Nella seguente tabella sono riportati i primi trenta numeri di Fibonacci:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
F_n	10.946	17.711	28.657	46.368	75.025	121.393	196.418	317.811	514.229	832.040

11.1) Calcola i massimi comun divisori della tabella sottostante. Il modo migliore di procedere è di usare l'algoritmo di Euclide con la divisione (per lo svolgimento puoi servirti delle tabelle di calcolo e di una calcolatrice),

a) $MCD(F_{11};F_{20})$ **b)** $MCD(F_{25};F_{15})$ **c)** $MCD(F_{12};F_{8})$ **d)** $MCD(F_{13};F_{26})$

e) $MCD(F_{30};F_{24})$ **f)** $MCD(F_{16};F_{24})$ **g)** $MCD(F_{14};F_{28})$ **h)** $MCD(F_{30};F_{20})$

i) $MCD(F_{20};F_{16})$ **j)** $MCD(F_{29};F_{7})$ **k)** $MCD(F_{15};F_{9})$ **l)** $MCD(F_{24};F_{12})$

TABELLE DI CALCOLO PER IL MCD CON L'ALGORITMO DI EUCLIDE (con la divisione)

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

Maggiore	Minore	Q	R

11.2a) Osserva bene tutti i massimi comun divisori che hai ottenuto nell'esercizio precedente: di che numeri si tratta?

11.2b) Sapresti trovare una regola generale che permetta di calcolare $MCD(F_k; F_n)$ a partire dalla successione di Fibonacci e dai due indici k, n ? *Nota bene: nel seguito si trova la risposta a questa domanda, cerca quindi di non sbriciare!*

$$MCD(F_k; F_n) =$$

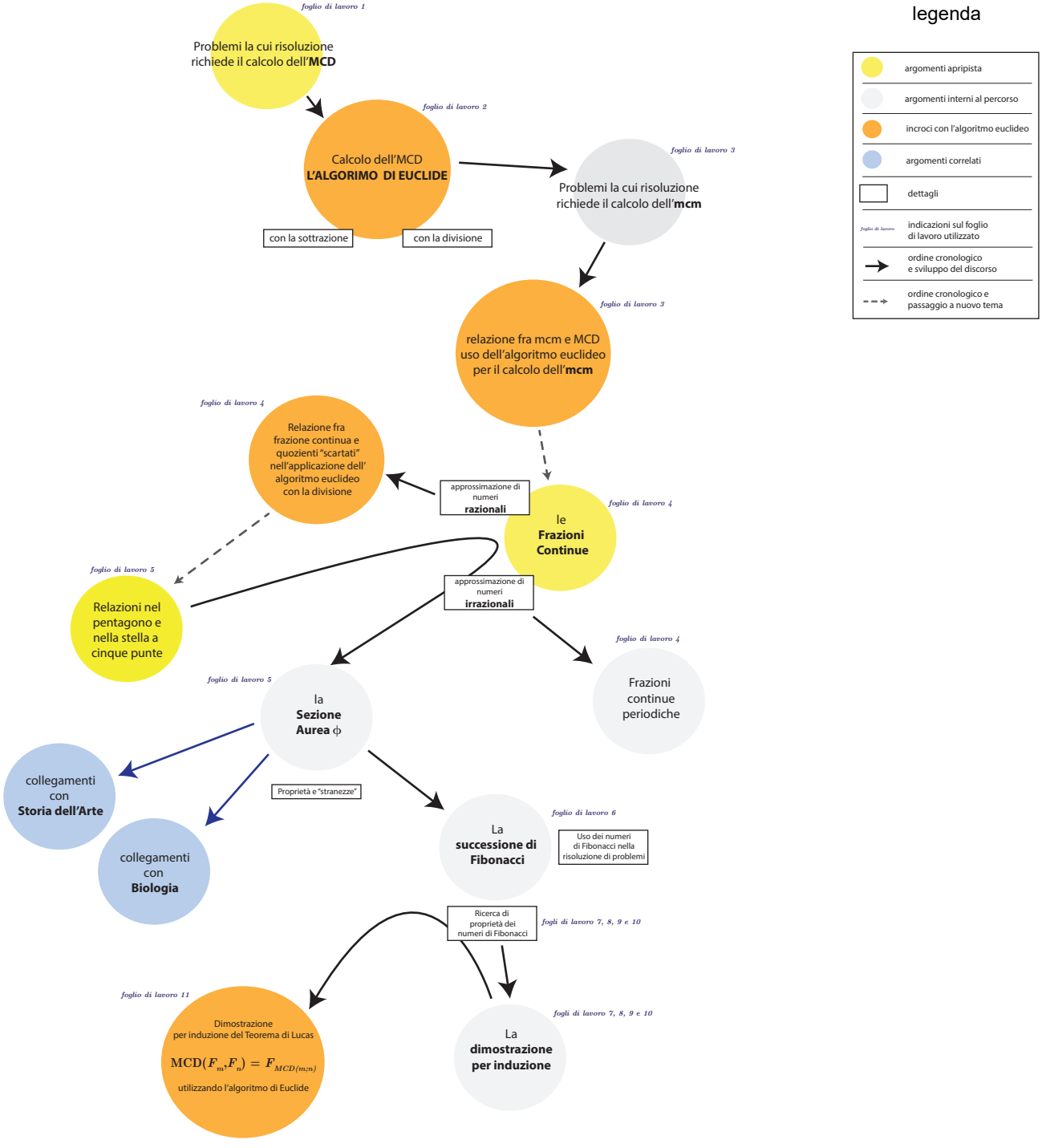
Per evitare il rischio che la soluzione dell'ultimo quesito venga letta per sbaglio, è opportuno forzare un cambiamento di pagina. A questo scopo sono state inserite le immagini raffiguranti i due matematici citati negli ultimi fogli di lavoro: si tratta di Fibonacci (a sinistra) e Lucas (a destra). Anche il risultato che riguarda il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci è opera di Lucas.

