



Sappiamo, per definizione di numero di Fibonacci, che $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, cioè $\boxed{1} \cdot F_n + \boxed{1} \cdot F_{n+1} = F_{n+2}$. Strada facendo abbiamo trovato risultati simili (per completezza è elencato anche il caso appena citato):

$$\boxed{1} \cdot F_n + \boxed{1} \cdot F_{n+1} = F_{n+\boxed{2}}$$

$$\boxed{1} \cdot F_n + \boxed{2} \cdot F_{n+1} = F_{n+\boxed{3}}$$

$$\boxed{2} \cdot F_n + \boxed{3} \cdot F_{n+1} = F_{n+\boxed{4}}$$

$$\boxed{3} \cdot F_n + \boxed{5} \cdot F_{n+1} = F_{n+\boxed{5}}$$

Ne emerge una regolarità che ci consente di formulare la seguente congettura:

$$\boxed{F_M} \cdot F_n + \boxed{F_{M+1}} \cdot F_{n+1} = F_{\boxed{M+n+1}} \text{ con } M, n \in \mathbb{N}$$

* nota bene: in questi fogli di lavoro si è sempre scelta la seguente notazione: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

La congettura non solo è effettivamente corretta (e quindi merita l'appellativo di proposizione), ma come vedremo è utile per derivare altre importanti proprietà dei numeri di Fibonacci. La sua dimostrazione per induzione introduce però una novità: le variabili presenti nell'enunciato sono ben due, M e n . D'altro canto noi abbiamo già dimostrato la proposizione per tutti e quattro i casi elencati sopra (che corrispondono ai valori $M = 1, 2, 3, 4$), nel senso che per essi la proposizione risulta corretta per ogni $n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione per induzione si baserà quindi sull'implicazione $P(M) \Rightarrow P(M+1)$ dove $P(M)$ è l'affermazione che per un certo $M \geq 0$ vale che

$$\text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \boxed{F_M} \cdot F_n + \boxed{F_{M+1}} \cdot F_{n+1} = F_{\boxed{M+n+1}}$$

Si dice in questo caso che la dimostrazione è fatta **per induzione su M** .

STRUTTURA DELLA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE DI PROPOSIZIONI CON DUE VARIABILI

TESI: $P(n, M)$ è vero per ogni $n, M \in \mathbb{N}$

L'induzione avviene soltanto su una delle due variabili, poniamo in questo schema che si tratti di M . In questo modo, la proposizione da dimostrare non sarà più strutturata come ...

“per ogni $n, M \in \mathbb{N}$ vale $P(n, M)$ ”

... ma come ...

“per ogni $M \in \mathbb{N}$ vale $P(M)$ ”

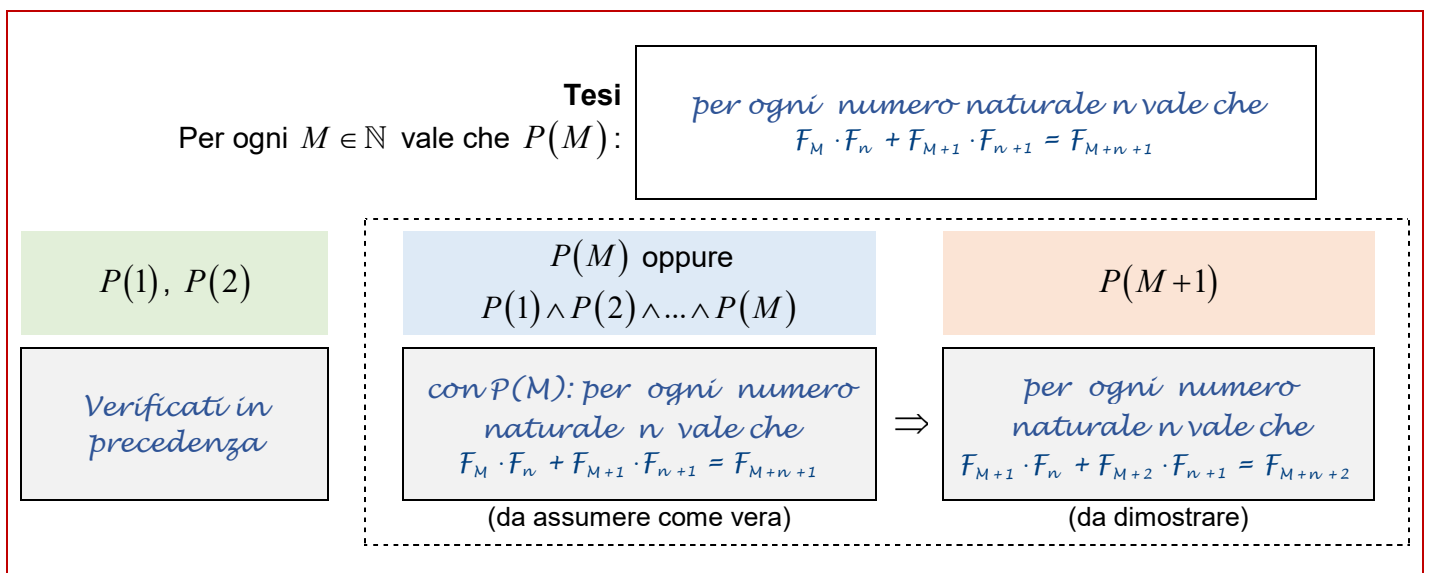
dove $P(M)$ è “ $P(n, M)$ per ogni n ”.

Questa struttura ha delle conseguenze nella dimostrazione: verifiche iniziali e passo induttivo devono valere **per ogni** $n \in \mathbb{N}$.

La prossima dimostrazione (svolta insieme all'insegnante) chiarirà questo aspetto.

9.1) Dimostra per induzione semplice su M oppure (a scelta) per induzione forte su M la proposizione:

$$F_M \cdot F_n + F_{M+1} \cdot F_{n+1} = F_{M+n+1} \text{ con } M, n \in \mathbb{N}$$



Dimostrazione del passo induttivo

Arrivati a questo punto, abbiamo dimostrato un buon numero di risultati che riguardano la successione di Fibonacci. Visto che ogni proposizione, una volta dimostrata, può essere utilizzata all'interno di altre dimostrazioni, avanzando nel percorso diventiamo sempre più "potenti" e la complessità dei teoremi che possiamo affrontare aumenta. È quindi opportuno elencare le proposizioni principali dimostrate fin qui e tenerle sempre a mente.

P1: Identità di Cassini

$$(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

P2: Proprietà della somma

Posto $S(n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ si ha
che $S(n) = F_{n+2} - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

P3: Rappresentazione dei quadrati

$$(F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_{n-1} \cdot F_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 2$$

P4: Proprietà della somma dei numeri di Fibonacci di indice dispari

Posto $D(n) = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$ si ha che $D(n) = F_{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

P5: Proprietà della somma dei quadrati

Posto $Q(n) = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$ si ha che $Q(n) = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

P6: Relazione di simmetria

$$F_M \cdot F_n + F_{M+1} \cdot F_{n+1} = F_{M+n+1} \text{ per ogni } n, M \in \mathbb{N}$$

P7: MCD fra numeri di Fibonacci "vicini"

$$MCD(F_{n+1}; F_n) = 1 \text{ e } MCD(F_{n+2}; F_n) = 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

9.2) Mettiamo alla prova le nostre capacità e cerchiamo di dimostrare nuove proposizioni relative ai numeri di Fibonacci, sia per **induzione (semplice o forte)**, sia senza (in questo caso distinguiamo fra dimostrazione **diretta** e **per assurdo**). Nel seguente elenco sono riportate alcune proposizioni e alcuni consigli per lo svolgimento; si tratta di suggerimenti che ovviamente possono essere ignorati, esistono infatti molti modi diversi per dimostrare una proposizione. *Nota bene: puoi utilizzare una certa proposizione P all'interno di una dimostrazione, soltanto dopo aver dimostrato P. L'ordine di svolgimento non è quindi del tutto arbitrario.*

Nell'esercizio vengono usate le seguenti notazioni:

Simbolo	Espressione	Spiegazione	Esempio
$S(n)$	$S(n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci. Chiamiamo $S(n)$ <i>successione somma</i> .	$S(3) = F_1 + F_2 + F_3 =$ $= 1 + 1 + 2 = 4$
$D(n)$	$D(n) = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice dispari	$D(3) = F_1 + F_3 + F_5 =$ $= 1 + 2 + 5 = 8$

$p(n)$	$p(n) = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice pari	$P(3) = F_2 + F_4 + F_6 = 1 + 3 + 8 = 12$
$Q(n)$	$Q(n) = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$	Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci	$Q(3) = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
$SS(n)$	$SS(n) = S(1) + S(2) + \dots + S(n)$	Somma delle prime n successioni somma (vedi sopra)	$SS(3) = S(1) + S(2) + S(3) = \{F_1\} + \{F_1 + F_2\} + \{F_1 + F_2 + F_3\} = \{1\} + \{1+1\} + \{1+1+2\} = 7$

	Proposizione	Suggerimenti per la dimostrazione
P8)	$S(n+1) + F_n = 2 \cdot S(n) + 1$ per $n \in \mathbb{N}$	Per induzione semplice
P9)	$F_3 \cdot F_{n+2} - F_1 \cdot F_n = F_{n+3}$ per $n \in \mathbb{N}$	Diretta
P10)	$F_4 \cdot F_{n+2} - F_2 \cdot F_n = F_{n+4}$ per $n \in \mathbb{N}$	Diretta
P11)	$F_{M+2} \cdot F_{n+2} - F_M \cdot F_n = F_{M+n+2}$ per $M, n \in \mathbb{N}$	Per induzione forte su M oppure per induzione semplice su M e P6 (i casi $M=1$ e $M=2$ corrispondono alle due proposizioni precedenti P9 e P10)
P12)	$p(n) = F_{2n+1} - 1$ per $n \in \mathbb{N}$	Per induzione semplice (oppure diretta utilizzando P2 e P4)
P13)	$D(n) \cdot [p(n) + 1] = Q(2n)$ per $n \in \mathbb{N}$	Diretta (utilizzando proposizioni già dimostrate).
P14)	$SS(n) = F_{n+4} - n - 3$ per $n \in \mathbb{N}$	Per induzione semplice e P2

9.3) Dimostra per induzione semplice che $\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1} = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (nel riquadro in basso avvertenze e suggerimenti).

Avvertenze e suggerimenti:

È più agevole dimostrare l'uguaglianza "girata" $\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}$

Durante la dimostrazione sarà necessario ricordare un'identità relativa alla sezione aurea vista un po' di tempo fa: $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ (da usare nei due sensi).

Per ogni $A \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale l'identità $A^{n+2} + A^{n+1} = A \cdot (A^{n+1} + A^n)$.

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$$\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}$$

$P(1)$

?

(da verificare)

$P(n)$

!

(da assumere come vera)

$\Rightarrow$

$P(n+1)$

?

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

9.4) Utilizzando le identità già dimostrate $\left(-1/\phi\right)^{n-1} + \left(-1/\phi\right)^n = \left(-1/\phi\right)^{n+1}$, $\phi^{n-1} + \phi^n = \phi^{n+1}$ (quest'ultima vista un po' di tempo fa) e $1/\phi = \phi - 1$, è possibile dimostrare per induzione forte, il teorema scritto in basso. Si tratta di una dimostrazione che richiede un'ottima manualità algebrica e viene presentata soltanto come sfida ai "solutori più abili" (per la dimostrazione vedi nota in basso)

(P15) Teorema: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'identità $F_n = \frac{1}{2\phi-1} \cdot \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$

Nota bene: per facilitare la dimostrazione, si assume che valga $F_0 = 0$ in modo da estendere il teorema a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. È importante osservare che questa aggiunta alla successione di Fibonacci non ne modifica la legge ricorsiva, visto che $F_0 + F_1 = F_2$. Questo fa di $F_0 = 0$ un'estensione naturale della successione e preserva la correttezza del procedimento induttivo (che si basa appunto sull'identità $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$). Ultima annotazione: durante la dimostrazione sarà utile tenere presenti le seguenti (banali) identità:

$$\frac{1}{2\phi-1} \cdot A + \frac{1}{2\phi-1} \cdot B = \frac{1}{2\phi-1} \cdot (A+B) \quad \text{e} \quad -A-B = -(A+B)$$

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale che $P(n)$:

$$F_n = \frac{1}{2\phi-1} \cdot \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$$

$P(0)$ e $P(1)$

?

?

(da verificare)

$P(1), P(2), \dots$, fino a $P(n)$

!

(da assumere come vera)

$\Rightarrow$

$P(n+1)$

?

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

9.5) Nel nostro percorso abbiamo già incontrato una dimostrazione errata. Qui in seguito vengono proposte altre dimostrazioni sbagliate (non tutte per induzione): trova in ciascun caso l'errore!

9.5a) Tutti i numeri naturali (compreso lo 0) sono pari

Chiamiamo $P(n)$ il predicato “ n è pari” e dimostriamo (si fa per dire) per induzione forte che $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \dots\}$.

- 1) Verifica: $P(0)$ è l'affermazione “0 è pari” ed è corretta
- 2) Supponiamo che tutti i numeri fino ad un certo n siano pari e consideriamo il numero $n+1$. Basterà ora scrivere $n+1$ come somma di due numeri minori A e B . Per ipotesi induttiva sia A che B sono pari per cui lo sarà anche la loro somma $n+1$, il che dimostra l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi l'affermazione.

9.5b) Dati comunque n numeri naturali, essi sono uguali fra loro¹

- 1) Dimostrazione (per induzione): per $n = 1$ [l'affermazione] è vera, perché ogni numero è uguale a se stesso.
- 2) Supponiamo che ogni insieme di k elementi $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ sia formato da elementi tutti uguali fra loro: $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. Consideriamo allora un elemento a_{k+1} . L'insieme $\{a_2, \dots, a_{k+1}\}$ è formato da k elementi e quindi essi sono tutti uguali fra loro: $a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$. Perciò per la transitività dell'[uguaglianza]: $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$. L'insieme di $k+1$ elementi $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ è quindi formato da elementi tutti uguali fra loro.

¹ Tratto da Maraschini, Menghini, Palma, “La lente di ingrandimento 1 :Strategie Matematiche: costruire dimostrare”, Pitagora Editrice Bologna, 1996, p.105

9.5c) Se la principessa dorme, dorme per sempre

Chiamiamo $P(n)$ il predicato “nell’attimo n la principessa sta dormendo”, indichiamo con “attimo 0” un momento qualsiasi durante il sonno e denotiamo con “attimo R ” l’ipotetico momento del risveglio. Noi dimostreremo che $P(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e che quindi R non arriverà mai.

- 1) Verifica: $P(0)$ è corretto per definizione di “attimo 0”.
- 2) Supponiamo che l’affermazione $P(n)$ sia vera per un certo valore n (cioè la principessa sta ancora dormendo al momento n). L’attimo n non è quindi il momento del risveglio R , ciò vuol dire che fra n e R intercorre del tempo. Scegliamo un attimo qualsiasi interno a questo intervallo e denotiamo tale momento come “attimo $n+1$ ”. Si tratta di un momento di sonno, il che dimostra $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e conclude la dimostrazione.

9.5d) Tutte le città sono piccole

Chiamiamo $P(n)$ il predicato “una città con n abitanti è piccola” e dimostriamo per induzione che $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Verifica: $P(1)$ è l’affermazione “una città con un solo abitante è piccola”. Essa è certamente corretta dal momento che non possono esistere città con meno di un abitante.
- 2) Supponiamo che l’affermazione $P(n)$ sia vera per un certo valore n . Aggiungendo un abitante ad una città piccola essa resta tale, per cui è vero anche $P(n+1)$, il che conclude la dimostrazione.

9.5e) L’unico numero pari è il 2

Chiamiamo $P(n)$ il predicato “nell’insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ non esiste numero pari al di fuori del 2” e dimostriamo per induzione forte che $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Verifica: $P(1)$ è l’affermazione che riguarda il solo numero 1 ed è quindi banalmente vera. Per fugare ogni sospetto sulla pertinenza di $P(1)$ con l’enunciato generale (l’insieme numerico preso in considerazione in $P(1)$ non contiene il “2”), basta osservare che è verificata anche $P(2)$.
- 2) Supponiamo che $P(n)$ sia vero fino ad un certo numero n e consideriamo il caso $n+1$. Ora, $n+1$ potrebbe essere primo o no. Nel primo caso, l’affermazione che vogliamo dimostrare sarebbe già confermata (tra i numeri primi effettivamente il 2 è l’unico pari), per cui possiamo eliminare dal discorso i numeri primi; dobbiamo quindi supporre che $n+1$ sia composto, cioè che esistano altri numeri A, B minori di $n+1$ tali che $A \cdot B = n+1$. Avendo eliminato dal ragionamento i numeri primi (e quindi anche il 2), per ipotesi induttiva A, B (entrambi minori di $n+1$) devono essere dispari e quindi deve esserlo anche il loro prodotto $A \cdot B = n+1$. Del resto se l’unico numero pari dell’insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ è il 2 (e questa è l’ipotesi induttiva) e $n+1$ è dispari, allora anche in $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ l’unico numero a essere pari è il 2. Resta allora provato che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e quindi l’affermazione.

9.5f) Non esistono numeri irrazionali

Stavolta non ragioniamo per induzione ma dimostriamo l'affermazione per assurdo: supponiamo quindi che i numeri irrazionali esistano e indichiamo con R il primo numero irrazionale positivo. Ponendo $q = R/2$, si vede che q è positivo e minore di R e quindi è sicuramente un numero razionale. Del resto R è il doppio di q e il doppio di un numero razionale è anch'esso razionale, in contraddizione con la definizione stessa di R . Questo dimostra che R non può esistere. Ora, se non esiste il più piccolo numero irrazionale positivo, l'insieme dei numeri irrazionali positivi non inizia mai e quindi semplicemente non esistono numeri irrazionali positivi. Del resto, se esistessero numeri irrazionali negativi, il loro opposto sarebbe un irrazionale positivo e quindi non esistono nemmeno numeri irrazionali negativi, il che conclude la dimostrazione.

9.5g) $1=0$

Non ragioniamo per induzione ma dimostriamo l'affermazione direttamente. Indichiamo con H l'espressione impossibile $1/0$. Come vedremo, alla fine dello svolgimento H verrà semplificata, "uscendo dall'enunciato": il fatto che sia o meno una quantità esistente è quindi del tutto irrilevante. Consideriamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\boxed{1+H} = 1 + \frac{1}{0} = \frac{1 \cdot 0 + 1}{0} = \frac{1}{0} = H = \boxed{0+H}$$

Essa si basa sulle consuete regole algebriche e mostra che $1+H=0+H$. Togliendo H dall'uguaglianza si ottiene proprio $1=0$.

9.5h) $\mathbb{N}$ è un insieme finito

Introduciamo l'insieme $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ e ragioniamo per induzione su n .

A_1 è evidentemente finito. Se A_n è finito lo è anche A_{n+1} (che ha un elemento in più di A_n).

Ciò dimostra che A_n è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, visto che $\mathbb{N} = A_\infty$, abbiamo dimostrato la tesi.