



Le regolarità dei solidi platonici sono straordinariamente suggestive: questo ha fatto sì che venissero ampiamente studiati fin dall'antichità, spesso cercando in essi significati nascosti e attribuendo a loro valori esoterici.

Essi furono oggetto di studio di [Pitagora](#) e [Platone](#).

Le idee di Platone sui cinque poliedri regolari

Il filosofo greco Platone utilizzò i 5 poliedri regolari convessi nel suo libro intitolato *Timeo*, del 350 a.C., per spiegare il mondo naturale. Per questo essi sono anche chiamati *figure cosmiche*. Platone associò quattro poliedri a quelli che al suo tempo erano ritenuti i quattro elementi fondamentali della natura, acqua, aria, terra, fuoco:

- l'icosaedro all'acqua;
- l'ottaedro all'aria;
- il cubo alla terra;
- il tetraedro al fuoco.

Il suo solido preferito era il dodecaedro del qual scrisse: *“Restava una quinta combinazione e il Demiurgo (Dio) se ne giovò per decorare l’universo.”*

La scoperta di questa figura risale almeno al VI sec. a. C., poiché oggetti a forma di dodecaedro appartenenti a quel periodo, sono stati rinvenuti in vari siti archeologici; i cristalli di pirite, che hanno forma dodecaedrica quasi perfetta, che si potevano rinvenire facilmente in molte zone della Magna Grecia, possono essere stati la fonte di ispirazione.



Cristalli di pirite (ferro) in forma cubica



Cristalli di pirite (ferro) in forma dodecaedrica

I poliedri regolari furono poi studiati con ben maggiore razionalità dai geometri greco-alessandrini. Le costruzioni di questi solidi sono contenute nel Libro XIII degli [Elementi](#) di [Euclide](#).

L'interesse per i solidi platonici fu vivo anche tra matematici e artisti rinascimentali: ne studiarono le proprietà metriche [Piero della Francesca](#) (nel trattato *De corporibus regularibus*), [Luca](#)

[Pacioli](#) (che li inserì nel suo *De Divina Proportione*) e successivamente [Niccolò Tartaglia](#) e [Rafael Bombelli](#).

Pure [Keplero](#), nella sua opera *Mysterium cosmographicum*, riprese, in termini diversi, l'indagine di Platone attorno al senso dei poliedri regolari nella struttura del mondo: sostenne, infatti, che i poliedri platonici fossero strettamente connessi alle armoniose proporzioni che lo caratterizzano.

Anche l'arte presenta numerosi rinvii ai solidi platonici: tra gli esempi più celebri, vi sono [Salvador Dalí](#) (che ne fece uso in *Corpus Hypercubus* e nella sua *Ultima Cena*, ambientata proprio in un [dodecaedro](#)) e [Maurits Cornelis Escher](#), che ne sfruttò le proprietà geometriche per eseguire alcune delle sue tassellature.

Definizione di **POLIEDRO**

Un poliedro è un solido delimitato da un numero finito di poligoni piani, detti facce del poliedro.

Definizioni di **spigolo** e **vertice**

In un poliedro ogni lato di ciascun poligono che costituisce una faccia coincide con il lato di un'altra faccia e viene detto spigolo del poliedro.

Ogni vertice di una faccia è vertice di altre facce (almeno 3) e si dice vertice del poliedro.

Si dicono facce adiacenti del poliedro due facce che hanno uno spigolo comune.

Due facce adiacenti formano un angolo che si chiama diedro.

Definizioni di poliedro **convesso** e poliedro **concavo**

In parole approssimative, un poliedro è concavo se ha delle rientranze, è convesso se non ne ha.

Se vogliamo essere più "matematici", possiamo dire:

Un poliedro è convesso se ha le seguenti proprietà:

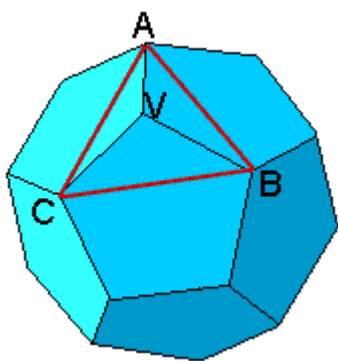
ogni spigolo è comune esattamente a due facce

il piano di ciascuna faccia lascia tutte le rimanenti facce in uno dei due semispazi che individua.

Altrimenti è concavo.

Definizione di **vertice regolare**

Consideriamo un vertice V di un poliedro e gli spigoli in esso incidenti; in genere questi spigoli hanno lunghezze diverse e serve denotare con m la minima di esse; prendiamo su ogni spigolo un punto che disti da V una lunghezza uguale a m . Collegando questi punti otteniamo il "poligono associato al vertice": se questo poligono è regolare si dice che V è un vertice regolare.



