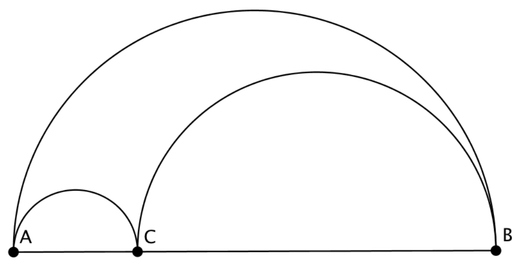
Il cappello di Babbo Natale (o arbelo di Archimede o cappello dello gnomo o . . .) Osservazioni sparse sulle schede del Laboratorio “Educare lo Sguardo”

30 gennaio 2018

1 Introduzione

In questa scheda vogliamo *visitare* la configurazione del *cappello di Babbo Natale*, o dell’*arbelo*, con lo spirito con cui si visita un’opera d’arte, come sperimentato e discusso nelle attività del laboratorio.



Partiamo con il commento delle schede di osservazione compilate da un gruppo di insegnanti durante i Laboratori *Educare lo sguardo* del progetto *Con la mente e con le mani* dell’*Accademia dei Lincei*, che si sono tenuti dal 2015–16 al 2017–18. La proposta è quella di condurre gli studenti di una classe terza di scuola secondaria di primo grado, o di classe prima di scuola secondaria di secondo grado alla visita di questa configurazione attraverso la compilazione delle schede che si possono scaricare all’indirizzo web `www.wikidot.com/`, nel quadro dell’attività proposta in `www.wikidot.com/`. L’attività si propone di svolgere il lavoro in classe attarverso una lezione *maieutica*, che faccia uso delle osservazioni raccolte attraverso delle schede e di quelle che emergono nella discussione in classe in modo da guidare gli studenti su un percorso che, attraverso il commento alle loro osservazioni, porti ad affrontare i seguenti temi e a risolvere i seguenti problemi:

1. discutere la differenza tra disegno, figura e configurazione;
2. usare un linguaggio matematico appropriato nella descrizione di una configurazione geometrica;
3. precisare il significato dei termini definizione, teorema, dimostrazione, congettura, proprietà;
4. utilizzare correttamente la riga e il compasso, capire la differenza tra un disegno fatto con riga e compasso e la configurazione geometrica corrispondente, riconoscere gli elementi da cui dipende una costruzione;
5. utilizzare correttamente il software di geometria dinamica `GeoGebra`;
6. osservare che il perimetro del semicerchio grande coincide con la somma di quelli piccoli per ogni scelta del punto C;
7. calcolare l'area del cappello, comprendere l'interesse nel cercare una figura semplice equivalente al cappello e costruire un cerchio equivalente all'area del cappello.

Il riferimento a questi punti, nel resto della scheda, verrà indicato, cfr. [[1]].

Lo stile del laboratorio dovrà essere, nelle nostre intenzioni, simile a quello di una visita ad una galleria d'arte con un esperto, che sappia stimolare la discussione attorno a un'opera d'arte guidando un gruppo di visitatori all'interpretazione dell'opera stessa. Gli insegnanti che vogliono condurre la classe in questo laboratorio hanno sperimentato questo genere di visita con gli storici dell'arte della galleria nazionale di arte antica di palazzo Barberini e di palazzo Corsini e sono invitati a ripetere tale esperienza con i loro studenti attraverso la discussione di un'opera d'arte scelta insieme all'insegnante di Arte e guidata da tale insegnante.

Si richiede agli insegnanti che partecipano al laboratorio di preparare una scheda consuntiva analoga che raccolga le osservazioni più interessanti emerse dagli studenti ed eventualmente, anche alcuni dei commenti che l'insegnante ha giudicato opportuno fare.

