90		0,84	0,66		0,46	0,40
4		0,35		0,42		0,53		0,72		1,12		2,55		9,22		1,64		0,90
5		0,34	0,36	0,39	0,43		0,52	0,57	0,65	0,75		1,06	1,35	1,85	2,93		17,12	3,87

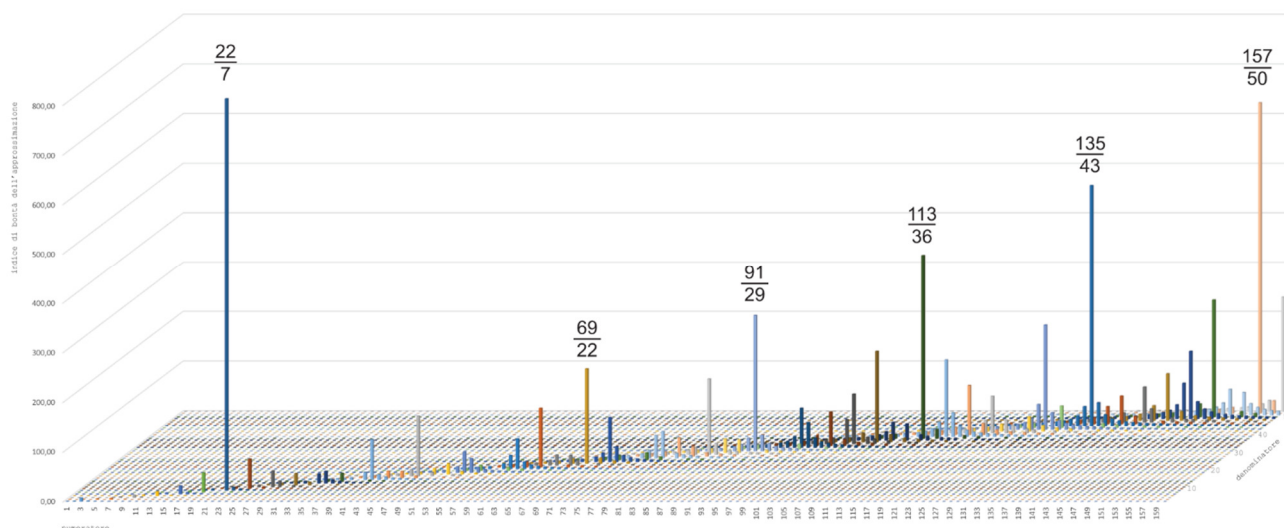
↓ D	→ N		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
--------	--------	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

3		0,46	0,40		0,31	0,28		0,24	0,22		0,19
4			0,90		0,62		0,47		0,38		0,32
5		17,12	3,87	2,18	1,52		0,94	0,79	0,69	0,60	
6			3,24		39,88				1,45		0,98
7		1,17	1,40	1,75	2,34	3,52		790,83	6,94	3,48	2,33
8			0,98		1,30		1,94		3,75		60,27
9		0,73	0,80		0,97	1,09		1,43	1,71		2,75