Leonardo Pisano detto "Fibonacci"
Pisa, ca.1175 – Pisa, ca.1235

François Édouard Anatole Lucas
Amiens (Francia), 1842 – Parigi, 1891

Siamo quasi arrivati alla fine del nostro percorso, che ci ha portati ad utilizzare l'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore in contesti diversi: dall'MCD all'mcm per la risoluzione di problemi di varia natura, dalla determinazione rapida delle frazioni continue per numeri razionali all'analisi della frazione continua periodica $\left[1;\overline{1}\right]$ e così alla scoperta della sezione aurea e della successione di Fibonacci e infine alla dimostrazione per induzione. Il gran finale consisterà nella discussione della magnifica proprietà incorniciata nella prossima pagina e nella sua dimostrazione (sempre per induzione), che – indovinate un po' – fa uso ancora una volta dell'algoritmo di Euclide! Ecco qui in basso il quadro di tutto il percorso che abbiamo compiuto.

Mappa dell'unità didattica
L'ALGORITMO EUCLIDEO DA N a R



Teorema di Lucas sul massimo comun divisore fra due numeri di Fibonacci

Il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci è anch'esso un numero di Fibonacci e il suo indice è il massimo comun divisore degli indici dei primi due. In simboli…

$$MCD\left(F_m ; F_n\right) = F_{MCD(m;n)}$$

Premessa

La dimostrazione di questa notevole proprietà si basa sull'algoritmo di Euclide (con la sottrazione) e sulle proposizioni elencate in basso. Per completezza, ricordiamo su questo foglio anche la dimostrazione del passaggio centrale dell'algoritmo euclideo:

PROPOSIZIONI "BASE" PER LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI LUCAS

UGUAGLIANZA DELL'ALGORITMO EUCLIDEO Se $a,b \in \mathbb{N}$ e $a > b$, allora $MCD(a,b) = MCD(a-b,b)$

L1) Il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci vicini è 1, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $MCD\left(F_n, F_{n+1}\right) = 1$ (*dimostrata per esercizio nell'ultimo incontro*).

L2) Per ogni $m,n \in \mathbb{N}$ vale la seguente uguaglianza: $F_{m+n+1} = F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1}$ (*abbiamo già dimostrato anche questa proposizione e le abbiamo dato il nome di* ***relazione di simmetria***).

L3) Siano A,n,m tre numeri naturali. Se m e n sono primi fra loro (cioè se $MCD(m,n) = 1$), allora $MCD\left(A,n\right) = MCD\left(A \cdot m, n\right)$.

L4) Siano A,B,n,m quattro numeri naturali. Se m e n sono primi fra loro (cioè se $MCD(m,n) = 1$), allora $MCD\left(A \cdot n + B \cdot m, n\right) = MCD\left(B,n\right)$.

<u>Dimostrazione dell'uguaglianza alla base dell'algoritmo euclideo</u>

Se d è un divisore comune di due numeri naturali A e B, si può scrivere $A = a \cdot d$ e $B = b \cdot d$, con $a,b \in \mathbb{N}$. Ora, $(a-b) \cdot d$ è chiaramente divisibile per d, e svolgendo il prodotto si vede che $(a-b) \cdot d = a \cdot d - b \cdot d = A - B$. Abbiamo così dimostrato <u>se due interi sono divisibili per un certo numero, lo è</u>

anche la differenza. Partendo da $(a+b)\cdot d$ si dimostra invece che se due interi sono divisibili per un certo numero, lo è anche la somma. Ciò detto, abbiamo che…

N e M hanno per differenza $N-M$	$\Rightarrow$	ogni divisore comune di N e M è anche un divisore di $N-M$
$N-M$ e M hanno per somma N	$\Rightarrow$	ogni divisore comune di $N-M$ e M è anche un divisore di N
N e $N-M$ hanno per differenza M	$\Rightarrow$	ogni divisore comune di N e $N-M$ è anche un divisore di M

In pratica, scelti due qualsiasi fra i tre interi $N, M, N-M$, il loro divisori comuni dividono l'altro numero. Le tre coppie condividono così tutti e soli i divisori comuni e quindi anche il massimo di tali divisori, che è appunto il massimo comun divisore.

Dimostrazione di L3

Per chiarezza indichiamo $MCD(A\cdot m, n)$ con d. Visto che, per definizione, $MCD(A,n)$ è un divisore anche di $MCD(A\cdot m, n)$, si ha che $MCD(A,n)\le d$. d può contenere soltanto fattori primi che stanno in n (altrimenti non sarebbe un divisore di n). Nessuno di essi divide m, perché altrimenti n e m avrebbero un divisore in comune e quindi d, per dividere il prodotto $A\cdot m$, deve dividere A. Ma allora d è un divisore di $MCD(A,n)$ e quindi $d\le MCD(A,n)$. Le due disequazioni $MCD(A,n)\le d$ e $d\le MCD(A,n)$ messe insieme ci assicurano che $MCD(A,n)=d$.

Dimostrazione di L4

Per calcolare $MCD(A\cdot n+B\cdot m, n)$ possiamo applicare l'algoritmo euclideo A volte, fino ad arrivare a $MCD(B\cdot m, n)$. A questo punto tocca ricordare che per ipotesi $MCD(m,n)=1$: grazie alla proposizione L3 si ha $MCD(B\cdot m, n)=MCD(B,n)$, il che conclude la dimostrazione.