Ad esempio, nella figura qui sopra, V è un vertice regolare perché, presi $VA = VB = VC$, si ha che ABC è un **poligono** regolare (triangolo equilatero)

Definizione di **poliedro regolare**

Si dice poliedro regolare un poliedro le cui facce sono tutte poligoni regolari e uguali e i cui vertici sono tutti dotati di poligoni associati uguali e regolari, non necessariamente convessi.

Esistono 5 poliedri regolari convessi e 4 poliedri regolari concavi.

I solidi platonici

I solidi platonici, sono poliedri convessi le cui facce sono poligoni convessi, regolari e uguali.

Esistono esattamente 5 poliedri di questo tipo: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

Le costruzioni dei cinque poliedri regolari sono dimostrate nel libro 13° e ultimo degli Elementi di Euclide.

Perché sono solo cinque?

I poliedri regolari non possono essere più di cinque.

Dimostrazione:

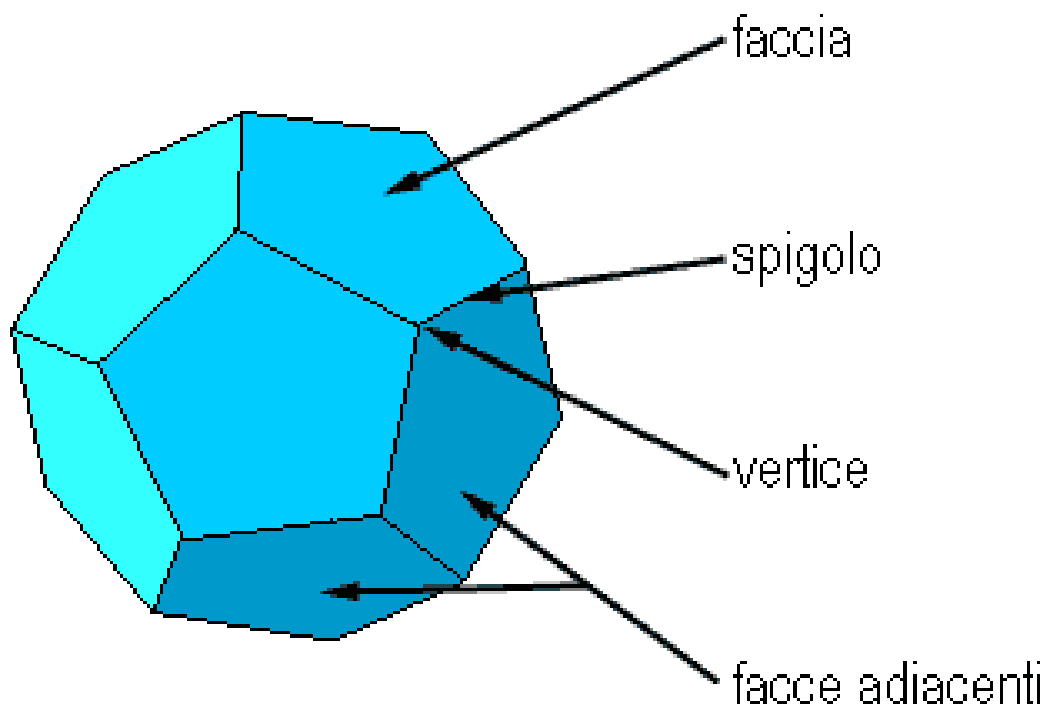
Soltanto il [triangolo](#) equilatero, il [quadrato](#) e il [pentagono](#) regolare possono essere facce di poliedri regolari. La spiegazione ci viene data da [Euclide](#) negli [Elementi](#):

1. In ciascun vertice devono convergere almeno tre facce (non esistono, infatti, angoloidi formati da uno o due poligoni).
2. In ogni angoloide (angolo solido) la somma degli angoli delle facce che lo delimitano deve essere minore di un angolo giro, altrimenti la figura è piana; la quantità che manca per formare i 360° è definita [difetto](#).
3. Essendo necessarie almeno tre facce per ciascun angoloide e trattandosi di poligoni regolari, ciascun vertice di ciascuna faccia può contribuire all'angoloide con massimo $360^\circ \div 3 = 120^\circ$.
4. Ad avere angoli maggiori o uguali a 120° sono i poligoni con sei o più lati, pertanto possono formare solidi platonici solo il triangolo, il quadrato ed il pentagono. Ciascuna di queste figure si comporta diversamente:
 1. Facce triangolari: gli angoli di un triangolo equilatero sono ampi 60° , quindi in un vertice del solido possono insistere 3, 4, o 5 triangoli; si formano, rispettivamente, il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.
 2. Facce quadrate: gli angoli di un quadrato sono ampi 90° , è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce ($3 \times 90 = 270$) ottenendo un [cubo](#).

 {3,3} Difetto di 180°	 {3,4} Difetto di 120°	 {3,5} Difetto di 60°	 {3,6} Difetto di 0°
 {4,3} Difetto di 90°	 {4,4} Difetto di 0°	 {5,3} Difetto di 36°	 {6,3} Difetto di 0°

3. Facce pentagonali: ogni angolo di un pentagono regolare misura 108° . È quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce ($3 \times 108 = 324$) ottenendo un [dodecaedro regolare](#).