2 Descrivi la configurazione

Riportiamo con lo stile "roman", cioè con stile ordinario, alcune delle osservazioni raccolte dalle schede e con lo stile *italico*, cioè con stile inclinato le nostre osservazioni. Abbiamo cercato di trovare in ogni osservazione qualche spunto di riflessione, anche apparentemente lontano dal tema principale del nostro percorso, perché ci sembra cruciale insegnare a valorizzare il proprio pensiero e a suscitare l'abitudine a *cercare di vedere quando si guarda qualcosa.*

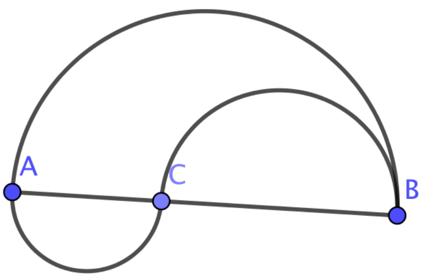
1. Sono disegnate due semicirconferenze la cui somma dei diametri coincide con quello di una terza semicirconferenza, disegnata nello stesso semipiano. *Osservazione: Cosa si intende per somma dei diametri? Due segmenti, per essere sommati, devono necessariamente essere adiacenti? Euclide dedica una proposizione (la seconda degli Elementi) a mostrare come si possa trasportare con riga e compasso un segmento su un segmento congruente avente un vertice fissato. Questa costruzione permette di sommare due segmenti qualsiasi fissando ad arbitrio il punto e la retta su cui trasportare la somma. Ammettendo questa generalità nella definizione di somma, la descrizione proposta non definisce univocamente la configurazione. Se invece si ammette di poter sommare solo segmenti adiacenti, allora la descrizione è ben determinata. Ci interessa sottolineare che qui come in molti altri commenti, non ci interessa dire se è giusto o sbagliato quello che è scritto, ma ci interessa soprattutto trarre spunto dal contenuto delle schede per fare osservazioni. Questo è una delle cose che il nostro laboratorio insiste a sperimentare: riflettere insieme sulle osservazioni raccolte con le schede per condurre gli strumenti lungo un percorso non tracciato a priori ma che segua gli spunti offerti dagli studenti, superando l'opprimente categoria giusto/sbagliato che spesso tronca sul nascere la possibilità di approfondire la discussione di interessanti sollecitazioni che provengono dagli studenti e che permettono invece di fornire approfondimenti e/o chiarimenti. Naturalmente c'è il rischio, in questa maniera, che la discussione non* finisce più. *Sarà compito dell'insegnante scegliere gli spunti da seguire per mantenere alto l'interesse della classe, affrontare temi legati ai programmi ma anche dare l'impressione ai ragazzi di giudicare meritevoli tutti gli spunti offerti dagli studenti per educarli a sviluppare un approccio attivo e creativo nell'affrontare i problemi.*

2. All'interno di una semicirconferenza S di diametro AB, sono disegnate due circonferenze S_1 e S_2 rispettivamente di diametro AC e CB giacenti su AB tali che il diametro AB sia la somma diretta dei diametri

AC e *CB* *Osservazione Se C è interno ad AB è automatico che AB è somma di AC e CB, quindi tale richiesta è ridondante.* e che siano tangenti a due a due *Osservazione: anche la tangenza è automatica. Infatti, per entrambe le semicirconferenze, la tangente in C è la perpendicolare ad AB (tangente ad una circonferenza in un suo punto è la perpendicolare al raggio che passa per quel punto.) e quindi la richiesta di tangenza è ridondante*; si ottiene una figura geometrica comprese tra le due circonferenze.

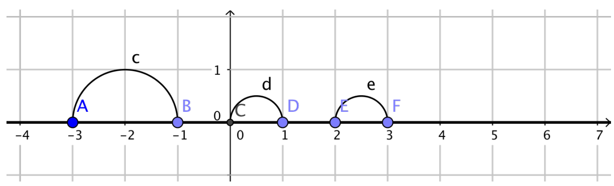
3. Si prenda un punto C su un segmento AB. Si traccino le semicirconferenze di diametro AC, CB e BC.

   Osservazione. La descrizione è verificata anche da figure di questo tipo.



