



LICEO MATEMATICO  
IIS Gregorio da Catino - Poggio Mirteto (RI)

# La divina proporzione o sezione aurea $\phi$ e i numeri di Fibonacci in Natura

Come vedremo le proporzioni geometriche in natura fin dall'antichità hanno attratto l'attenzione degli studiosi e dei pensatori.

Si parte dal VI secolo a.C. con gli studi sul pentagono e il pentagramma ai tempi di Pitagora per proseguire poi con un allievo di Pitagora, Ippaso di Metaponto (V sec. a.C.), che fu il primo a scoprire i numeri irrazionali (Livio, 2002) per arrivare con gli *Elementi* di Euclide, scritti attorno al 350 a.C. (Devlin, 2011), ad avere la prima chiara definizione di  $\phi$  cioè di quello che Euclide definisce il «rapporto estremo e medio».

*“ Si dice che una retta è stata divisa in estrema e media ragione quando la retta intera sta al segmento maggiore di essa come il segmento maggiore sta al segmento minore”*

Euclide, Elementi - Libro VI



$$AB : AX = AX : XB$$

Nel 1494 il matematico italiano Luca Pacioli scrisse il libro «*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*» che viene considerato fondamentale per la storia della matematica e per l'espansione della matematica in Europa (l'algebra non venne insegnata come disciplina accademica nelle università europee fino alla metà del XVI secolo).

Più tardi nel 1509 pubblicò un trattato in tre volumi dal titolo «*De divina proportione*» in cui battezzava così il rapporto  $\phi$ .

Nella *Summa* Luca Pacioli fa riferimento a Leonardo da Pisa (più tardi detto Fibonacci) a cui ascrive il ruolo di padre della rivoluzione aritmetica europea col suo «*Liber abbaci*».

In questo libro Fibonacci insegnò a trasformare i complicati calcoli con le cifre romane in operazioni alla portata di tutti rivelando all'Europa il sistema numerico-decimale appreso dagli indiani e dai commercianti arabi. Face conoscere le nove figure indiane e *zephirum*, lo zero.

Verso la fine del libro Leonardo inserisce un problema sulla crescita di una popolazione di conigli, mutuato dalle sue fonti indiane, per far pratica del nuovo sistema numerico (Devlin, 2011).

I numeri generati dal problema rappresentano proprio i famosi numeri di Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...

Solo nel 1835, in un libro scritto dal matematico Martin Ohm, il numero  $\phi$  venne battezzato «sezione aurea».

Indicata con la lettera greca  $\phi$  (phi), la sezione aurea è, come  $\pi$ , un numero la cui espansione decimale prosegue all'infinito senza mai ripetersi senza uno schema generale.

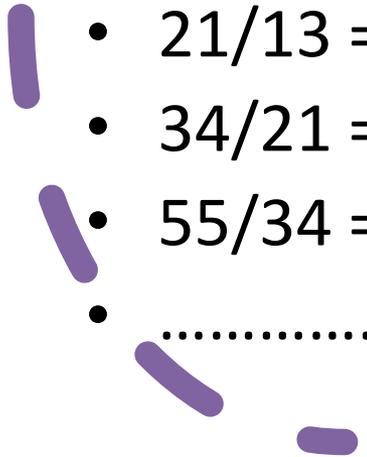
L'espansione decimale di  $\pi$  inizia con 3,14159 quella di  $\phi$  con 1,61803.

La connessione fra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea venne verificata nel XIX secolo: se ogni numero di Fibonacci viene diviso per quello precedente, man mano che avanziamo nella sequenza il risultato ottenuto tende a  $\phi$  cioè si avvicina progressivamente alla sezione aurea.



La sezione aurea rappresenta il limite a cui tendono i rapporti tra i numeri di Fibonacci

- $2/1 = 2$
- $3/2 = 1,5$
- $5/3 = 1,666$
- $8/5 = 1,6$
- $13/8 = 1,625$
- $21/13 = 1,615$
- $34/21 = 1,619$
- $55/34 = 1,618$
- .....



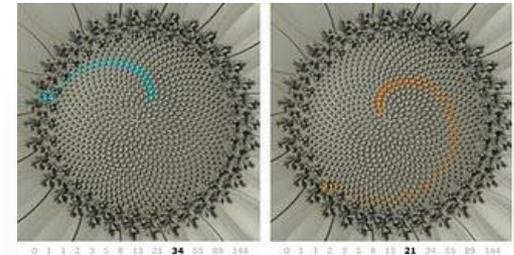
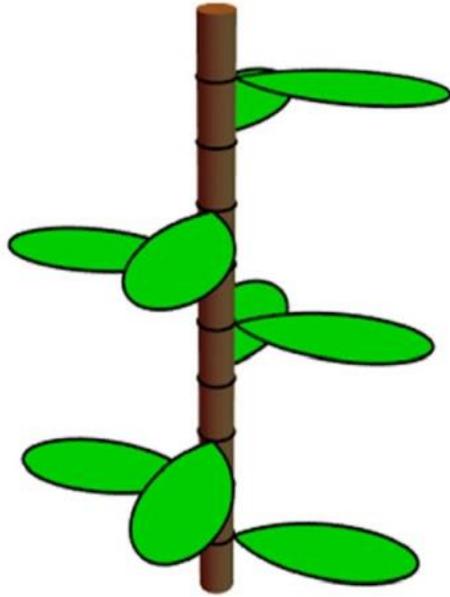
*Sezione aurea, costante di Fidìa* (dal nome del grande scultore del V secolo a.C.), *rapporto aureo, numero aureo e divina proporzione* sono i nomi suggestivi con cui è conosciuta la  $\Phi$ .

La predilezione della natura per l'efficienza fa sì che la disposizione dei petali dei fiore, dei loro semi e delle foglie sugli steli dipenda dalla sezione aurea che porta all'ottimizzazione della struttura.

In molti esseri viventi o in loro parti anatomiche, certe proporzioni rispettano la successione matematica di Fibonacci e come abbiamo visto il rapporto tra due numeri successivi di tale successione tende a  $\Phi$ .

A landscape photograph showing a wide, flat, snow-covered field in the foreground. In the middle ground, there is a dense, dark forest of trees. The background features a range of low, snow-capped hills or mountains under a bright, clear sky. The overall scene is serene and wintry.

