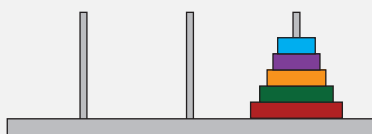
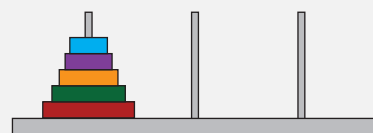




Nella storia delle successioni matematiche, non si può non parlare di *Lucas*: si tratta di un illustre matematico francese (Édouard Lucas) vissuto nel 19° secolo. A lui va il merito di aver battezzato la sequenza 1,1,2,3,5,8,... “successione di Fibonacci”, a riconoscimento dell'utilizzo che il matematico italiano ne fece nel *Liber Abaci*.

Una celebre creazione di Lucas è la *torre di Hanoi*, un rompicapo matematico che si inserisce molto bene nel nostro percorso sulla dimostrazione per induzione:

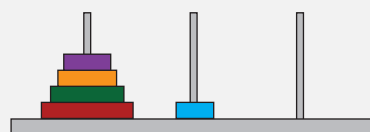
A fianco ($\rightarrow$) è mostrata la configurazione iniziale: alcuni dischi di grandezza variabile sono infilati su di un palo, dal minore (in cima) al maggiore (in basso). Sullo stesso piano sono montati altri due pali (inizialmente privi di dischi).



Lo scopo del gioco è di spostare tutti i dischi impilandoli su un'asta diversa ($\leftarrow$ la seconda o la terza, non ha importanza), rispettando scrupolosamente le seguenti regole:

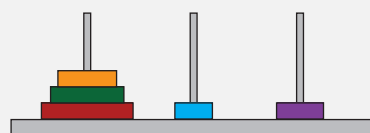
- I. Si può spostare un solo disco alla volta, sfilandolo dalla cima di una pila e infilandolo, dall'alto, su di un altro palo
- II. È proibito mettere un disco più grande su uno più piccolo.

In conformità alle regole enunciate, possiamo iniziare spostando il disco più piccolo a destra ($\rightarrow$).

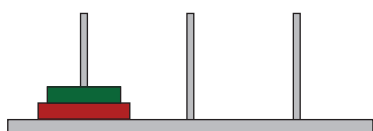


A questo punto dobbiamo prestare attenzione alla seconda regola: essa proibisce di impilare un disco più grande su uno più piccolo ($\leftarrow$).

È comunque possibile utilizzare il palo ancora libero e continuare a smontare la pila di sinistra ($\rightarrow$).

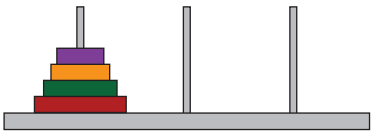
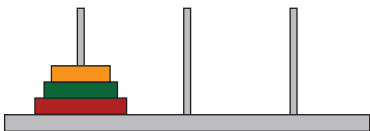


Una volta compreso il meccanismo della *torre di Hanoi* è possibile affrontare le seguenti domande.



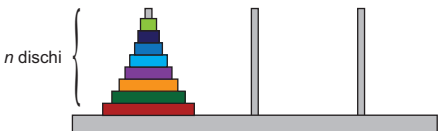
8.1a) Iniziando da una configurazione composta da esattamente 2 dischi ($\leftarrow$), quale è il numero minimo di passaggi per completare il gioco? Scrivi la risposta in corrispondenza di $H(2)$ nella tabella in basso.

8.1b) Iniziando con 3 dischi ($\rightarrow$), quale è il numero minimo di passaggi per spostare la pila? Scrivi la risposta in corrispondenza di $H(3)$ nella tabella in basso.



8.1c) Iniziando con 4 dischi ($\leftarrow$), quale è il numero minimo di passaggi per spostare la pila? Scrivi la risposta in corrispondenza di $H(4)$ nella tabella in basso.

8.1d) Indichiamo con $H(n)$ il numero di passaggi necessari a finire il gioco con n dischi (in questo senso, i problemi precedenti hanno riguardato il calcolo di $H(2)$, $H(3)$ e $H(4)$). La domanda è: conoscendo il valore $H(n)$, come è possibile calcolare $H(n+1)$?



8.1e) Utilizzando la formula ricorsiva trovata precedentemente, calcola $H(n)$ in tutti i seguenti casi:

n	1	2	3	4	5	6	7
$H(n)$	1						

8.1f) Congettura una formula diretta per calcolare $H(n)$ (per la quale cioè non sia necessario ogni volta calcolare $H(n-1)$).

8.2) Dimostra per induzione la correttezza della formula diretta per $H(n)$ a partire dalla relazione ricorsiva di $H(n)$ e dal valore iniziale $H(1) = 1$.

Tesi

Se $H(n) = \begin{cases} H(1) = 1 \\ H(n+1) = 2H(n) + 1 \end{cases}$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$$H(n) =$$

 $P(1), P(2)$

$$H(1) = 1$$

$$H(2) = 2 \cdot H(1) + 1 = 3$$

e

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$

$$H(n) =$$

(da assumere come vera)

 $\Rightarrow$
$$P(n+1)$$

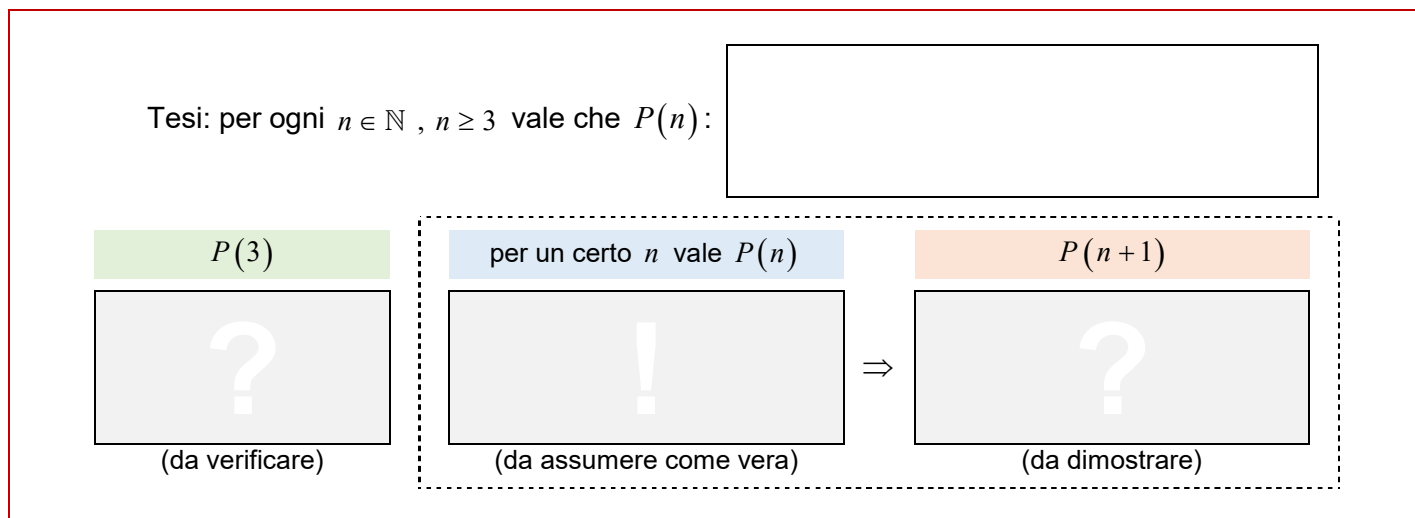
$$H(n+1) =$$

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

[illegible]

8.3) Dimostra per induzione la seguente proposizione: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $F_n = (F_{n-2} + F_{n+2}) / 3$. *Nota bene: in questa proposizione, il primo caso da considerare non è $n=1$ (che significherebbe per F_{n-2} il numero F_{-1}) ma $n=3$.*



Dimostrazione del passo induttivo

La proprietà da individuare nel prossimo esercizio è detta *identità di Cassini*, dal nome dello scopritore (celebre astronomo):

8.4a) Compila tutti i campi della tabella sottostante ($\downarrow$), secondo le regole spiegate a fianco ($\rightarrow$):

- Nella riga centrale (fila a sfondo bianco) vanno inseriti i quadrati dei numeri di Fibonacci sovrastanti.
- Nella terza riga va inserito in ogni cella il prodotto dei numeri di Fibonacci precedente e successivo (vedi a fianco)

n	1	2	3	4	5	6	...
F_n	1	1	2	3	5	8	
$(F_n)^2$		1	4	9	25	64	
$F_{n-1} \cdot F_{n+1}$		2	3	5	8	13	

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$(F_n)^2$	1	1	4	9								
$F_{n-1} \cdot F_{n+1}$		2	3		24							

8.4b) Cosa noti? Saresti in grado di descrivere la proprietà osservata con soli simboli matematici? *Nota bene: la risposta si trova nel prossimo esercizio, cerca di non sbriciare.*

8.4c) Concludi la seguente dimostrazione (seguendo i suggerimenti presenti nel testo):

Tesi - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$$(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n \text{ o, in altre parole...}$$

$$(-1)^n = (F_{n+1})^2 - F_n F_{n+2}$$

$P(1)$

$$(-1)^1 = -1$$

$$(F_2)^2 - F_1 F_3 = 1 - 2 = -1$$

Verificato

per un certo n vale $P(n)$

$$(-1)^n = (F_{n+1})^2 - F_n F_{n+2}$$

(da assumere come vera)

$\Rightarrow$

$$(-1)^{n+1} = (F_{n+2})^2 - F_{n+1} F_{n+3}$$

(da dimostrare)

$P(n+1)$

Dimostrazione

$$(-1)^{n+1} = (-1)(-1)^n = (-1) \left[(F_{n+1})^2 - F_n F_{n+2} \right] = F_n F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = \dots$$

Per continuare la dimostrazione considera i seguenti due suggerimenti:

- Devi indirizzare l'espressione "in direzione" di $P(n+1)$: per farlo devi riuscire ad eliminare il numero di Fibonacci "estraneo" F_n utilizzando soltanto termini che effettivamente compaiono al secondo membro di $P(n+1)$.
- A un certo punto sarà utile considerare la seguente identità: $-AB - A^2 = -A \cdot (B + A)$ (di facile dimostrazione, basta svolgere il prodotto di destra)

$$\dots = F_n F_{n+2} - (F_{n+1})^2 =$$

La prossima dimostrazione per induzione introduce una novità: l'ipotesi induttiva non è più il singolo enunciato $P(n)$, ma l'insieme di tutti gli enunciati da $P(1)$ e $P(n)$. In pratica l'argomentazione passa da...

supponendo che $P(n)$ sia vero per un certo n si trova che deve essere vero anche $P(n+1)$

a

supponendo che $P(n)$ sia vero fino a un certo n , cioè che siano veri $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$,
si trova che deve essere vero anche $P(n+1)$

In termini simbolici si passa dall'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ a $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Questo tipo di ragionamento si chiama **induzione forte**. Per motivi che verranno chiariti più in là, l'induzione forte rende spesso necessario verificare più valori iniziali (come si vede negli schemi predisposti per le dimostrazioni)

8.5) Dimostra nuovamente, stavolta per induzione forte, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $F_n = (F_{n+2} + F_{n-2})/3$. *Nota bene: come prima, il primo caso da considerare non è $n=1$ ma $n=3$.*

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ vale che $P(n)$:

$P(3)$ e $P(4)$

(da verificare)

$P(3), P(4), \dots$ fino a $P(n)$

(da assumere come vere)

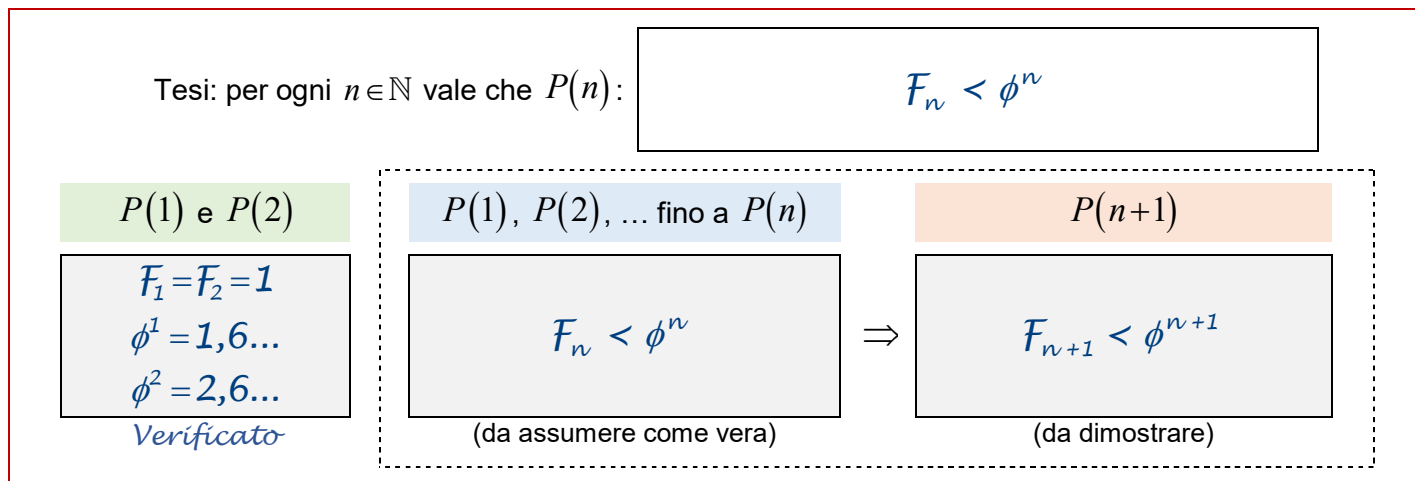
$\Rightarrow$

$P(n+1)$

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

8.7) Concludi la seguente dimostrazione per induzione della disuguaglianza $F_n < \phi^n$ (dove ϕ è la sezione aurea). Durante lo svolgimento sarà importante usare l'uguaglianza $\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}$, vista alcune lezioni fa.



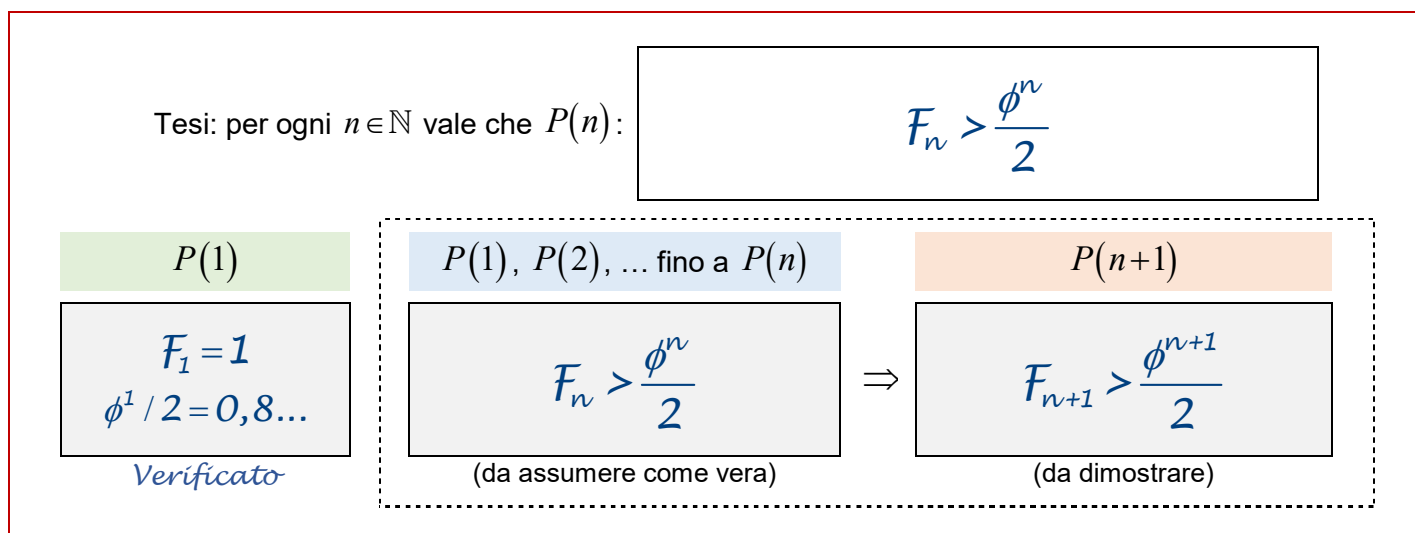
Dimostrazione del passo induttivo

8.8) La tabella a fianco mette a confronto i primi 10 numeri di Fibonacci con i valori assunti da ϕ^n . Ovviamente la proposizione appena dimostrata risulta confermata e vale sempre $F_n < \phi^n$, con ampio margine. Analizzando bene la dimostrazione precedente, si vede che è possibile (con pochissime modifiche) fornire una disequazione più “stringente” rispetto a $F_n < \phi^n$. Hai qualche idea? *Nota bene: non c'è una sola risposta, esistono almeno due modi diversi per “migliorare” la disequazione $F_n < \phi^n$ e fornire stime per eccesso meno abbondanti.*

n	F_n	ϕ^n
1	1	1,61...
2	1	2,61..
3	2	4,23...
4	3	6,85...
5	5	11,09...
6	8	17,94...
7	13	29,03...
8	21	46,97...
9	34	76,01....
10	55	122,99...

8.9a) La prossima (breve) dimostrazione per induzione è del tutto simile alle precedenti e serve a dimostrare la disuguaglianza $F_n > \phi^n / 2$, il che costituisce un grosso problema logico: la disequazione $F_n > \phi^n / 2$ infatti **non è affatto vera**, come mostrano i valori riportati accanto. Evidentemente la seguente dimostrazione contiene qualche errore.

n	F_n	$\phi^n / 2$
...	...	...
7	13	14,51...
8	21	23,48...
9	34	38,00...



Dimostrazione del passo induttivo

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > \text{(per ipotesi induttiva)} \dots \frac{\phi^n}{2} + \frac{\phi^{n-1}}{2} = \frac{\phi^n + \phi^{n-1}}{2} = \text{(per le proprietà di } \phi) \dots \frac{\phi^{n+1}}{2}$$

Dov'è l'errore?

8.9b) Trovato l'errore nella dimostrazione precedente, si può cercare di modificare la disequazione (falsa) $F_n > \phi^n / 2$ perché risulti vera e dimostrabile con l'argomentazione per induzione precedente (e risistemata). Hai qualche idea?

L'ultimo problema ha finalmente chiarito il perché, nel caso dell'induzione forte, può essere necessario verificare più valori iniziali: il passaggio $F_n + F_{n-1} > (\text{per ipotesi induttiva}) \dots \phi^n / 2 + \phi^{n-1} / 2$ mette in luce che la struttura stessa della dimostrazione si basa sull'implicazione logica $P(n-1) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè la validità dell'enunciato $P(n+1)$ deriva da quella dei suoi due predecessori $P(n)$ e $P(n-1)$. Così, per esempio, $P(4)$ è necessariamente vero se lo sono $P(2)$ e $P(3)$ e $P(3)$ è necessariamente vero se lo sono $P(1)$ e $P(2)$. La validità di $P(2)$ invece non deriva da quella dei suoi due predecessori (infatti $P(0)$ non esiste) e deve essere verificata a parte. In modo analogo, se il ragionamento si basasse su un'implicazione "a tre" $P(n-2) \wedge P(n-1) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$, si dovrebbero verificare inizialmente $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$.

Possiamo quindi dare finalmente lo schema di dimostrazione dell'induzione forte

SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE FORTE

TESI: $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$

- 1) Si verifica la proposizione per un numero congruo di valori iniziali. Il numero minimo di verifiche da svolgere emerge dalla struttura logica del passo induttivo (*vedi sotto*).
- 2) Si dimostra che vale l'implicazione $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (cioè si assume che il predicato $P(n)$ sia vero fino a n) e si arriva a concludere che dovrà esserlo anche $P(n+1)$). Attenzione: se durante la dimostrazione, il numero di premesse $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$ utilizzate è sempre maggiore o uguale a K (e ciò indipendentemente dal valore di n), allora K è il numero minimo di verifiche iniziali da effettuare (*vedi punto precedente*).

Per concludere, dimostriamo due proposizioni semplici ma significative. La prima delle due l'avevamo già osservata precedentemente (foglio di lavoro sui numeri di Fibonacci), ma le tecniche che abbiamo imparato da allora ci permettono una sua dimostrazione rigorosa. Fa di nuovo la sua comparsa l'algoritmo di Euclide per sottrazione (anche se ridotto a un solo passaggio).

	Proposizione	Suggerimenti per la dimostrazione
8.10a)	Due numeri di Fibonacci vicini F_{n+1} e F_n sono sempre primi fra loro. In termini simbolici ... per ogni $n \in \mathbb{N}$ $MCD(F_{n+1}, F_n) = 1$	<u>per induzione semplice</u> utilizzando l'algoritmo di Euclide con la sottrazione
8.10b)	Due numeri di Fibonacci vicini F_{n+2} e F_n sono sempre primi fra loro. In termini simbolici ... per ogni $n \in \mathbb{N}$ $MCD(F_{n+2}, F_n) = 1$	<u>diretta</u> utilizzando l'algoritmo di Euclide per sottrazione e utilizzando la proposizione appena dimostrata.

Dimostrazione 8.10a)

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$MCD(F_n, F_{n+1}) = 1$

$P(1)$

?

(da verificare)

$P(n)$

!

(da assumere come vera)

$P(n+1)$

?

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

Dimostrazione 8.10b)

$$MCD(F_{n+2}, F_n) =$$
