LA SEZIONE AUREA

DEFINIZIONE: La sezione aurea è la parte di una linea (L) divisa in due parti diseguali. La sua lunghezza ha una proporzione matematica particolare rispetto alla parte di linea rimanente. In particolare, la parte più corta (b) sta alla più lunga (a) come questa sta all'intero segmento, cioè b : a = a : L.
a* è la parte aurea della linea *L

ATTIVITÀ N.1

Dato un segmento AB costruiamo la relativa sezione aurea (con riga e compasso)

1. Costruisci un segmento AB.
2. Individua il punto medio C
3. Traccia la circonferenza di raggio CB e centro in B
4. Traccia la perpendicolare al segmento AB passante per B
5. Individua il punto E di intersezione tra la circonferenza e la perpendicolare
6. Costruisci il segmento AE
7. Individua il punto G di intersezione tra la circonferenza ed il segmento AE
8. Traccia la circonferenza di raggio AG e centro in A
9. Individua il punto H di intersezione tra quest'ultima circonferenza ed il segmento AB
10. Individua il segmento AH.

Il segmento AH rappresenta la sezione aurea del segmento AB.
Risulta infatti AB:AH=AH:HB

Prova a dimostrare che questa proporzione è vera
Per semplicità indichiamo AB=**a** e AH=**x**
Dobbiamo verificare la validità della proporzione a : x=x : (a-x)
Per la proprietà fondamentale delle proporzioni risulta ………………=…………………Quindi $x^2+ax=a^2$
Aggiungi ad ambo i membri la quantità positiva $(a/2)^2$. (Completamento a quadrato)
Cosa ottieni? (……….+……….)^2 = a^2+……..

Considera il triangolo rettangolo ABE ed applica ad esso il teorema di Pitagora. Risulta $AB^2+BE^2=AE^2$

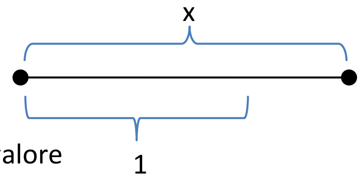
Cosa osservi?...
Puoi dedurre che AE=AG+GE= (essendo GE= ………e AG=…….)……………. L'uguaglianza è quindi verificata.

ATTIVITÀ N.2

Calcoliamo il valore numerico del RAPPORTO AUREO Φ

Il rapporto aureo o numero aureo Φ è il rapporto tra la lunhezza dell'intero segmento e la sua parte aurea $\Phi=\frac{l}{a}=\frac{AB}{AH}=\frac{AH}{HB}$

Partendo da un segmento di lunghezza **x** e sezione aurea **1**



[$\Phi=\frac{x}{1}=$ **x**], applicando la definizione di sezione aurea, calcola tale valore utilizzando la proprietà fondamentale delle proporzioni

Il numero $\mathbf{\Phi=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}$ è un numero irrazionale (con infinite cifre decimali aperiodiche)
Il metodo geometrico permette quindi di calcolare la radice quadrata di 5

ATTIVITÀ N.3

Prime proprietà numeriche di Φ
Consideriamo il numero **Φ** approssimato con i suoi primi cinque decimali 1,61803
Utilizzando una calcolatrice calcola 1/**Φ=…………………**
Otteniamo gli stessi decimali senza l'1. Con buona approssimazione possiamo dire che **1/Φ= Φ-1**

Calcoliamo adesso $\mathbf{\Phi^2}$. Troviamo $\mathbf{\Phi^2}$**=…………………**
Questi due risultati non sono un caso. Ricordiamoci che **Φ** è la soluzione dell'equazione $\mathbf{x^2-x-1=0}$ quindi è un numero che rende vera questa uguaglianza $\mathbf{\Phi^2-\Phi-1=0 \rightarrow \Phi^2=\Phi+1}$

A partire da questa uguaglianza moltiplichiamo diverse volte ambo i membri per **Φ**

Otteniamo $\mathbf{\Phi^3=\Phi^2+\Phi}$
$\mathbf{\Phi^4=\Phi^3+\Phi^2}$
$\mathbf{\Phi^{\cdots}=\Phi^{\cdots}+\Phi^{\cdots}}$
$\mathbf{\Phi^{\cdots}=\Phi^{\cdots}+\Phi^{\cdots}}$

Qualsiasi potenza di **Φ** è uguale alla somma delle due potenze precedenti (*se volessimo conoscere le restanti potenze non dovremmo più eseguire delle moltiplicazioni ma basterà sommarne due consecutive per ottenere la successiva)*
Ed ancora $\mathbf{\Phi^3=\Phi^2+\Phi=\Phi+1+\Phi=\underline{2}\Phi+\underline{1}}$
$\mathbf{\Phi^4=\Phi^3+\Phi^2=}$**………..+…… ….=**$\mathbf{\underline{3}\Phi+\underline{2}}$ (nota 3=2+1 del rigo precedente e 2 è il coeff.di Φ del r.p.)
$\mathbf{\Phi^5=}$ **…..+ ……=………..+……….=**$\mathbf{\underline{5}\Phi+\underline{3}}$ (nota 5=3+2 del rigo precedente e 3 è il coeff.di Φ del r.p.)
$\mathbf{\Phi^6=}$ **…..+ ……=………..+……….=…Φ+….**
$\mathbf{\Phi^7=}$**………………..** $\mathbf{\Phi^8=}$**………………..**

Esprimi la regola generale per calcolare le potenze di **Φ**

………
………
………..
Questi coefficienti 1,1,2,3,5,8……… costituiscono la nota successione di Fibonacci.
Verifica l'uguaglianza **1/Φ= Φ-1** partendo dalla relazione **Φ^2= Φ+1**

……

<u>Ultima curiosità</u>

Essendo **1/Φ= Φ-1** risulta $\mathbf{\Phi=1+\frac{1}{\varphi}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}}}}$

ovvero la sezione aurea si può identificare con una successione infinita di 1, esaltandone ulteriormente la bellezza.