# LE PIANTE



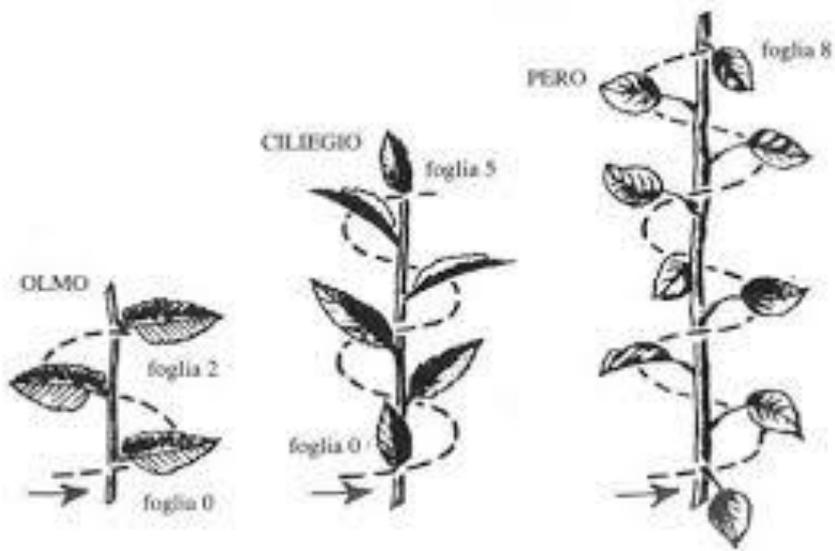
Argomenti della programmazione correlati:  
forma – funzione  
la fotosintesi  
le piante e le forme di vita  
l'energia disponibile

# Disposizione delle foglie sui fusti studiata dalla Fillotassi

Salendo lungo il fusto o lo stelo di una pianta la posizione delle foglie segue, nella maggior parte dei casi, una linea spirale. Si scoprì che l'angolo tra due foglie successive è sempre vicino a  $137^\circ$ .

Questa disposizione ottimizza l'esposizione alla luce solare e permette a tutte le foglie di intercettare la stessa quantità così da svolgere al meglio la fotosintesi.

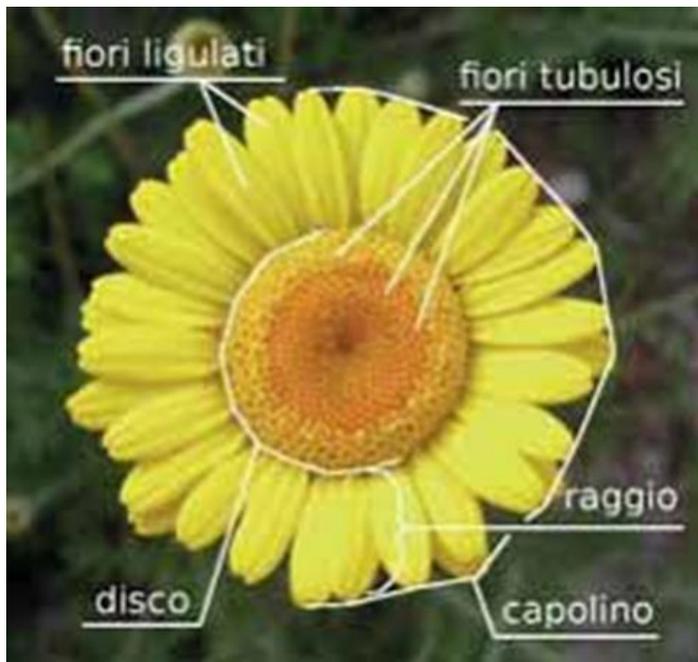
- Partiamo da una foglia e indichiamo con  $x$  il numero di giri completi della spirale prima di trovare una seconda foglia direttamente sopra la prima; indichiamo quindi con  $y$  il numero di foglie che si incontrano procedendo dalla prima fino a quest'ultima.
- Il rapporto  $x/y$  è detto «divergenza della pianta».



- $1/2$  **olmo**, tiglio, ecc.
- $1/3$  faggio, nocciolo, ecc.
- $2/5$  **ciliegio**, quercia, ecc.
- $3/8$  **pero**, pioppo, ecc.
- $5/13$  mandorlo, porro, ecc.
- Tutti rapporti tra numeri di Fibonacci

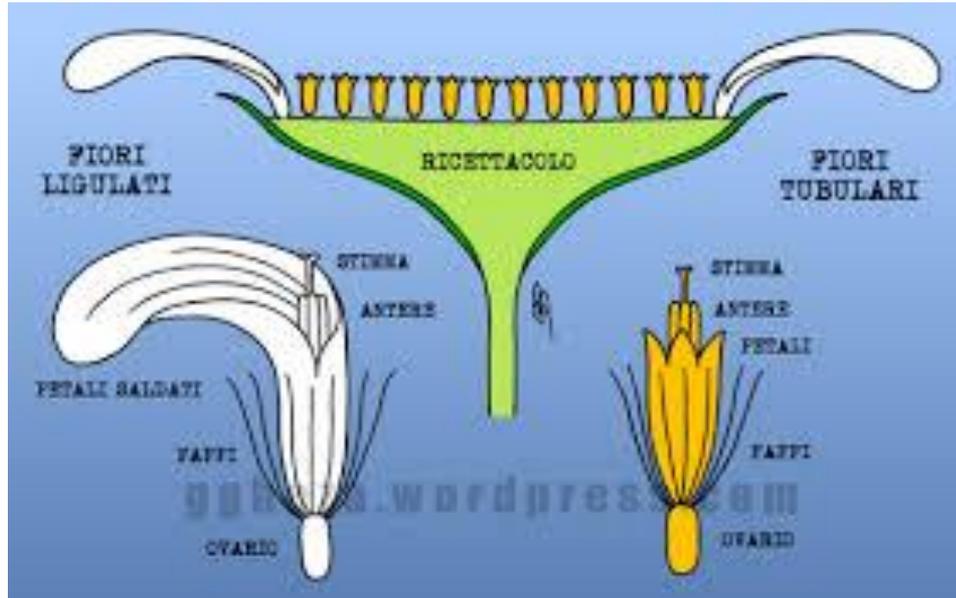
Esempi di divergenze comuni

# Fillotassi dei fiori, disposizione dei capolini



In botanica si distinguono *fiori* da *infiorescenze*, essendo quest'ultime formate da raggruppamenti ordinati di fiori. Nelle margherite, e in altre specie con struttura simile, come i girasoli, ecc. quello che sembra avere la forma di un fiore risulta essere in realtà una infiorescenza formata da fiori molto piccoli addossati l'uno all'altro. Questa particolare infiorescenza viene denominata *capolino*.

## Struttura del Capolino



I fiori centrali, che formano il disco, sono *fiori tubulosi*, che si suddividono superiormente in 5 piccoli lembi, mentre i fiori esterni, che costituiscono i *fiori del raggio*, quelli che appunto vengono indicati, in modo impreciso, con il termine di petali, sono in effetti fiori derivati dai precedenti, però con uno dei 5 lembi che si sviluppa molto di più (*fiori ligulati*).

