



La sezione aurea

L'oggetto di studio delle prossime lezioni è la *sezione aurea* di un segmento e il suo alter-ego, il *rapporto aureo*, con particolare riferimento a considerazioni tratte dagli *Elementi* di Euclide.

Definizione: la sezione aurea di un segmento è quella parte del segmento stesso media proporzionale tra il segmento e la parte restante. Se consideriamo come unità la lunghezza del segmento e indichiamo con x la sua sezione aurea, si avrà:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

da cui ricaviamo $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (tralasciando la soluzione negativa, priva di significato geometrico). Per un segmento AB qualsiasi la sezione aurea sarà data da $\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$.

Il rapporto aureo è quello tra un segmento e la sua sezione aurea, quindi è:

$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Da questa definizione risulta evidente che sezione aurea e rapporto aureo sono reciproci tra loro. Il rapporto aureo viene convenzionalmente indicato con Φ e, quindi, la sezione aurea con Φ^{-1} .

Altre osservazioni:

- la definizione di sezione aurea che abbiamo scritto sopra equivale geometricamente ad affermare che il quadrato che ha per lato la sezione aurea di un segmento è equivalente al rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte rimanente del segmento stesso;
- abbiamo visto prima che la sezione aurea di un segmento di lunghezza unitaria si ottiene come soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 + x - 1 = 0$, scartando la soluzione negativa; se al contrario assumiamo che la sezione aurea valga 1 e ci chiediamo quale sia il segmento che abbia tale sezione aurea,

abbiamo (detta x la lunghezza incognita del segmento): $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, da cui l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ la cui soluzione positiva è $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ovvero il rapporto aureo; in generale possiamo, quindi, concludere che, se AH è la sezione aurea di AB, il rapporto aureo è AB/AH;

- le parti decimali di Φ e di Φ^{-1} sono uguali: $\Phi \cong 1,618033989...$
 $\Phi^{-1} \cong 0,618033989...$

non solo: risulta anche $\Phi^2 \cong 2,618033989...$

- se consideriamo la serie di Fibonacci [definizione della serie], detto F_n l'elemento generico della serie, risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$ (verifica con alcuni valori)
- consideriamo il numero irrazionale $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$

esso può essere scritto come $x = 1 + \frac{1}{x}$, che ci fornisce l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ che abbiamo già visto avere come soluzione positiva il rapporto aureo; si può quindi assumere tale frazione continua come una scrittura del rapporto aureo.

Euclide 1

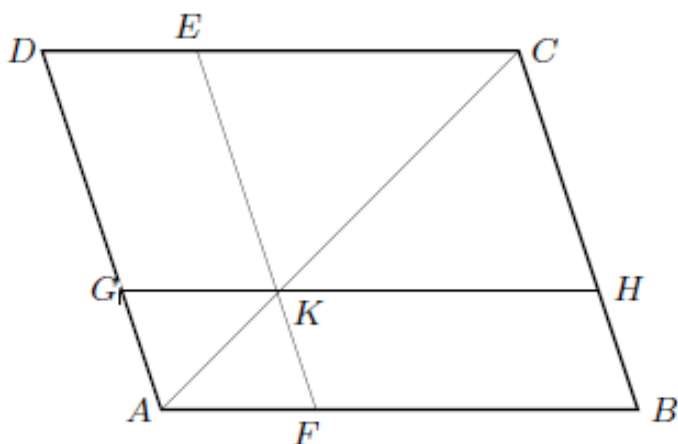
La sezione aurea compare negli *Elementi* di Euclide come “proposizione”, ovvero come problema di cui Euclide fornisce la sua soluzione. La proposizione in questione è la seguente: *dividere una retta data in modo tale che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.*

N.B: con *retta* in realtà Euclide intendeva un segmento di retta.

Il procedimento che soddisfa tale proposizione richiede la considerazione di altre due proposizioni, espone in precedenza nell'opera euclidea, che non sono altro che due teoremi.

Prima proposizione: *dato un parallelogramma ABCD si considerino la diagonale AC e i due segmenti EF e GH paralleli ai lati del parallelogramma che si intersecano nel punto K di AC. I parallelogrammi DEKG e KHBF, detti complementi, sono equivalenti.*

Disegniamo la figura relativa alla dimostrazione di tale proposizione:



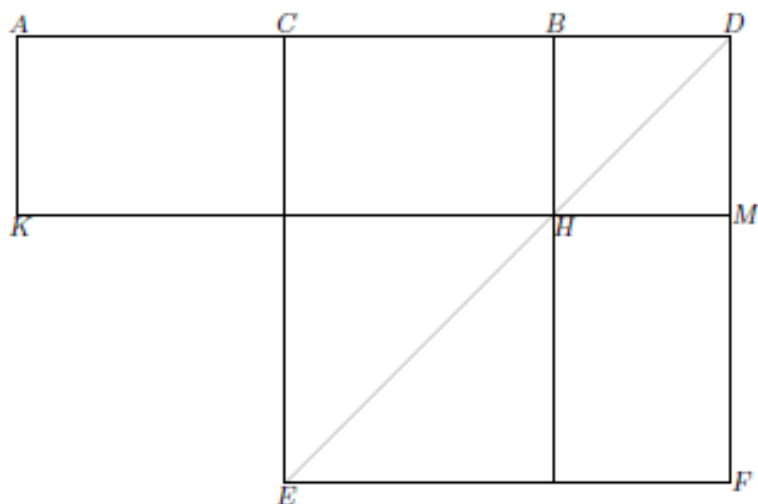
AC divide il parallelogramma ABCD in due triangoli ACD e ACB congruenti e, quindi, equivalenti. Lo stesso fa AK in GKFA e KC in ECHK per cui, indicando con $\mathcal{A}$ le aree, si ha:

$$\mathcal{A}(\text{DEKG}) = \mathcal{A}(\text{ACD}) - \mathcal{A}(\text{ECK}) - \mathcal{A}(\text{GKA}) = \mathcal{A}(\text{ACB}) - \mathcal{A}(\text{HCK}) - \mathcal{A}(\text{FKA}) = \mathcal{A}(\text{KHBF}) \text{ c.v.d.}$$

Seconda proposizione: sia AB una retta data e C il suo punto medio. Si prolunghi AB con la retta BD . Allora $\mathcal{R}(AD, DB) + Q(CB) = Q(CD)$ (dove $\mathcal{R}(AD, DB)$ indica il rettangolo che ha per lati AD e DB e $Q(a)$ il quadrato di lato a).

Disegniamo la figura relativa alla dimostrazione di tale proposizione:

tracciato il segmento AB (con C punto medio), lo prolunghiamo dalla parte di B di un tratto BD ; consideriamo il quadrato $CDFE$ e ne tracciamo la diagonale DE , che permette di determinare i punti H , K ed M (si noti che $BDMH$ è un quadrato)



Se ora si osserva che $\mathcal{R}(\text{CF}, \text{AF}) = Q(\text{AH}) + \mathcal{R}(\text{AH}, \text{AB})$ abbiamo infine

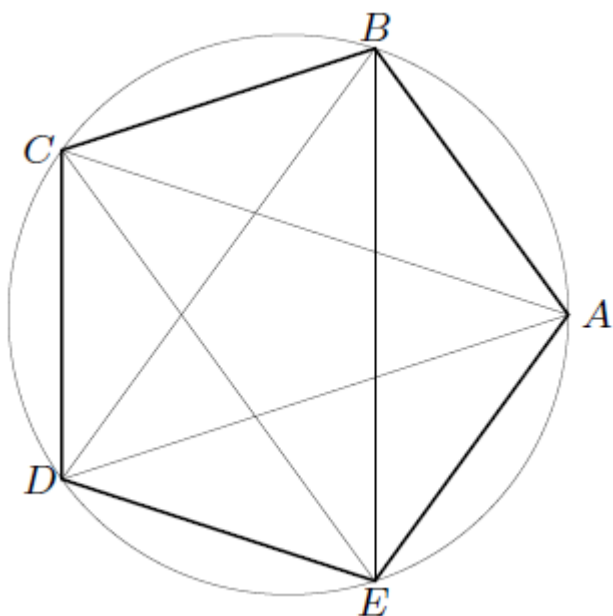
$Q(AH) = \mathcal{R}(HB, AB)$ ovvero AH è la sezione aurea di AB.

(Si osservi che risulta anche AC sezione aurea di AF)

Euclide 2

La sezione aurea entra in gioco pure trattando il pentagono regolare.

Non seguiamo tutto il procedimento proposto da Euclide per disegnare un pentagono regolare, inscritto in una circonferenza assegnata. Prendiamo come punto di partenza un triangolo isoscele ABD, con angoli $72^\circ - 72^\circ - 36^\circ$, inscritto in una circonferenza. Tracciamo le bisettrici degli angoli alla base e osserviamo che $\widehat{ABE}$ sottende la corda AE, $\widehat{DBE}$ la corda DE, $\widehat{BAC}$ la corda BC, $\widehat{CAD}$ la corda CD, $\widehat{ADB}$ la corda AB (base del triangolo iniziale). Tali corde sono tutte congruenti tra loro perché sono congruenti gli angoli che le sottendono.

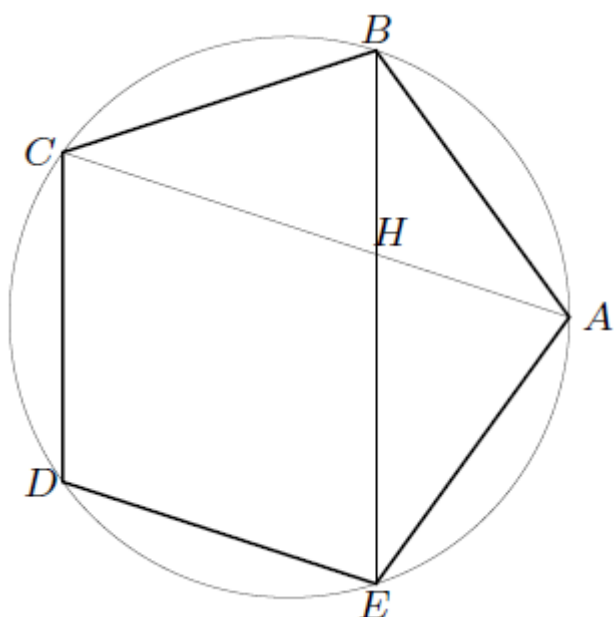


Negli *Elementi* è presente il seguente teorema: *in un pentagono regolare le diagonali si tagliano in estrema e media ragione ed i segmenti più lunghi di questa suddivisione hanno lunghezza uguale al lato del pentagono.*

Da tale teorema segue un importante risultato: il lato di un pentagono regolare è sezione aurea della diagonale.

Vediamo la dimostrazione del precedente teorema.

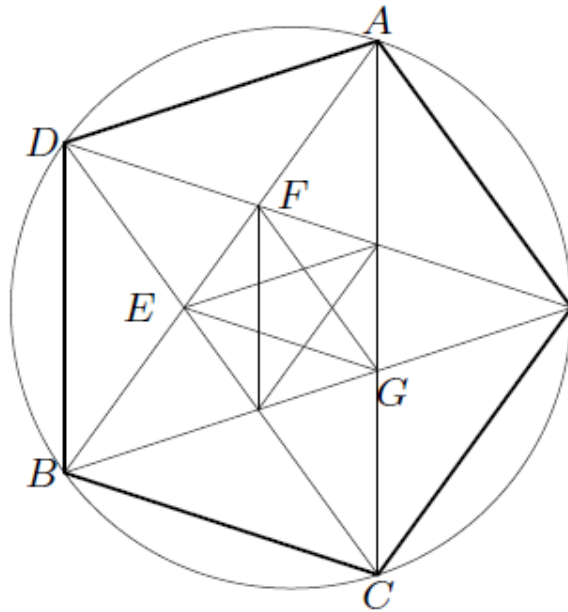
Consideriamo un pentagono regolare ABCDE inscritto in una circonferenza e tracciamo le diagonali AC e BE.



I triangoli ABE ed ABC sono congruenti: in particolare abbiamo $\widehat{BAC} = \widehat{AEB}$, da cui segue che l'angolo $\widehat{AHE}$, esterno al triangolo ABH ha ampiezza $\widehat{AHE} = 2\widehat{BAH}$. Poiché i lati del pentagono sono uguali tra loro, anche gli archi corrispondenti lo sono e pertanto l'arco EC ha ampiezza doppia dell'arco BC. Dunque l'angolo $\widehat{EAC}$, che insiste sull'arco EC, ha ampiezza doppia di quella dell'angolo $\widehat{BAC} = \widehat{BAH}$, che insiste sull'arco BC. Dunque abbiamo $\widehat{HAE} = \widehat{EAC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BAH} = \widehat{AHE}$, che dimostra come il triangolo AHE sia isoscele per cui si ha $EH = EA = AB$, che dimostra la seconda parte del teorema. Quanto alla prima parte, osserviamo che i triangoli isosceli ABE ed ABH sono simili in quanto hanno gli angoli alla base uguali tra loro. Vale allora la proporzione $EB : AB = AB : HB$, ovvero, avendo appena mostrato che $AB = EH$, $EB : EH = EH : HB$ che mostra come EH sia la sezione aurea della diagonale EB.

Questo risultato ci porta a stabilire un collegamento con un aspetto aritmetico del rapporto aureo, ovvero la scrittura di esso sotto forma di frazione continua.

Consideriamo un pentagono regolare inscritto in una circonferenza e tracciamone le diagonali; uniamo, poi, tra loro i punti di intersezione tra le diagonali, ottenendo la stella a cinque punte o *pentagramma*, già nota ai pitagorici.



La chiave del processo è proprio il contenuto del precedente teorema, per cui una coppia di diagonali si tagliano in estrema e media ragione. Osserviamo che le cinque diagonali di un pentagono regolare ne determinano un altro al loro interno, pure regolare.

Considerando allora AB ed AD abbiamo:

$$AB = AE + EB = AD + EB \quad \text{con } EB = AF \quad \text{e}$$

$$AD = AE = AF + FE = FG + FE$$

(si noti che $AF=FG$ perché entrambi lati di triangoli isosceli congruenti, avendo basi congruenti e angoli alla base congruenti)

Svolgiamo il rapporto $\frac{AB}{AD}$:

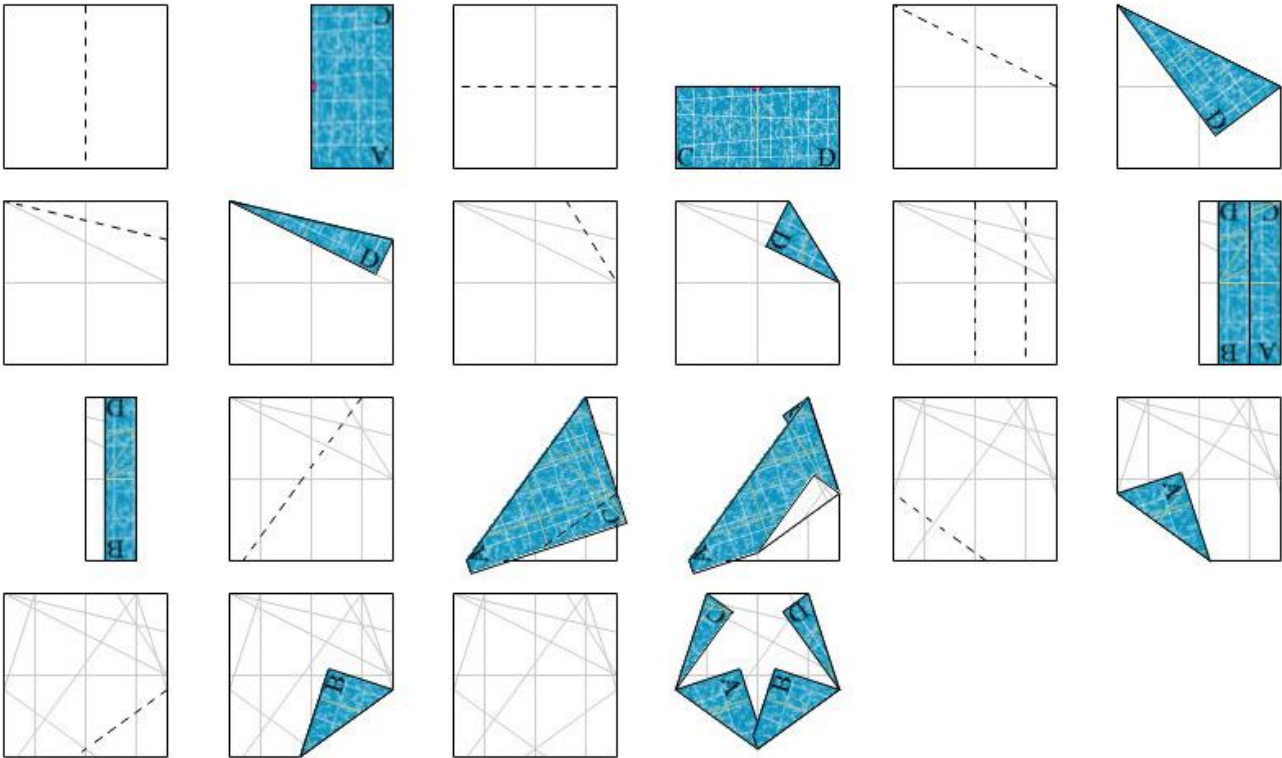
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD + EB}{AD} = 1 + \frac{EB}{AD} = 1 + \frac{1}{\frac{AD}{EB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AF + FE}{AF}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{FE}{FG}}$$

Iterando il procedimento (considerando l'ulteriore pentagono più interno e così via), si ottiene la rappresentazione $\frac{AB}{AD} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$. Ma $\frac{AB}{AD} = \Phi$, quindi abbiamo la

rappresentazione di Φ come *frazione continua*:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Come costruire un pentagono partendo da un quadrato:



Come costruire una stella (pentagramma) a partire da un pentagono.