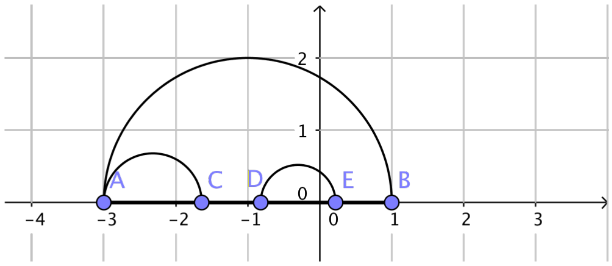
4. Due semicirconferenze la cui somma dei diametri coincide con quello di una terza semicirconferenza, disegnata nello stesso semipiano.

   Osservazione. La descrizione è verificata anche da figure di questo tipo.



5. Ci sono 3 semicirconferenze con diametri diversi. Sul diametro AB della semicirconferenza più grande sono costruite le altre due semicirconferenze. Le due semicirconferenze più piccole si trovano entrambe dentro al semicerchio più grande.

   Osservazione. La descrizione è verificata anche da figure di questo tipo.



3 Descrivi la costruzione della configurazione con riga e compasso

Premettiamo alcune considerazioni sulle costruzioni con riga e compasso (e con un software di Geometria Dinamica quale `GeoGebra` o `Cabri`).

Da dove partiamo per fare una costruzione con riga e compasso? Possiamo dire "da cerchi e segmenti", ma se vogliamo che la nostra costruzione sia in armonia con gli assiomi di Euclide, che specificano gli elementi fondamentali da cui partire per le costruzioni fondamentali, bisogna partire da punti.[1] Questo è conforme alla pratica con `GeoGebra` o con `Cabri`, per cui le costruzioni sono evidentemente determinate a partire da punti, perché è muovendo punti che possiamo modificarle.[2] La prima istruzione per creare questa configurazione (almeno come l'abbiamo creata noi) è quindi:

PRIMA ISTRUZIONE *Scegliere due punti A e B.*

La scelta dei punti determina la generalità della configurazione. Quindi dobbiamo specificare, quando scegliamo un punto, l'arbitrarietà di tale scelta. Se non viene specificato altrimenti, per una costruzione con riga e compasso

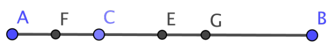
[1] Postulato 1: si richieda di poter condurre una linea retta da qualsiasi punto ad ogni altro punto. Posulato 3: e di descrivere un cerchio con qualsiasi centro (punto) e raggio (altro punto).

[2] Anche se usiamo lo strumenti *retta*, tale strumento richiede implicitamente che vengano fissati due punti per cui passi la retta.

(nel piano), "scegli un punto" significa "scegli un punto qualsiasi sul piano". Se abbiamo già costruito altri elementi, la scelta di un punto può essere vincolata ad un elemento già costruito. Diremo allora: scegli un punto su una retta, oppure su un segmento, oppure su una circonferenza, ecc. Costruendo una figura con `GeoGebra` è opportuno colorare diversamente, almeno all'inizio, i punti arbitrari da quelli determinati dalla costruzione. Quelli arbitrari (che possiamo colorare in blu) possono essere trascinati mentre gli altri, che possiamo colorare in nero, non possono essere trascinati. Nella costruzione del cappello di Babbo Natale, i punti A e B possono essere scelti arbitrariamente sul piano mentre il punto C può essere scelto arbitrariamente sul segmento AB. Si noti che se vogliamo costruire C in maniera che AC e CB stiano un un dato rapporto, dobbiamo procedere in maniera più complicata.[3]

Seconda istruzione *Scegliere un punto C appartenente al segmento AB.*

Terza istruzione *Costruire i punti medi E, F e G dei segmenti AB, AC e CB.*



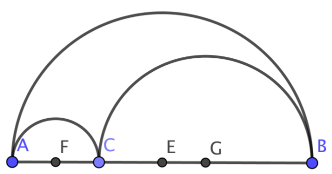
Si noti il colore blu scuro dei punti A e B (scelti arbitrariamente nel piano), blu chiaro del punto C (scelto arbitrariamente su un segmento) e

[3]Esercizio, assegnati due segmenti HG e LM determinare su AB un punto C tale che AC:CB=HG:LM.

nero dei punti E, F e G, determinati dagli altri nella costruzione. I punti blu scuro si possono trascinare liberamente nel piano; quelli blu chiaro su un arco di curva (in questo caso un segmento) e quelli neri sono fissati dagli altri e non si possono trascinare.