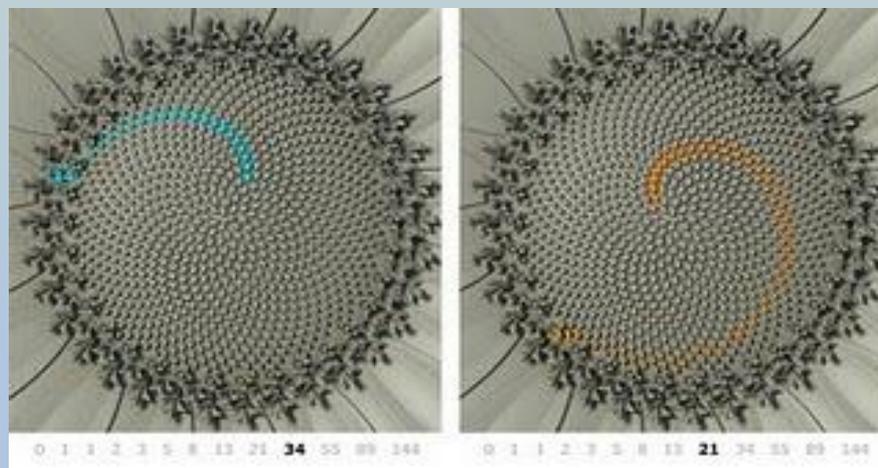
L'esempio più famoso in assoluto è quello dei girasoli.

Esaminando la disposizione dei semi di girasole nella calatide (infiorescenza a capolino) si osservano due famiglie di spirali composte la prima da curve ruotanti in senso antiorario, l'altra da curve ruotanti in senso orario.

In moltissimi casi i numeri di curve che compongono le due famiglie sono due numeri di Fibonacci consecutivi!

A sinistra in figura si individua una spirale «antioraria», in azzurro, e a destra una spirale «oraria» in arancio.

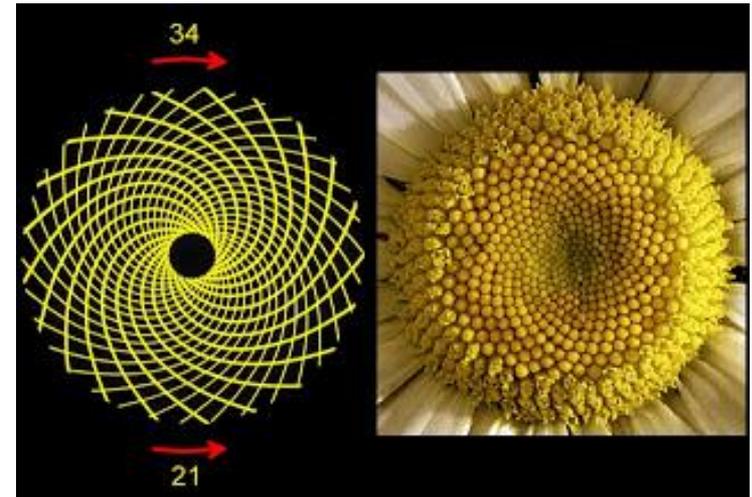
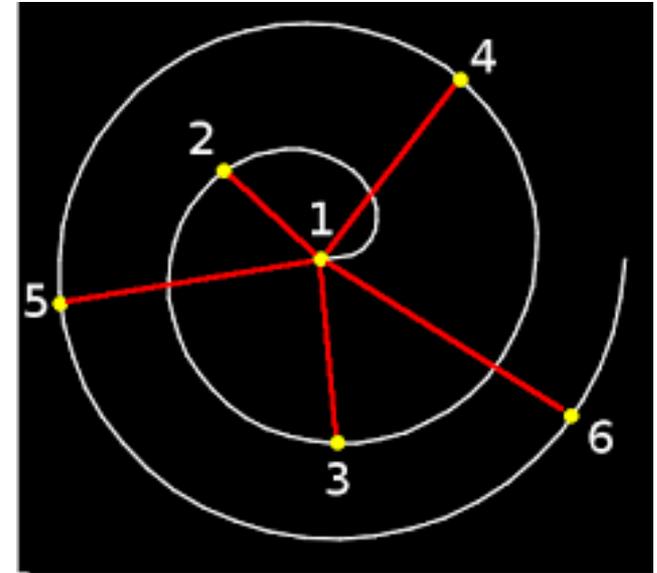
Contandole si individuano numeri di Fibonacci di spirali, nel primo caso 34 e nel secondo 21.

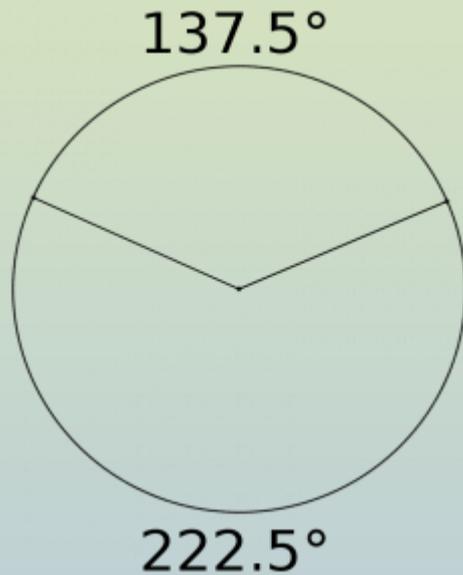


Nel caso delle Asteracee (come il girasole), i fiori tubulosi più vecchi sono spinti nella parte esterna del disco (sono tra l'altro quelli che sbocciano prima) da quelli più giovani che si formano progressivamente nella zona centrale e l'effetto complessivo è che si formano delle linee curve che assomigliano proprio a delle spirali, come si vede chiaramente nella figura.

Partendo dal presupposto che i fiori devono distribuirsi nella maniera più efficiente possibile in modo da non sprecare spazio e non sovrapporsi gli uni agli altri si dispongono secondo un angolo di  $137^\circ$  circa.

*Angolo formato tra due fiori consecutivi e il centro del disegno.*





L'angolo aureo è pari a circa 137,5 gradi e insieme al suo complementare divide l'angolo giro in media ed estrema ragione

Man mano che cresce la punta di un germoglio quindi molto prima della comparsa dei fiori, in certe aree del germoglio si formano minuscole protuberanze, dette *primordi*, da cui in seguito si formeranno i semi e le altre parti fondamentali del fiore (o capolino).

I primordi si formano ad un angolo di circa  $137^\circ$  l'uno dal successivo in modo tale da essere stipati nel modo più efficiente possibile.