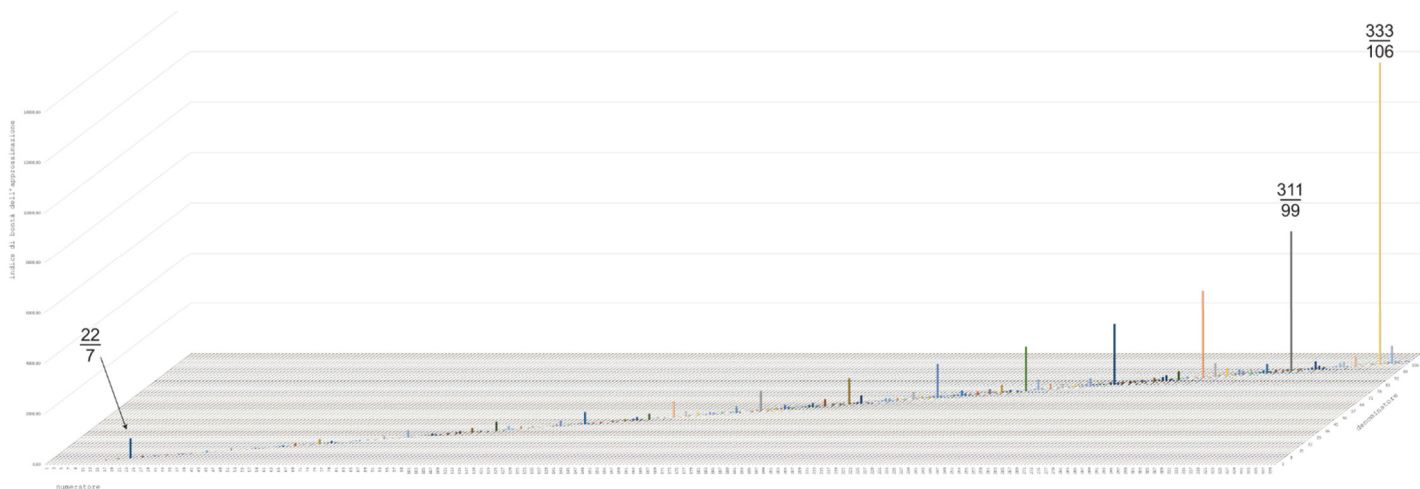
Spicca immediatamente il valore altissimo in corrispondenza della frazione $22/7$. Calcolatrice alla mano si trova che...

$$\frac{22}{7} \approx 3,143$$

con un errore assoluto rispetto a π di $|\pi - 22/7| = 0,0012\dots$. Abbiamo così trovato quello che cercavamo, un'approssimazione di π migliore di $157/50$ e anche più semplice! Per capire quanto $22/7$ sia effettivamente una buona approssimazione di π conviene convertire la tabella in un grafico: l'altezza delle colonne corrisponde all'indice di "bontà dell'approssimazione" introdotto in precedenza:



Per curiosità gettiamo uno sguardo alle prossime "migliori approssimazioni", considerando frazioni con denominatore fino a 110:



Spicca la frazione $\frac{333}{106} \approx 3,14151$ con un errore assoluto di appena $|\pi - 333/106| = 0,000083\dots$

Terminata questa prima fase “a tentoni”, cerchiamo di trovare un modo ragionato per costruire approssimazioni razionali di π atto, se possibile, a trovare subito le frazioni migliori.

La prima approssimazione (veramente dozzinale) consiste nel prendere semplicemente la parte intera di π :

$$\pi = \boxed{3} + 0,1415926535897932384\dots$$

In questo modo abbiamo approssimato π con la frazione $\frac{3}{1}$.

Per migliorare la stima, potremmo cercare di riscrivere la parte frazionaria $0,1415926535897932384\dots$ come numero razionale. Per farlo facciamo una cosa che all’inizio suonerà un po’ strana: esprimiamo la parte frazionaria in forma di **reciproco di un altro numero**. Visto che il reciproco del reciproco è il numero stesso, non resta che calcolare $1/0,1415926535897932384\dots = 7,0625133059310457698\dots$. In questo modo possiamo riformulare $3 + 0,1415926535897932384\dots$ nei seguenti termini:

$$\pi = \boxed{3} + \frac{1}{7,0625133059310457698\dots}$$

Per approssimare il numero al denominatore, possiamo procedere come abbiamo fatto all’inizio, considerando del numero $7,0625133059310457698\dots$ separatamente la parte intera e quella frazionaria. Abbiamo così...

$$\pi = \boxed{3} + \frac{1}{\boxed{7} + 0,0625133059310457698\dots}$$

Omettendo la parte frazionaria, la seconda approssimazione che abbiamo trovato è quindi $3 + \frac{1}{7}$. Indovinate di

che frazioni si tratta? Abbiamo appena trovato $\frac{22}{7}$!

Nuovamente ci riproponiamo di migliorare il risultato, cercando di riscrivere $0,0625133059310457698\dots$. Voi come fareste? Si tratta di applicare nuovamente la strategia “del reciproco”: visto che $1/0,0625133059310457698\dots = 15,9965944066857199\dots$ abbiamo

$$\pi = \boxed{3} + \frac{1}{\boxed{7} + \frac{1}{15,9965944066857199\dots}}$$

Se avete capito il procedimento, non vi sorprenderà se scrivo

$$\pi = \boxed{3} + \frac{1}{\boxed{7} + \frac{1}{\boxed{15} + 0,9965944066857199\dots}}$$

La terza approssimazione di π trovata con questo metodo è quindi

$$\boxed{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}}$$

Fermiamoci qui e riscriviamo $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$ come frazione semplice: $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{1}{\frac{106}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}$. Anche questo è un valore che abbiamo già visto in precedenza....

