Liceo **Matematico**

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI
scheda di lavoro 6

Liceo Scientifico e Linguistico **Ettore Majorana**

L'ultima scheda si concludeva con l'uguaglianza $\phi = 1 + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^6} + \ldots$

6.1) Moltiplicando tutti i termini dell'ultima uguaglianza per ϕ^2, si ottiene una relazione che lega fra loro ϕ^3, ϕ^2 e ϕ. Di che relazione si tratta?

6.2) Moltiplicando tutti i termini dell'ultima relazione per una potenza qualsiasi di ϕ si ottiene una nuova relazione che generalizza la precedente. Si ha infatti che…

$\phi^{n+2} =$

6.3) Abbiamo visto che $\phi = [1;\overline{1}]$ e questo ci ha permesso di trovare approssimazioni razionali di ϕ via via più accurate della sezione aurea. Per la precisione, eseguendo n passaggi e riscrivendo la frazione continua come frazione semplice, abbiamo ottenuto… (*completa la seguente tabella*)

numero passaggi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frazione	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$					

Come si vede in basso, il numeratore di ogni frazione è il denominatore della successiva.

numero passaggi	1	2	3	4	5	
Frazione	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	

In virtù di questa regolarità, possiamo dire che ogni frazione in tabella ha la forma $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, per la precisione si ha

$$\frac{1}{1} = \frac{F_2}{F_1},\ \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2},\ \frac{3}{2} = \frac{F_4}{F_3}, \ldots \text{ e così via}$$

6.4) Riporta i valori della successione F_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8							

La successione appena trovata si chiama *successione di Fibonacci* e può essere usata per risolvere problemi di natura diversa.

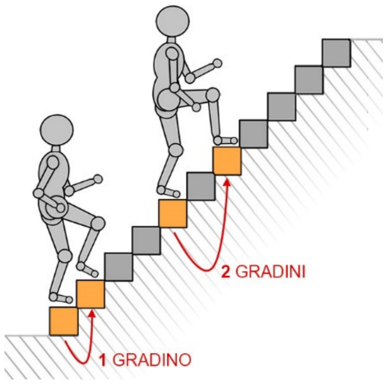
6.5) Scrivi la legge che definisce la successione di Fibonacci:

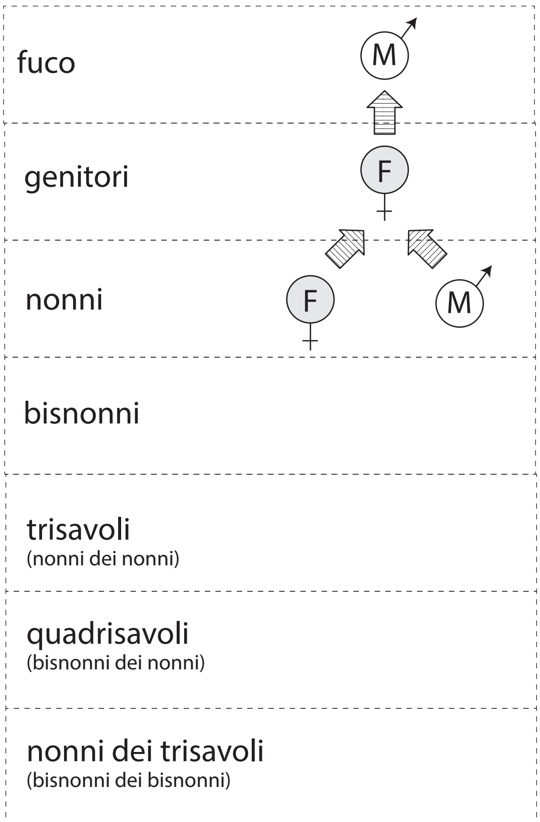
$F_1 = 1$

$F_{n+2} =$

6.6) Quale valore tende ad assumere il rapporto $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ per indici n molto grandi?

6.7) (→) Un bambino vuole salire una rampa composta da 10 gradini. La sua altezza gli permette di salire ad ogni passo di uno o al massimo due gradini. Potrebbe quindi compiere 10 passi da un gradino o magari 5 da due, oppure scegliere un'andatura irregolare come 2-1-2-1-1-2-1. Quante diverse scelte può prendere?





(←) **6.8)** Problema tratto da Livio Mario, "Le sezione Aurea", BUR.

Le uova delle api operaie danno origine a un fuco senza bisogno di fecondazione. Di conseguenza, un fuco ha una "madre" ma non un "padre". Le uova della regina, al contrario, sono fecondate dai fuchi e danno origine ad api femmine, operaie o regine. Perciò un'ape femmina ha sia una "madre" che un "padre".

Il fuco ha quindi due nonni, entrambi di parte "materna" (*vedi schema a fianco).* La domanda è …

Quanti "nonni dei trisavoli" ha un fuco?

6.9) Come vi ricorderete, per alcune coppie di numeri primi fra loro, l'algoritmo euclideo (con la divisione) è molto rapido nel fornire la risposta $MCD(a,b)=1$, altre volte meno. I due esempi in basso mostrano un procedimento da 3 passaggi contrapposto ad un altro da 5.

a	b	Q	R
34	7	4	6
7	6	1	**1**
6	1	6	0

a	b	Q	R
29	8	3	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	**1**
2	1	1	0

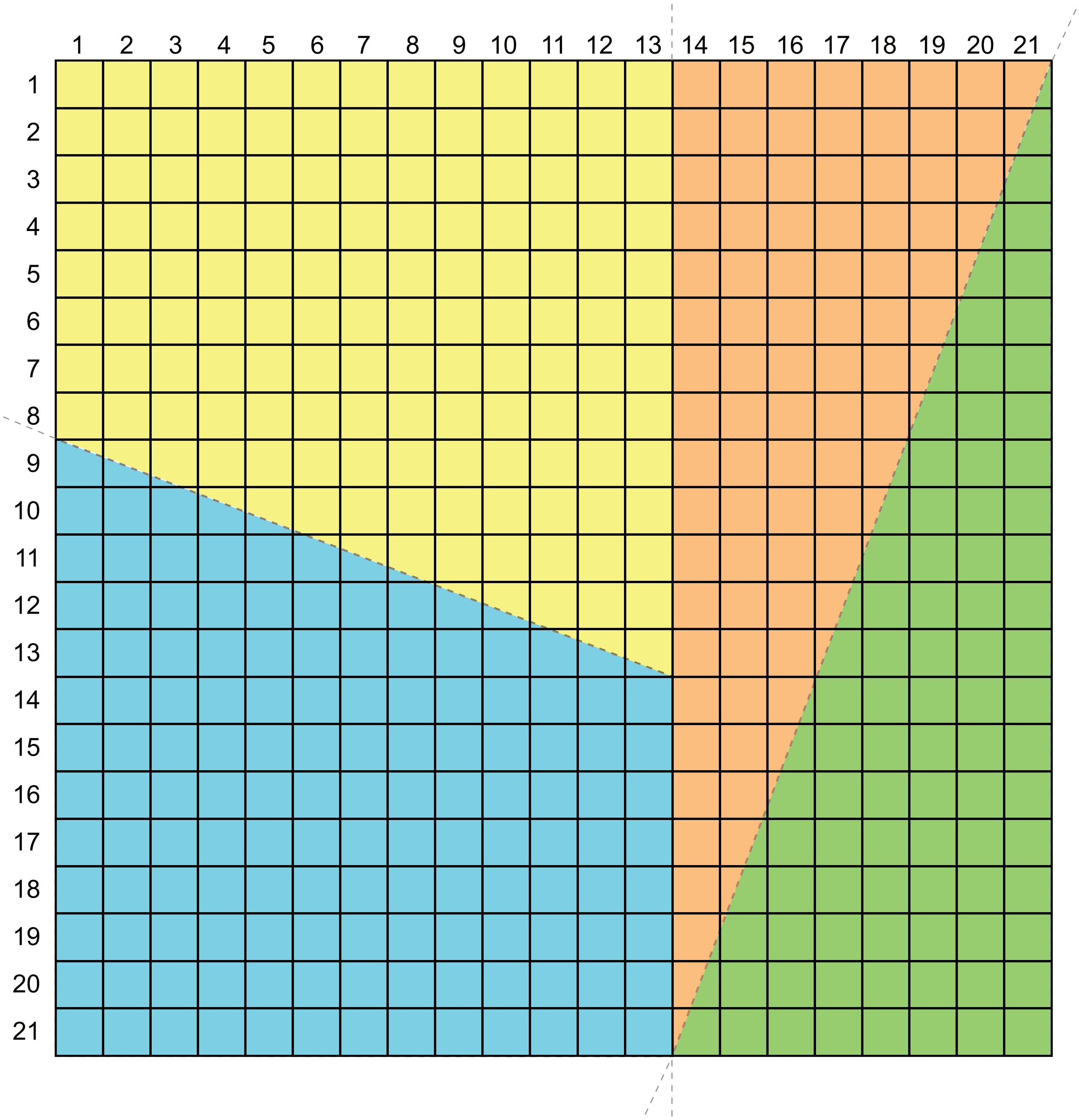
6.9a) Il problema è il seguente: trova i due numeri a, b di somma inferiore a 100, per i quali l'algoritmo euclideo impiega più passaggi per fornire la soluzione.

6.9b) Riallacciandoti al problema appena affrontato, rispondi alla seguente domanda: quanto vale il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci consecutivi, cioè quanto vale $MCD(F_n, F_{n+1})$?

Con i numeri di Fibonacci è possibile eseguire un'altra "magia" matematica.

6.10a) Dal seguente quadrato formato da 21 quadratini per lato (nota che il 21 è un numero di Fibonacci), ritaglia le 4 sagome colorate indicate in figura (è facile riconoscere che i lati delle sagome sono anch'essi numeri di Fibonacci).

↓ … continua … ↓



Prendi le sagome ritagliate e trova un modo per sistemarle, <u>senza sovrapporle</u>, dentro il rettangolo sottostante.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													

6.10b) Ebbene, contando i quadratini, hai appena dimostrato che vale $21 \cdot 21 = 13 \cdot 34$: un numero dispari ($21 \cdot 21$) è uguale a un numero pari ($13 \cdot 34$). Come è possibile?