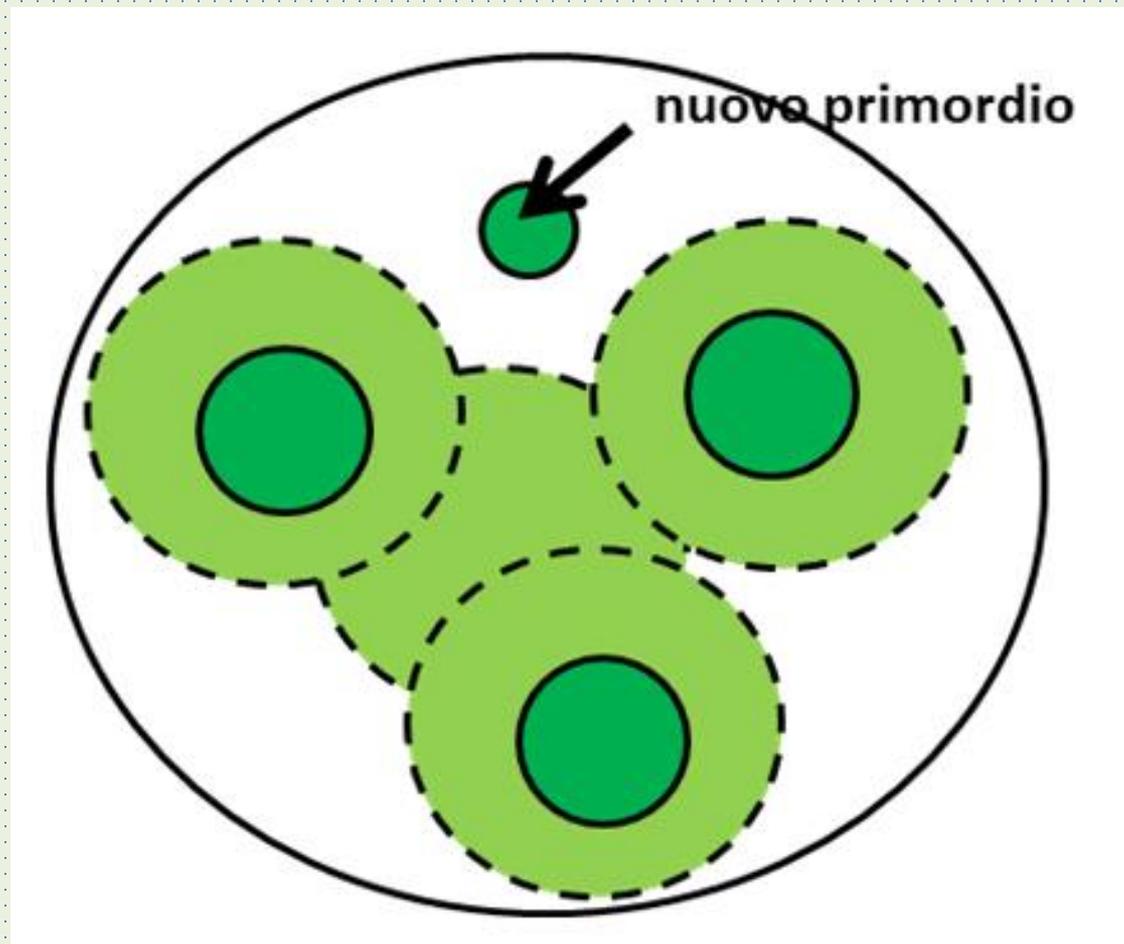
Secondo una teoria, un primordio fogliare crea attorno a sé un campo (per esempio, potrebbe farlo grazie alla produzione di uno specifico segnale) in grado d'impedire la creazione di un nuovo primordio.

Di conseguenza, un nuovo primordio può formarsi soltanto nel punto lasciato libero dai campi generati dai diversi primordi.

Seguendo queste regole del gioco, un po' come se il meristema (tessuto embrionale) fosse una scacchiera ed i primordi le pedine, è possibile ottenere una filloclasi spiralata.

Si è visto che un ormone in particolare è associato con la formazione dei primordi. Questo ormone, specifico segnale chimico è l'auxina.

Secondo la teoria dei campi inibitori attorno ad ogni primordio (in verde scuro), così come al centro del meristema, è presente un campo inibitore (verde chiaro) dovuto, ad esempio, ad un segnale chimico originato dal primordio (quantità auxina). In questo modo, un nuovo primordio può nascere solo nel punto lasciato libero dall'interazione dei vari campi.



# Impariamo dalle piante a ottimizzare



In Spagna, nella regione desertica dell'Andalusia, si trova un luogo che assomiglia ad un'oasi con al centro una palma, che però è un pilastro alto 100 metri circondato da file di specchi giganti, più di 600, ciascuno dalle dimensioni di mezzo campo da tennis. Gli specchi riflettendo i raggi del sole per concentrarli sulla torre centrale, dove il calore del sole viene convertito in elettricità sufficiente ad alimentare 6.000 abitazioni. Questi impianti sono denominati PS10 e sono ancora rari al mondo perché ad energia solare concentrata (CSP).

I ricercatori del MIT, in collaborazione con RWTH Aachen University in Germania, hanno ideato un campo a spirale con i suoi eliostati riarrangiati per assomigliare ad un girasole, con ogni specchio posizionato con un angolo di circa 137 gradi rispetto al suo vicino. Il layout ottimizzato occupa uno spazio inferiore del 20 % rispetto all'attuale layout del PS10, quindi riduce l'impronta ecologica. Inoltre, il modello a spirale ha ridotto l'ombreggiatura facendo aumentare l'efficienza complessiva rispetto alla configurazione radiale a specchi sfalsati PS10 dei precedenti impianti.

The image features a stylized landscape. The upper portion is dominated by a dark blue, almost black, mountain range with a jagged, layered appearance. Below the mountains is a white, textured foreground that resembles snow or a light-colored ground surface. The overall aesthetic is graphic and minimalist.

# GLI ANIMALI

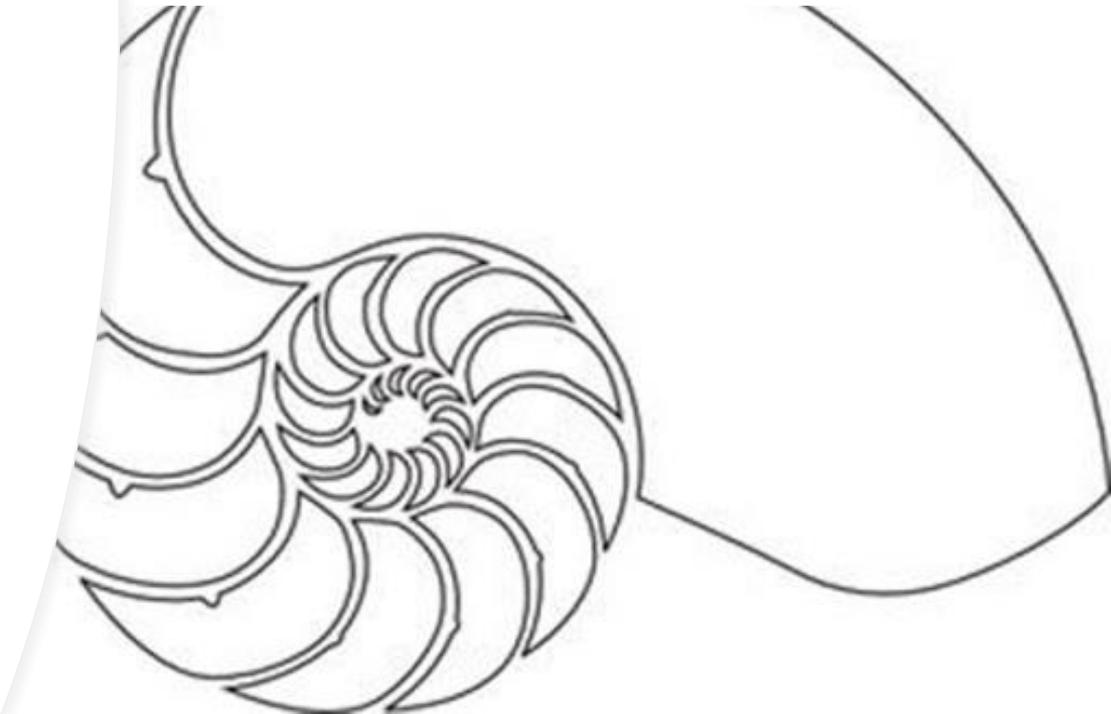
Argomenti della programmazione correlati:

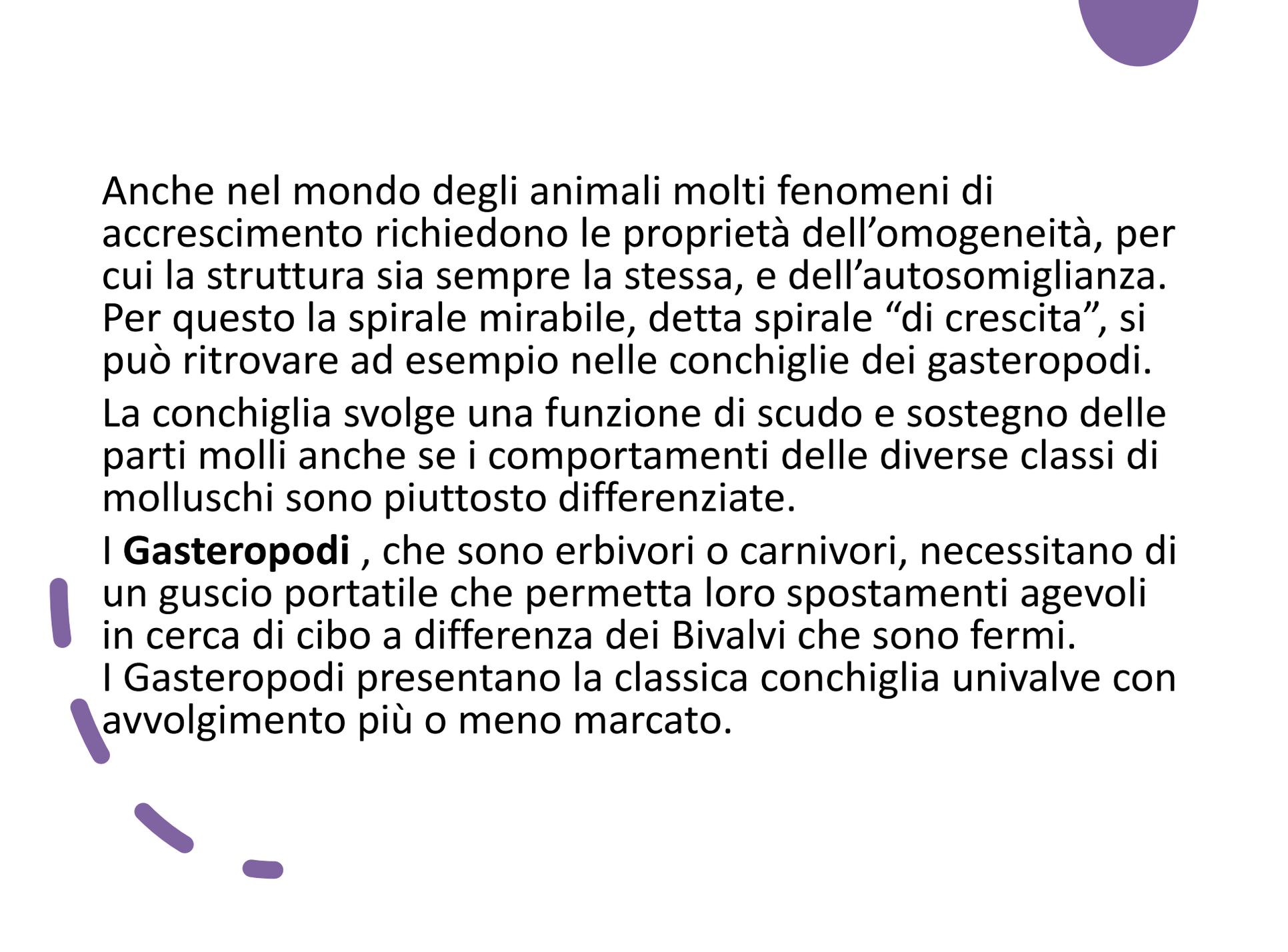
forma – funzione

chiralità

evoluzione - speciazione

gli animali e le forme di vita



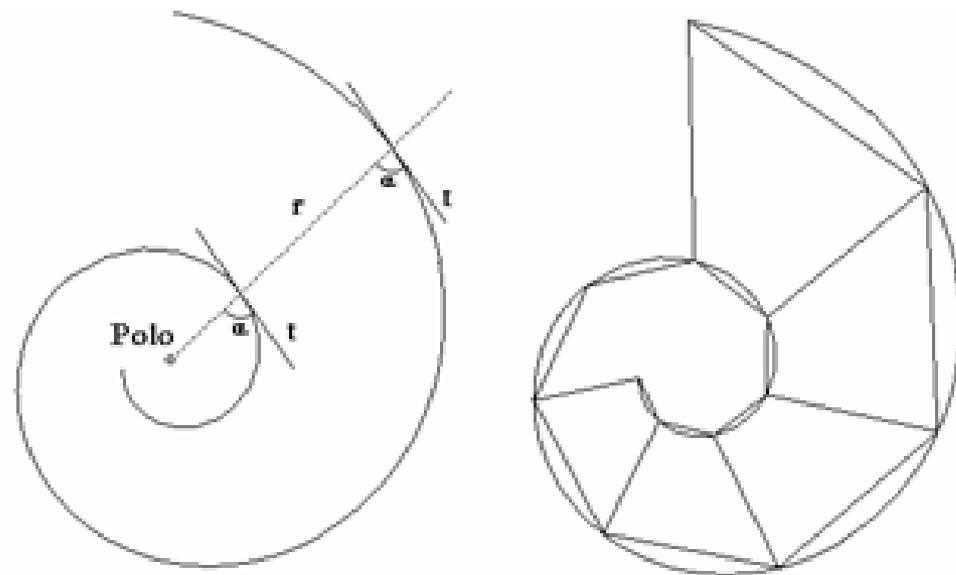


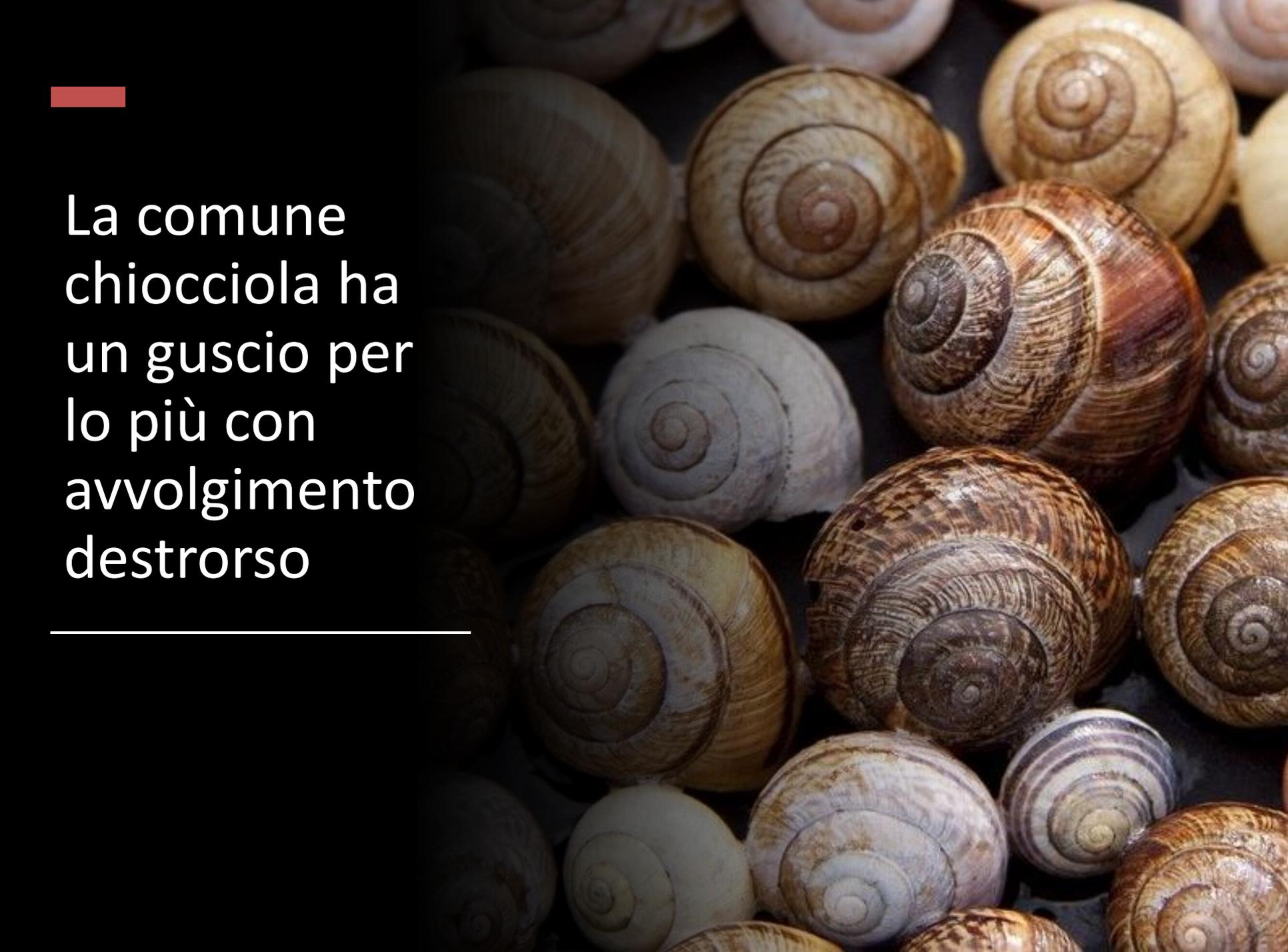
Anche nel mondo degli animali molti fenomeni di accrescimento richiedono le proprietà dell'omogeneità, per cui la struttura sia sempre la stessa, e dell'autosomiglianza. Per questo la spirale mirabile, detta spirale "di crescita", si può ritrovare ad esempio nelle conchiglie dei gasteropodi. La conchiglia svolge una funzione di scudo e sostegno delle parti molli anche se i comportamenti delle diverse classi di molluschi sono piuttosto differenziate.

I **Gasteropodi**, che sono erbivori o carnivori, necessitano di un guscio portatile che permetta loro spostamenti agevoli in cerca di cibo a differenza dei Bivalvi che sono fermi.

I Gasteropodi presentano la classica conchiglia univalve con avvolgimento più o meno marcato.

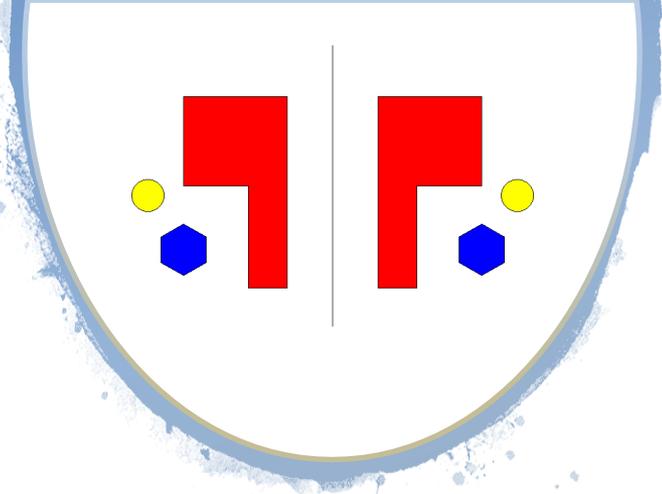
Nell'immagine a sinistra vediamo una spirale logaritmica su cui è indicato l'angolo a costante tra radiale e tangente che la caratterizza. A destra abbiamo la stessa spirale segmentata in quadrilateri. Immaginando che un ipotetico mollusco abiti nel corso della sua crescita via via il settore più grande, possiamo comprendere come questa strategia abitativa gli consenta di crescere in un guscio rigido senza cambiare forma. Questa strategia nota come crescita isometrica è consentita unicamente da forme strutturate, nel piano e nello spazio, sulla spirale logaritmica.





La comune  
chiocciola ha  
un guscio per  
lo più con  
avvolgimento  
destrorso

---

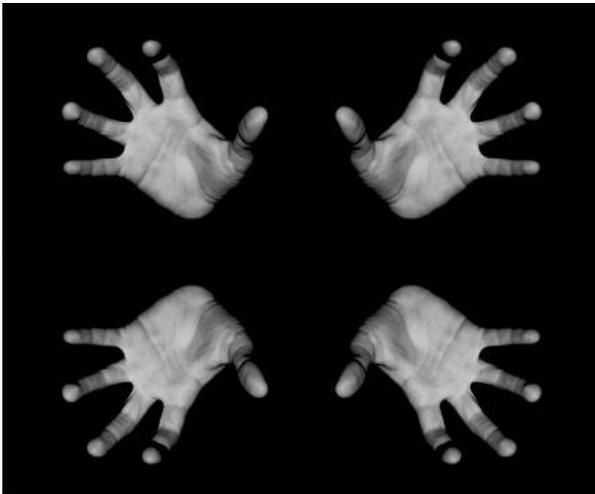


# Chiralità

La chiralità consiste nella possibilità, da parte di un oggetto, un essere o una molecola, di avere una possibile immagine speculare non sovrapponibile.

Il termine chiralità deriva dalla parola greca "*chiros*", ovvero "mano". Le mani, infatti, hanno tra le loro proprietà anche quella della chiralità.

Se attraverso un processo detto di *enantiomorfismo* si tenta di ottenere l'immagine speculare della mano destra, si otterrà la mano sinistra.



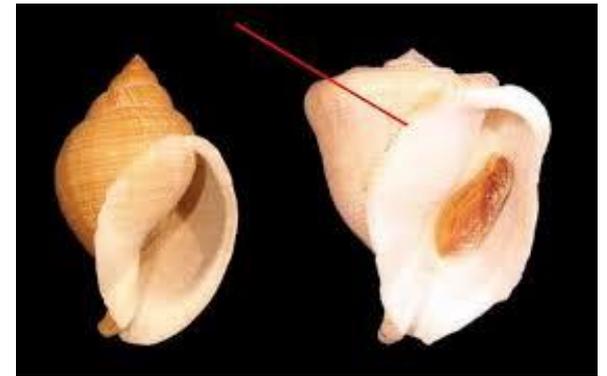
# Destrorso/Sinistrorso

Le conchiglie dei gasteropodi si orientano con l'apertura verso chi osserva e con l'apice in alto. Fatto questo la maggior parte dei generi è avvolta in senso ORARIO così che l'apertura si trova alla DESTRA di chi osserva, talvolta alcune conchiglie sono avvolte in senso ANTIORARIO, avvolgimento SINISTRORSO, così che l'apertura si trova alla sinistra di chi osserva.

Il fatto non è strano infatti in natura, le proporzioni tra oggetti destrorsi e sinistrorsi non sono quasi mai 50% e 50%.

Le conchiglie sono per lo più destrorse (ma esistono anche le eccezioni) così come le eliche del DNA hanno un comportamento destrorso nella maggior parte dei casi.

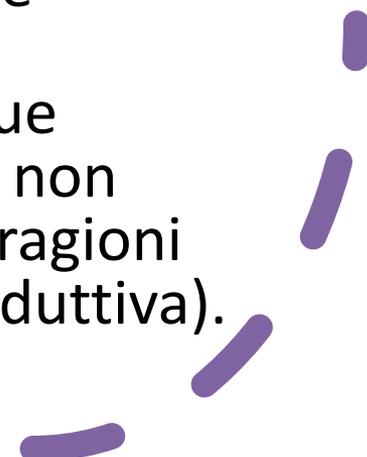
Gli amminoacidi, invece, sono per lo più sinistrorsi.





Chioccioline delle isole dell'Oceano Indiano, genere ***Satsuma***, hanno generalmente un conchiglia destrorsa, cioè con le spire avvolte in senso orario. Le varianti, sinistrorsa/destrorsa, difficilmente si ritrovano nella medesima specie.

In alcune lumache, si verifica la mutazione di un gene chiave, legato all'avvolgimento della conchiglia, che risulta così avere delle spire in senso antiorario. Questa mutazione normalmente risulta controproducente, infatti, due individui con spirali opposte non riescono ad accoppiarsi per ragioni morfologiche (barriera riproduttiva).



La mutazione di un gene, quindi, può generare una barriera riproduttiva e facilitare un evento di speciazione.

Nel caso di queste chioccioline si è osservato che in diverse isole si sviluppavano le chioccioline sinistrorse. Un processo di speciazione quasi istantaneo.

Si è capito che ci si trovava in presenza di un alto livello di predazione da parte dei serpenti della famiglia *Pareatidae*, specializzati proprio nella caccia di lumache e chioccioline.

Lo studio dimostra come questi serpenti siano abilissimi nel catturare le chioccioline con spirale destrorsa ma impossibilitati, per la conformazione della mandibola, a catturare le sinistrorse.

Le specie sinistrorse si trovano solamente (o quasi) negli areali di distribuzione dei serpenti che predano le destrorse.



# Dal passato – fossili spiraliformi

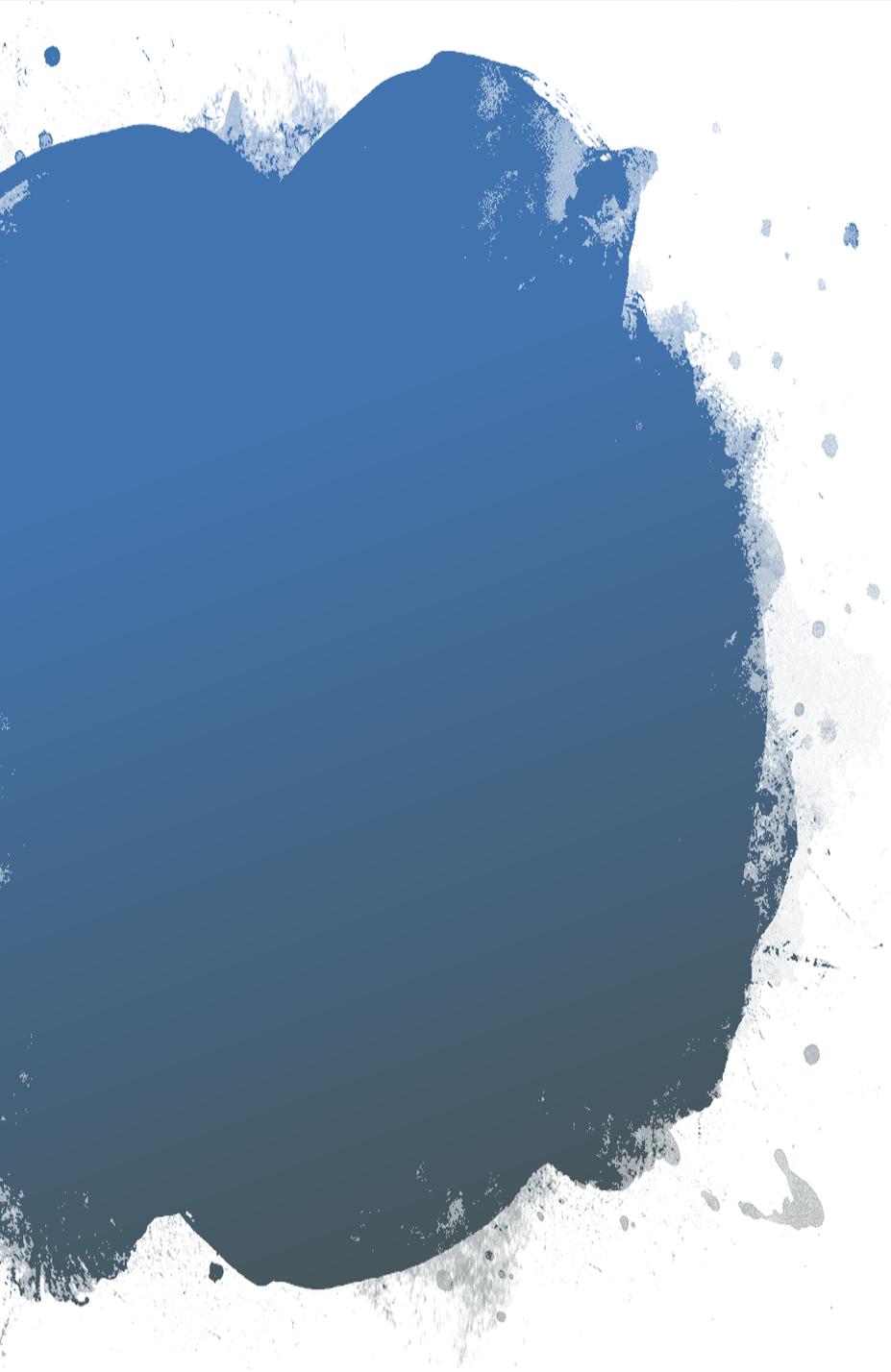
Il ritrovamento a più riprese, a partire dall'Ottocento, di fossili che ricordavano le lame di una sega circolare con dentellature cuneiformi a centinaia, ha posto notevoli interrogativi ai paleontologi. Le centinaia di cunei affilati erano disposti secondo strette spirali del diametro attorno ai 50 cm.

Varie ipotesi sono state fatte: spirale come pinna difensiva, come parte di un muso, ecc.



Nel 2013 grazie alla TAC effettuata su un fossile, con frammenti di cartilagine rinvenuto nel 1950, e alla successiva ricostruzione al computer si è arrivati a stabilire che si tratta della mascella di un pesce cartilagineo *Helicoprion*, un'anomalia evolutiva vissuta nel Permiano.





Simili a squali, probabilmente di lunghezza massima attorno ai 12 m, gli Elicoprioni vissero per circa 8 milioni di anni tra 282 e 275 milioni di anni fa nel Permiano. Si pensa che durante questo periodo le loro dimensioni aumentassero fino a triplicare e che l'apertura della mascella superasse di molto quella degli attuali squali bianchi, ma che riuscissero a sviluppare solo un terzo della loro forza, tipo quella di un coccodrillo.

Le mascelle a spirale (con fino a 150 denti) erano in grado di tranciare le prede o di staccare la carne dalle conchiglie. Questo tratto anatomico peculiare non si ripresenterà più tra gli esseri viventi.



Siti di fossili moderni, 282-275 milioni di anni fa

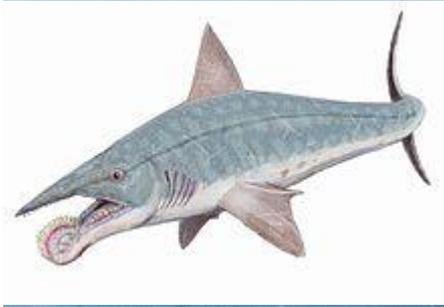
Numero di fossili trovati dal 1886:

- 1
- 2-5
- 25
- 100



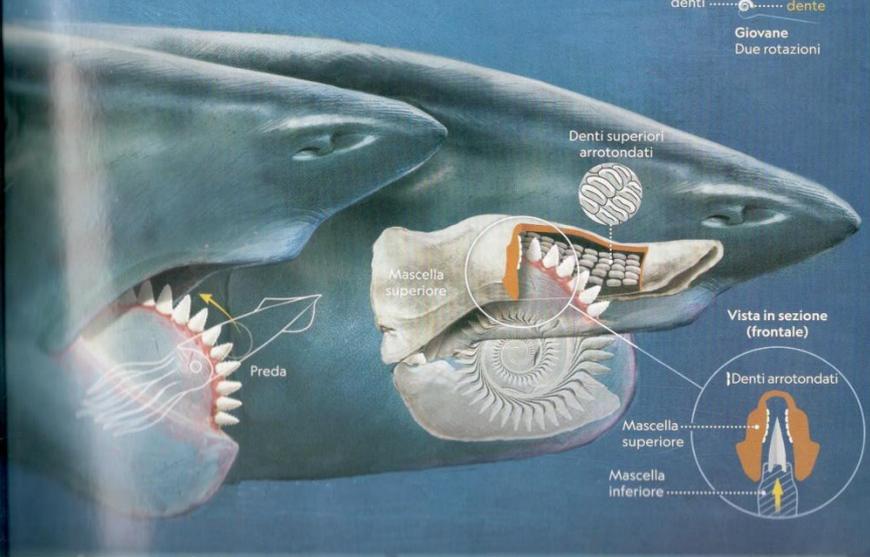
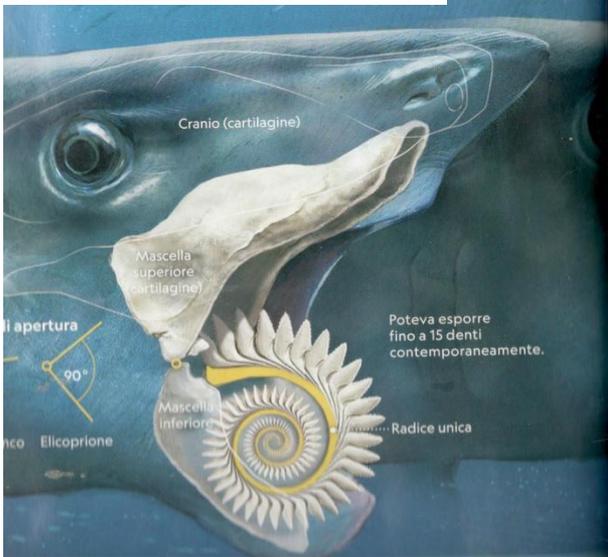
Parente moderno Chimera elefante (*Hydrolagus colliciei*)

Femmina Lunghezza 97 cm



**UNA SPIRALE DI DENTI USATI**

Quando a uno squalo moderno cadono i denti, questi vengono sostituiti da quelli nuovi. Gli ellicoprioni invece nascevano con tre denti che non perdevano mai; man mano che spuntavano i denti nuovi, quelli vecchi si ricoprivano di cartilagine, formando una spirale che ne poteva contenere anche 150, tutti fissati alla stessa radice.



# Bibliografia/Sitografia

Abbate G., Forni C., Pasqua G., Botanica Generale – Piccin (2015)

Ayala F.J., L'evoluzione lo sguardo della biologia – Jaka Book (2009)

Baptista F.G., Enigma fossile – National Geographic (Dicembre 2019)

Devlin K., I numeri magici di Fibonacci – Mondolibri (2012)

Livio M., La sezione aurea – BUR (2017)

Luisi P.L., Sull'origine della vita e della biodiversità – Mondadori (2013)

Stewart I., La piccola bottega delle curiosità matematiche del professor Stewart – Codice (2010)

<http://matematica-old.unibocconi.it/arteisa/arteisa02.htm>

<https://docplayer.it/12527897-Quadernotredici-margherite-e-spirali-cavolfiori-e-frattali.html>

<http://mondoelettrico.blogspot.com/2012/01/fibonacci-o-fermat-girasoli-ed-impianti.html>

<https://www.nature.com/articles/ncomms1133>