Continuando con il procedimento, si potrebbero trovare approssimazioni sempre più precise. Visto che π non è un numero razionale, il valore esatto non verrà mai raggiunto se non all'infinito, quando la frazione sarà diventata il “mostro” abbozzato in basso...

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

Queste espressioni si chiamano **frazioni continue**:

Definizione

Si chiama frazione continua (semplice) un'espressione nella forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

dove $a_0, a_1, a_2, a_3\dots$ è una successione di numeri interi finita o infinita. Per indicare sinteticamente la frazione continua definita dalla successione $a_0, a_1, a_2, a_3\dots$ si scrive $[a_0; a_1, a_2, a_3\dots]$.

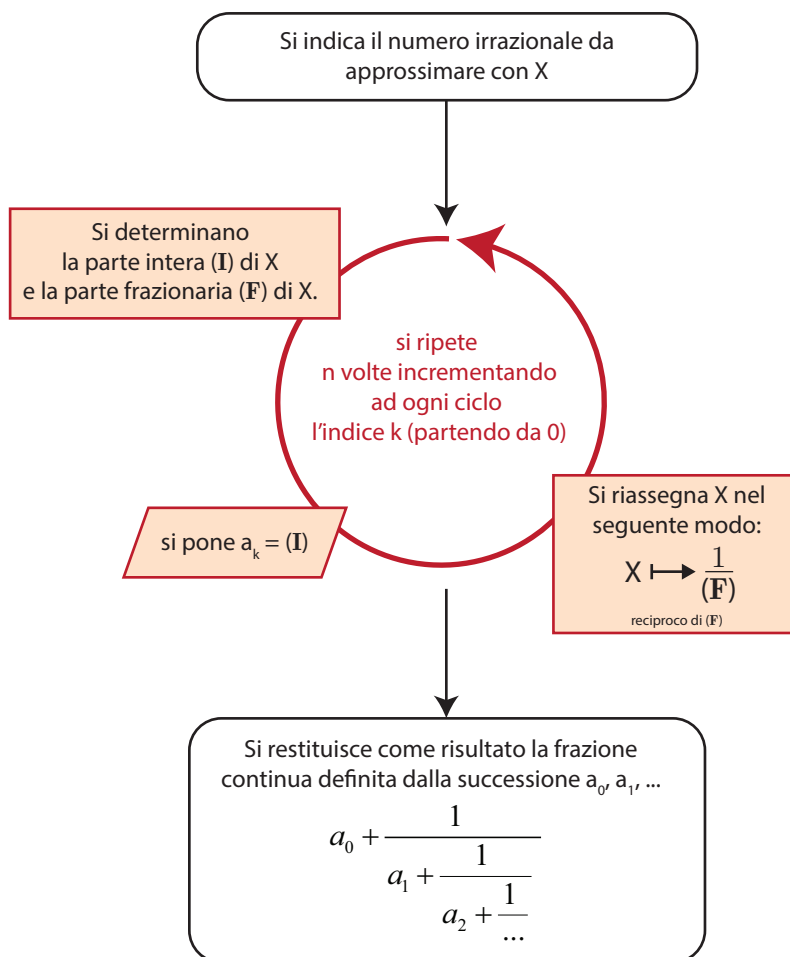
Calcolo (vedi anche diagramma in basso)

Per determinare la frazione continua associata ad un numero k si eseguono ripetutamente le seguenti due operazioni (come vedremo, se il numero k è razionale, il processo ha termine quando la frazione ha assunto il valore esatto di k , altrimenti il processo è infinito):

- 1) Si prende la parte intera del numero come approssimazione del numero stesso.
- 2) Della parte frazionaria rimanente (se c'è), si considera il reciproco e lo si scrive al denominatore di una frazione con numeratore 1 (in questo modo è stato fatto un semplice gioco di riscrittura). Questo reciproco è sicuramente un numero maggiore di 1, il che permette di ripetere il procedimento (passando nuovamente al primo punto).