QUARTA ISTRUZIONE *Disegnare la circonferenza di centro E e raggio EA; la circonferenza di centro F e raggio FA; la circonferenza di centro G e raggio GB.*

Gli assiomi di Euclide postulano la costruibilità di segmenti e di cerchi. Possiamo però pensare di disegnare solo archi di circonferenze compresi tra due punti e ritenere quindi costruibili anche gli archi di circonferenza.



4 Evidenzia i rapporti tra gli elementi utilizzati nelle descrizioni al punto precedente

Questa domanda è stata interpretata diversamente da come ci aspettavamo. Il problema sta nel significato che attribuiamo alla parola *rapporto*.

Secondo l'approccio della scuola pitagorica il rapporto di due grandezze omogenee L ed M, che è uno dei concetti fondamentali della geometria, è una coppia di numeri interi, che si può determinare nel modo seguente. Sia U una terza grandezza omogenea alle altre e che *le misuri entrambe*, cioè tale che esistano due numeri interi positivi n ed m tali che $L = nU$ ed $M = mU$. Allora il rapporto della coppia (L, M) si esprime con la coppia di numeri interi (n, m). Tale rapporto è *ridotto ai minimi termini* quando la grandezza U è *la più grande possibile*, ovvero quando il massimo comun divisore tra i due interi è uguale ad 1. Negli elementi di Euclide è descritta una procedura per cercare il massimo comun divisore tra due grandezze omogenee (Proposizione VII.2). Basta iterativamente sostituire la grandezza più grande tra L ed M con la differenza $L - M$ e continuare ad applicare la stessa operazione fino ad ottenere due grandezze uguali, che coincideranno con il massimo comun divisore cercato. Si osservi che la procedura di applica a coppie di grandezze omogenee qualsiasi: non solo coppie di numeri ma anche, per esempio, coppie di segmenti. Il problema di questa definizione è che non è affatto scontato che il procedimento di Euclide termini dopo un numero finito di passi. La procedura non si arresta, per esempio, se consideriamo il rapporto tra un segmento e la diagonale del quadrato costruito su di esso. La scoperta di coppie di segmenti incommensurabili ha messo in crisi la matematica (e la visione del mondo) pitagorica. Per estendere il concetto di rapporto a coppie incommensurabile, il grande matematico Eudosso introdusse l'idea di definire tale concetto *per astrazione*, cioè definendo quando due coppie di grandezze L, M ed L', M' hanno lo stesso rapporto ma senza dire cosa esso sia in maniera indipendente, per esempio rifacendosi, come aveva cercato di fare Pitagora, a concetti aritmetici. L'idea geniale di Eudosso, di cui non diremo altro in questa sede, è esposta nel libro V degli elementi di Euclide e costituisce uno dei vertici del pensiero matematico. Solo molto più tardi, i matematici sono riusciti a trattare il concetto di rapporto in maniera aritmetica, introducendo la nozione di numero reale.

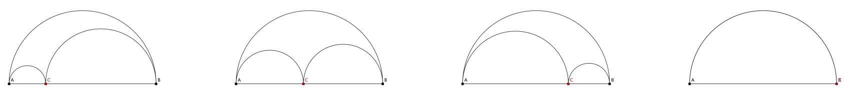
Quando abbiamo scritto la domanda, per mantenere l'analogia con la scheda utilizzata per guidare l'osservazione di un quadro, abbiamo usato il termine rapporto in un senso diverso. Per rapporti volevamo intendere le *relazioni* che legano i diversi elementi di una configurazione geometrica, per esempio il fatto che le semi circonferenze che compaiono nella configurazione del cappello di Babbo Natale, sono tangenti nei punti comuni.

Molti partecipanti al laboratorio hanno pensato (con buone ragioni) che intendevamo chiedere quali rapporti ci fossero tra i diversi segmenti e i diversi archi della configurazione. La diversa interpretazione del termine ha stimolato la discussione di alcuni temi interessanti che riguardano la differenza tra disegno, figura e configurazione geometrica e su cosa si può cercare in una o nelle altre. Riportiamo le risposte dei corsisti con le nostre osservazioni.