Partendo da questa formula possiamo calcolare il numero aureo facilmente con una calcolatrice scientifica eseguendo queste istruzioni:

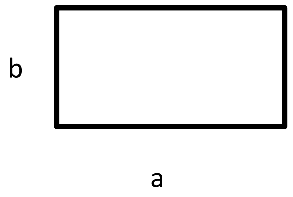
1. inserire **1** per iniziare
2. calcolare il suo reciproco (il bottone 1/x)
3. sommare 1
4. calcolare il suo reciproco
5. sommare 1

……………………………………………….

ripetere il procedimento fino a quando il display non dà un numero costante

IL RETTANGOLO AUREO

DEFINIZIONE: Un rettangolo si definisce aureo se il quoziente tra la lunghezza del lato maggiore e quella del lato minore è uguale al numero aureo



$\frac{a}{b} = \boldsymbol{\Phi}$

ATTIVITÀ N.4

Costruzione di un rettangolo aureo (con geogebra o con riga e compasso)

1. Costruisci un segmento AB.
2. Costruisci il quadrato (POLIGONO REGOLARE) di lato AB
3. Individua il punto medio E del lato AB
4. Traccia la circonferenza di raggio EC e centro in E
5. Individua il punto G di intersezione tra la circonferenza e la retta AB
6. Individua il segmento AG

Il segmento AB rappresenta la sezione aurea del segmento AG.
Costruisci il rettangolo avente come base il lato AG e altezza AD

Verifica che questo rettangolo è aureo:
Supponiamo che AB=AD=1.
Dobbiamo far vedere che AG/AD =AG/1=AG= $\boldsymbol{\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$

Infatti sapendo che AG=AE+EG ed applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo EBC

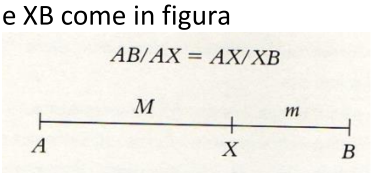
risulta: EG^2=…………………………………………………→EG=…………………………………….

→AG= AE+EG=------------ + -----------------=

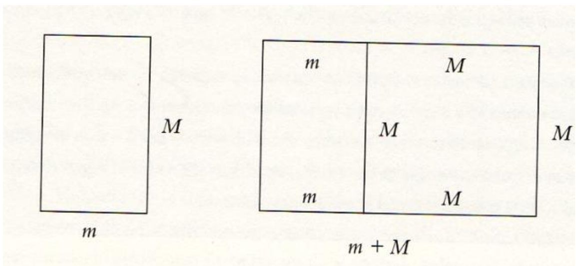
Proprietà del Rettangolo Aureo

Dato un RA, se costruiamo sul suo lato maggiore un quadrato di uguale lato (GNOMONE) si ottiene un rettangolo più grande ancora aureo.

Infatti preso un segmento AB ed individuata la sua sezione aurea AX, indicati con M e m i segmenti AX e XB come in figura



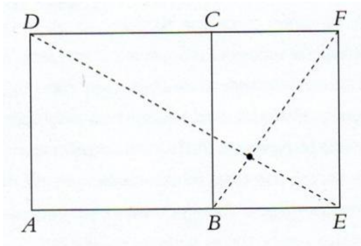
risulta (M+m)/M=M/m= **Φ**
se il rettangolo a sinistra è un RA allora quello a destra (avente per lati M+m e M) è anch'esso un RA.



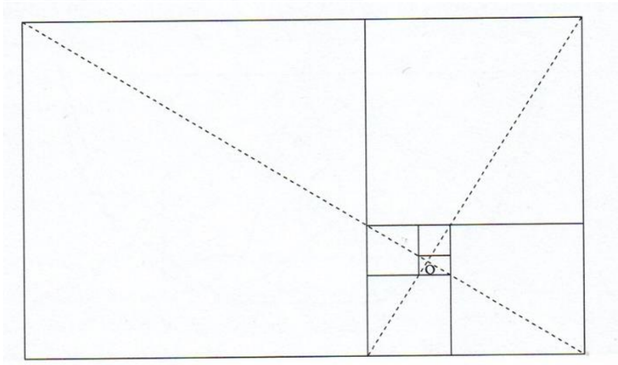
Succede lo stesso se sottraiamo ad un RA un quadrato avente per lato il lato minore del rettangolo.

Dimostralo …….

Consideriamo due RA ottenuti uno dall'altro mediante la sottrazione di un quadrato.
Se tracciamo le diagonali di questi due RA come nella figura accanto, queste si intersecano sempre con un angolo retto.



Se cerchiamo altri RA di volta in volta più piccoli attraverso successive sottrazioni di quadrati e in ciascuno di essi disegnamo le due diagonali che appaiono in figura, notiamo che tutte si situano sulle rette DE e BF. Quindi saranno sempre perpendicolari e si incontreranno sempre nello stesso punto O. Questa proprietà è una peculiarità dei RA. Il punto O è una specie di vortice, di buco nero dove convergono innumerevoli RA sempre più piccoli. Il punto O a volte è detto "l'occhio di Dio"



Verifica questa proprietà con Geogebra