È in questo modo che si ottengono i cinque solidi platonici possibili



Contiamo le facce, gli spigoli e i vertici

Solido	facce (F)	spigoli (S)	vertici (V)
tetraedro	4	6	4
cubo	6	12	8
ottaedro	8	12	6
dodecaedro	12	30	20
icosaedro	20	30	12

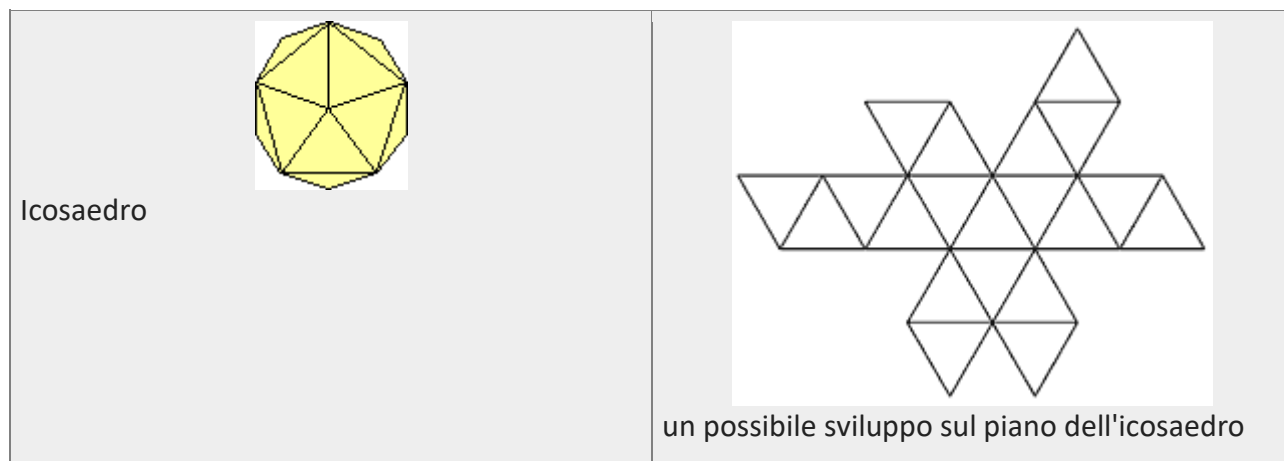
La formula di Eulero

Osservando i dati della tabella, si ricava facilmente la seguente relazione: **$V = S - F + 2$** che è detta **formula di Eulero**, dal nome Leonard Euler, il grande matematico svizzero del 1700.

Più in generale, la formula di Eulero afferma che per l'intera classe dei poliedri convessi, ma anche per la più vasta gamma dei poliedri a superficie semplicemente connessa (detto banalmente, quei poliedri che non presentano "buchi" o "manici"), vale l'uguaglianza:

$$F - S + V = 2$$

Un metodo semplice per contare e calcolare facce, spigoli e vertici



Consideriamo ad esempio l'icosaedro. Non è facile contare le facce, gli spigoli e i vertici direttamente sul solido. Si corre il rischio di perdere il conto o di dimenticare qualche elemento. Se invece osserviamo lo sviluppo sul piano possiamo seguire tre fasi.

- Prima fase: contare le facce.
Nel nostro caso sono 20 triangoli;
- Seconda fase: calcolare il numero degli spigoli.
Calcoliamo il numero totale dei lati di 20 triangoli: $20 \cdot 3 = 60$ lati
Osserviamo che in ogni spigolo vengono a coincidere 2 lati, perciò gli spigoli sono $60/2 = 30$.
In generale: num. spigoli = num. lati/2.
- Terza fase: calcolare il numero dei vertici.
Si applica la formula di Eulero:
 $V = S - F + 2$

Le proprietà principali dei solidi platonici

I solidi platonici hanno le seguenti proprietà:

- le facce sono tutte poligoni regolari uguali;
- i vertici giacciono tutti su una sfera;
- gli angoli diedri sono tutti uguali;
- tutti i vertici sono circondati dallo stesso numero di facce.
- All'interno del solido platonico è inscrivibile una sfera.

Una curiosità: i prefissi dei nomi dei poliedri

num. facce	prefisso	num. facce	prefisso
1	mono	16	hexakaideca
2	di	17	heptakaideca
3	tri	18	octakaideca
4	tetra	19	enneakaideca
5	penta	20	icosa
6	hexa	24	icositetra
7	hepta	30	triconta
8	octa	40	tetraconta
9	ennea	50	pentaconta
10	deca	60	hexeconta
11	hendeca	70	heptaconta
12	dodeca	80	octaconta
13	triskaideca	90	enneaconta
14	tetrakaideca	100	hecato
15	pentakaideca		

E ora costruiamo i nostri solidi platonici:

