



La successione di Fibonacci gode di molte proprietà (alcune scoperte da poche decine di anni) e non ha senso stilare un elenco esauriente. È però interessante riscoprire le più evidenti e imparare a dimostrarle formalmente.

7.1a) Compila tutti i campi della tabella sottostante ($\downarrow$), secondo le regole spiegate a fianco ($\rightarrow$):

- Nella riga centrale va scritta la sottrazione tra il reciproco del numero di Fibonacci sovrastante e il reciproco del successivo
- Nell'ultima riga va calcolata esplicitamente la differenza, prestando attenzione a non eseguire il prodotto al denominatore

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+1}}$		$\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$					
Frazione (parzialmente) semplificata		$\frac{1}{1 \cdot 2}$	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	$\frac{2}{3 \cdot 5}$					

7.1b) Quale regolarità osservi delle frazioni dell'ultima riga? Cerca di scrivere la regola osservata in termini matematici:

$$\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+1}} =$$

7.1c) Cerca di dimostrare l'uguaglianza scritta sopra utilizzando le proprietà dei numeri di Fibonacci.

7.2a) Compila tutti i campi della tabella sottostante ($\downarrow$), secondo le regole spiegate a fianco ($\rightarrow$):

- Nella riga centrale va inserito il prodotto tra il numero di Fibonacci sovrastante e il precedente.
- Nell'ultima riga va scritto il quadrato del corrispettivo numero di Fibonacci

n	1	2	3	4	5
F_n	1	1	2	3	5
$F_{n-1} \cdot F_n$		1	2	6	15
$(F_n)^2$	1	1	4	9	

n	1	2	3	4	5
F_n	1	1	2	3	5
$F_{n-1} \cdot F_n$		1	2	6	15
$(F_n)^2$	1	1	4	9	25

7.3b) Cosa noti? In che modo si può compilare l'ultima riga senza effettuare alcuna somma?

7.3c) Indicata con $S(n)$ la somma dei numeri di Fibonacci da F_1 a F_n (per esempio $S(3) = F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4$), scrivi la proprietà osservata sopra in termini matematici.

$$S(n) =$$

7.4a) Cerchiamo ora di dimostrare il risultato appena trovato con un ragionamento detto “induzione matematica”. Prima di tutto chiamiamo $P(n)$ l'affermazione “ $S(n)$ è uguale a $F_{n+2} - 1$ ”. Si tratta di un **predicato**, cioè di una affermazione che dipende dal valore di una variabile. Così $P(1)$ è l'affermazione “ $S(1)$ è uguale a $F_3 - 1$ ”, $P(2)$ “ $S(2)$ è uguale a $F_4 - 1$ ” e così via.

Naturalmente, in linea di principio, il predicato $P(n)$ può essere vero per alcuni valori di n e falso per altri. Il nostro intento è di dimostrare che $P(n)$ sia vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1 - Verifica del valore iniziale (BASE)

Che $P(1)$ sia vero lo abbiamo visto compilando la tabella (nota bene: qualsiasi dimostrazione per induzione parte sempre dalla verifica di $P(n)$ per uno o più valori iniziali).

(Ipotesi induttiva)

Dimostriamo ora formalmente la validità dell'implicazione logica $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: si tratta cioè di provare che se $P(n)$ fosse vero lo sarebbe anche $P(n+1)$. Se invece $P(n)$ fosse falso, $P(n+1)$ potrebbe essere vero oppure falso, è un caso che semplicemente non ci interessa analizzare. È fondamentale capire che in questo ragionamento, $P(n)$ deve essere assunto come vero (questa assunzione è detta **ipotesi induttiva**), non perché necessariamente lo sia, ma perché a noi interessa valutare gli effetti che questa ipotesi ha su $P(n+1)$.

Supponiamo quindi che $P(n)$ sia vera (cioè che per un certo n valga $S(n) = F_{n+2} - 1$) e analizziamo $S(n+1)$, nella speranza che risulti vera anche $P(n+1)$ (che corrisponde all'uguaglianza $S(n+1) = F_{n+3} - 1$).

2 - Dimostrazione dell'implicazione (PASSO INDUTTIVO)

Per definizione vale che $S(n+1) = F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = S(n) + F_{n+1}$. Per l'ipotesi induttiva $S(n) = F_{n+2} - 1$, per cui l'ultima uguaglianza diventa $S(n+1) = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$ che può essere

riscritto come $S(n+1) = F_{n+1} + F_{n+2} - 1$. Per le proprietà dei numeri di Fibonacci, $F_{n+1} + F_{n+2}$ è uguale a F_{n+3} , per cui abbiamo trovato $S(n+1) = F_{n+3} - 1$. Ma questa uguaglianza è proprio $P(n+1)$! L'implicazione logica $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è quindi dimostrata (in altre parole, “facendo finta” che $P(n)$ sia vero, necessariamente lo sarà anche $P(n+1)$).

Cerchiamo di capire cosa abbiamo provato: se fosse vero $P(7)$ sarebbe vero $P(8)$, del resto se fosse vero $P(8)$ lo sarebbe anche $P(9)$ e così via fino all'infinito. A questo punto è bene ricordarsi un fatto fondamentale: che $P(1)$ sia vero lo abbiamo verificato all'inizio. Riallacciando tutti i fili del discorso, abbiamo trovato che $P(n)$ deve essere vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè effettivamente per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $S(n) = F_{n+2} - 1$.

7.4b) Commenta la dimostrazione appena svolta: il ragionamento ti sembra convincente?

Le dimostrazioni per induzione, come quella appena vista, seguono tutte il seguente schema:

SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE (semplice)

TESI: $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$

- 1) Si verifica la proposizione per uno o più valori iniziali ($P(1)$, $P(2)$, ..)
- 2) Si dimostra che vale l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (cioè si assume che per un certo $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ sia vera e si arriva a concludere che dovrà esserlo anche $P(n+1)$).

Nota bene: è utile scrivere esplicitamente $P(n+1)$ da qualche parte: in questo modo sarà più facile capire dove “indirizzare” la dimostrazione.

Se $P(n+1)$ è in forma di uguaglianza, si procede quasi sempre così: per prima cosa si scrive il membro di sinistra dell'uguaglianza e poi si costruisce una serie di identità, arrivando infine a un'espressione identica al membro di destra dell'uguaglianza di $P(n+1)$.

Per fare ordine nelle dimostrazioni per induzione, è sempre bene rendere espliciti i predicati (e gli enunciati) $P(n)$, $P(1)$ e $P(n+1)$. La seguente tabella è stata compilata con i dati dell'ultima dimostrazione.

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$$S(n) = F_{n+2} - 1$$

$P(1)$

$$S(1) = F_3 - 1$$

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$

$$S(n) = F_{n+2} - 1$$

(da assumere come vera)

$P(n+1)$

$$S(n+1) = F_{n+3} - 1$$

(da dimostrare)

Molto spesso le uguaglianze scritte nei riquadri della TESI e dell'IPOTESI INDUTTIVA sono identiche (per differenziarle spesso si preferisce usare nei due casi lettere distinte), ma hanno premesse diverse che cambiano il loro significato: quello che si vuole dimostrare (TESI) è che la legge sia valida sempre (per ogni n), quello che invece si assume durante la dimostrazione (IPOTESI INDUTTIVA), è che la legge sia vera per uno specifico valore n (non per tutti).

7.4) Dimostra per induzione (e compilando la tabella delle dimostrazioni per induzione) la seguente proposizione: La somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice dispari è uguale all' n -esimo numero di Fibonacci di indice pari (esempio: la somma di $F_1 + F_3 + F_5$ è F_6 , vedi in basso).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Somma celle grigie	1		3		8		21		55		144	

Consiglio: per non appesantire troppo la notazione, denotiamo con $D(n)$ la somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice dispari (per cui $D(n) = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}$). Visto che l' n -esimo numero di Fibonacci di indice pari è ovviamente F_{2n} , la tesi dell'enunciato diventa semplicemente $D(n) = F_{2n}$.

Aiuto utile per la dimostrazione: l' n -esimo numero dispari è $2n-1$ (per esempio il quinto numero dispari è $2 \cdot 5 - 1 = 9$), il numero dispari successivo sarà quindi $(2n-1) + 2$, cioè $2n+1$.

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$$D(n) = F_{2n}$$

$P(1)$ e $P(2)$

?

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$

$$D(n) = F_{2n}$$

(da assumere come vera)

$P(n+1)$

$$D(n+1) = F_{2(n+1)}$$

(cioè F_{2n+2})

(da dimostrare)

7.5) Dimostra per induzione (e compilando la tabella delle dimostrazioni per induzione) la seguente proposizione:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$(F_n)^2$	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025
Q_n Somma di tutti i primi n quadrati dei numeri di Fibonacci	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895

La somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci è uguale al prodotto tra l' n -esimo e l' $n+1$ -esimo numero della successione (← vedi a fianco).

Prima di iniziare la dimostrazione leggi bene i seguenti suggerimenti:

- Indica con $Q(n)$ la somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci (cioè $Q(n) = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$). Ciò ti consentirà di esprimere la tesi dell'enunciato nella forma compatta $Q(n) = (F_n)(F_{n+1})$.
- Durante la dimostrazione sarà utile notare che $A \cdot B + B^2 = B \cdot (A + B)$ (facile da dimostrare calcolando il prodotto di destra)

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$P(1)$

?

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$

!

(da assumere come vera)

$\Rightarrow$

$P(n+1)$

?

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

7.6) Dimostra per induzione la seguente proposizione: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $F_n + 2 \cdot F_{n+1} = F_{n+3}$.

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$P(1)$

?

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$

!

(da assumere come vera)

$\Rightarrow$

$P(n+1)$

?

(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $P(n)$:

$P(1)$
?

(da verificare)

per un certo n vale $P(n)$
!

$\Rightarrow$

$P(n+1)$
?

(da dimostrare)

(da assumere come vera)

[illegible]

7.8) Dimostra per induzione la seguente proposizione: per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $3 \cdot F_n + 5 \cdot F_{n+1} = F_{n+5}$. Suggestivo importante: durante la dimostrazione puoi usare i risultati dimostrati precedentemente (e che quindi sono indiscutibilmente veri).