Calcolo dei coefficienti della frazione continua

descrizione schematica dell'algoritmo per la determinazione dei primi n coefficienti della frazione continua associata ad un numero irrazionale.



Definizione

Dato un numero n , si chiama *frazione continua ridotta (ottenuta da n)*, una frazione continua $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_\omega]$ generata applicando ω volte il metodo sopra descritto.

4.2) Calcolatrice alla mano, approssima i numeri irrazionali sotto indicati con una frazione continua ridotta a tre passaggi del tipo $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$ e scrivi il risultato nella notazione $[a_0; a_1, a_2]$

[illegible]

d) $[2; 1, 2]$

[illegible]

Soluzioni: a) $\frac{31}{9}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{22}{13}$

- 1) Gli inevitabili errori di calcolo che si commettono con la calcolatrice troncando le cifre, sono talmente alti da rendere insensato lo sviluppo della frazione continua oltre i primi 3 passaggi
- 2) Sebbene la frazione continua permetta di riscrivere i numeri in termini di frazioni anziché di cifre decimali (il che è una cosa positiva), ciò è possibile solo perché, a monte, una calcolatrice fornisce le cifre decimali necessarie al calcolo. Non pare possibile ottenere con la tecnica delle frazioni continue approssimazioni migliori di quanto non si possa già fare leggendo le cifre sul display.

Queste obiezioni sono ovviamente entrambe ragionevoli e sembrano ridurre il tema “frazioni continue” a un semplice esercizio di riscrittura, un giochino atto a creare le frazioni “migliori” e nulla più. È merito di alcuni celebri matematici aver scoperto e dimostrato un fenomeno molto interessante, che presto si manifesterà sotto i vostri occhi:

4.4a) Sviluppa in frazione continua - ridotta inizialmente a tre passaggi - il numero irrazionale $\sqrt{2}$, prestando grande attenzione alle cifre che via via compaiono. Cosa noti?

4.4b) Secondo te, come sono fatti gli infiniti numeri che compaiono nella rappresentazione di $\sqrt{2}$ in frazione continua?

Definizione

Sia chiama frazione continua periodica e si indica con il simbolo del periodico $\left[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \right]$ una frazione continua nella quale una sequenza di coefficienti (la successione sotto la linea) si ripete all'infinito.

Riguardando bene i primi calcoli, abbiamo ottenuto che

$$\sqrt{2} = 1 + 0, \boxed{414213562\dots} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{0,414213562\dots}} = 1 + \frac{1}{2, \boxed{414213562\dots}}$$

In altre parole, sembrerebbe che il reciproco di $\sqrt{2} - 1 = 0,414213562\dots$ sia proprio $\sqrt{2} + 1 = 2,414213562\dots$. Per dimostrare che due numeri sono l'uno il reciproco dell'altro, basta dimostrare che il loro prodotto faccia....1.

4.5) Calcoliamo $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)$ utilizzando la proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma e rispondendo alla seguente domanda: secondo voi, per definizione, quanto fa il quadrato il $\sqrt{2}$?

$$(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2})^2 + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}} - 1 = \dots$$

A questo punto è importante sottolineare che “siamo in grado di battere la calcolatrice”. L'espressione $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ permette di costruire frazioni che approssimano $\sqrt{2}$ con una precisione a piacere, ben al di sopra delle cifre che stanno su un display !

C'è ora da chiedersi se quello che abbiamo visto dipende dalle peculiari caratteristiche di $\sqrt{2}$ o ha validità generale (magari per qualsiasi numero, π compreso). La verità sta nel mezzo e il seguente teorema ci assicura che “la magia” della frazione continua periodica si manifesta sicuramente per tutti i numeri del tipo $\sqrt{K}$ (dove $K \in \mathbb{N}$ non è un quadrato perfetto).

Teorema di Lagrange (semplificato)

La radice quadrata di un numero intero si sviluppa sempre in frazione continua periodica.

4.7) Trova gli sviluppi in frazione continua delle seguenti radici quadrate (le righe colorate corrispondono a casi dal periodo più lungo):

Numero irrazionale da approssimare	Frazione continua periodica
$\sqrt{2}$	$[1; \overline{2}]$
$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}$	
$\sqrt{6}$	

Numero irrazionale da approssimare	Frazione continua periodica
$\sqrt{7}$	
$\sqrt{8}$	
$\sqrt{10}$	
$\sqrt{19}$	

Anche se a prima vista può apparire bizzarro, è possibile usare le frazioni continue per approssimare un numero razionale con un altro numero razionale con denominatore minore. L'uso di frazioni continue per approssimare dei rapporti razionali fu usata ad esempio da Huygens (1629-1695) (e descritta dallo stesso autore nell'opera *Descriptio Automati Planetarii*) nella progettazione delle ruote dentate del suo planetario meccanico. Per descrivere l'orbita di Saturno, Huygens aveva infatti bisogno di due ruote dentate che avessero un rapporto fra gli ingranaggi di $29,43$. Avrebbe potuto progettare una ruota da 2943 e un'altra da 100 denti, ma ciò avrebbe reso il macchinario troppo grande, troppo difficile da costruire e quindi (paradossalmente) impreciso. Sviluppando $29,43$ in frazione continua ottenne invece..

$$29,43 = 29 + 0,43 = 29 + \frac{1}{2,325\dots} = 29 + \frac{1}{2 + 0,325\dots} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3,071\dots}} \cong 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \text{ cioè } 29 + \frac{3}{7} = \frac{206}{7}.$$

Fece quindi costruire una ruota da 206 denti e un'altra da 7, per un rapporto di $29,428\dots$, quasi perfetto.

Vediamo ora un altro sviluppo in frazione continua del numero razionale $8/3$:

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \text{ cioè } \frac{8}{3} = [2; 1, 2]$$

Rispetto all'approssimazione di π (numero irrazionale) emergono subito 2 differenze:

- 1) Tutti i calcoli vengono svolti nella notazione delle frazioni: non c'è alcuna perdita di cifre significative e il procedimento può essere iterato indefinitamente senza incorrere in errori.
- 2) L'approssimazione può avere una conclusione (vedremo che anzi ce l'ha sempre).

4.8) Sviluppa i seguenti numeri razionali in frazione continua:

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{19}{7}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{2}{7}$

e) $\frac{11}{8}$

Soluzioni

a) $\frac{7}{5} = [1; 2, 2]$
 b) $\frac{19}{7} = [2; 2, 3]$
 c) $\frac{3}{2} = [1; 2]$
 d) $\frac{2}{7} = [0; 3, 2]$
 e) $\frac{11}{8} = [1; 2, 1, 1]$

4.9a) Riscrivi $\frac{23}{5}$ come frazione continua.

4.9b) Usa l'algoritmo euclideo (con la divisione) per trovare l'MCD tra 23 e 5
(→)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>
23	5		

4.9c) Osserva bene la colonna dei quozienti (colonna *Q*) appena compilata e confrontala con la frazione continua relativa al caso $23 / 5$, Quali analogie osservi?

4.10) Sapresti spiegare il motivo del legame fra frazioni continue di numeri razionali e calcolo del massimo comun divisore con l'algoritmo di Euclide (delle divisioni successive)?

A questo punto siamo anche in grado di spiegare perché il metodo delle frazioni continue applicato ad un numero razionale prima o poi necessariamente di interrompe generando la frazione esatta: la finitezza della frazione continua deriva dalla finitezza del metodo di Euclide!

4.11) Utilizza l'algoritmo euclideo per determinare la frazione continua associata alle seguenti frazioni semplici (e verifica in ciascun caso il risultato),

a) $\frac{23}{6}$

b) $\frac{17}{5}$

c) $\frac{15}{7}$

d) $\frac{14}{11}$

e) $\frac{14}{10}$

f) $\frac{30}{23}$

4.12) Alla luce del discorso fatto in classe sul rapporto tra numeri razionali e frazioni continue finite, sapresti dire che tipi di numeri sono i seguenti (razionali o irrazionali)?

a) $[1; 2, 3, 4, 5]$

b) $[1; 2, 3, \overline{4, 5}]$

c) $\sqrt{2}$

SCHEMI PER L'APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO EUCLIDEO

[illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible]

A	B	Q	R

SCHEMI PER L'APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO EUCLIDEO

[illegible][illegible][illegible][illegible]

A	B	Q	R

[illegible][illegible][illegible][illegible]