1. Le tre circonferenze sono tangenti a coppie in A, B e C rispettivamente.

2. Il diametro minore sembra essere lungo un terzo del secondo. *Osservazione: la configurazione geometrica che abbiamo proposto non doveva fissare, nelle nostre intenzioni, il rapporto tra il segmento AC e il segmento CB (O AB). D'altra parte questo non era detto esplicitamente e molti insegnanti hanno ritenuto (con buone ragioni) di dover rispondere ipotizzando un rapporto ben determinato tra i segmenti suddetti. Questo fraintendimento ci ha offerto lo spunto per chiarire che, a partire da un disegno, non è possibile determinare il rapporto tra segmenti! Quello che possiamo fare, attraverso misurazioni o disegni ulteriori, è solamente stabilire che il rapporto appartiene ad un certo intervallo (e*

*possiamo usare la matematica per dimostrare esattamente un tale intervallo). La possibilità di stabilire esattamente il valore numerico del rapporto tra due segmenti riguarda le*figure geometriche*, non i disegni. Che differenza c'è tra una figura geometrica e un disegno fatto con riga e compasso o con un software di geometria dinamica? Il disegno è un oggetto materiale, in cui le linee hanno un certo spessore e un certo colore, i punti hanno una certa dimensione, ecc. La figura geometrica è un'astrazione, in cui gli oggetti non hanno altre proprietà oltre a quelle specificate negli assiomi. Per esempio, le rette sono prive di spessore, di colore ecc. Le costruzioni realizzate con strumenti ideali, sono esatte. Non ha senso in una figura geometrica fare una misurazione ma bisogna invece dimostrare una proprietà o calcolare una quantità. È solo nel dominio ideale delle figure geometriche che possiamo dedurre correttamente dalle ipotesi assunte nella costruzione (ideale) che certi rapporti hanno certi valori.*
Più generali e astratte delle figure geometriche sono le configurazioni *che sono ancora più astratte. Esse vengono specificate da una costruzione con riga e compasso (nel caso che consideriamo) e rappresentano un'intera classe di figure geometriche che si ottengono modificando gli elementi da cui dipendono le costruzioni, ma preservando le relazioni tra essi. Per esempio le figure della configurazione che stiamo considerando dipendono dai punti A e B, che possiamo scegliere arbitrariamente nel piano e dal punto C, che possiamo scegliere arbitrariamente sul segmento AC. Un software di geometria dinamica permette di illustrare chiaramente questi concetti. Sarebbe quindi utile predisporre un'esercitazione in laboratorio con* `GeoGebra` *per illustrare come si possa variare una figura muovendo i punti che la determinano.*



3. AC è 1/4 di AB. AC è 1/3 di CB. CB è 3/4 di AB . CB è 3 volte AC. il rapporto che c'è tra i diametri vale anche per le lunghezze delle semicirconferenze. (ovviamente valgono le relazioni inverse). Per quanto riguarda le superfici dei semicerchi valgono le relazioni: il semicerchio di diametro AC è 1/16 del semicerchio di diametro AB; (semplifico la scrittura indicando sAB per dire semicerchio di diametro AB e così via....); sAC=1/9 sBC ; sBC=9/16 sAB quindi si può dire che la parte racchiusa tra le tre semicirconferenze è 6/16= 3/8 della sAB. *Osservazioni: ripetiamo le considerazioni proposte con riferimento a un valore*

qualsiasi del rapporto tra i segmenti. Assumiamo che il rapporto tra AC e AB sia pari ad α. Allora il rapporto tra BC e AB è pari a $1-\alpha$ e quello tra AC e CB è pari a $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Indichiamo con s_d la semicirconferenza di diametro d. Allora $s_d = \frac{1}{2}2\pi\frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2}$. Quindi, $\frac{s_{AC}}{s_{AB}} = \alpha$, $\frac{s_{CB}}{s_{AB}} = 1-\alpha$, $\frac{s_{AC}}{s_{CB}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Se indichiamo con Σ_d l'area del semicerchio di diametro d, allora $\Sigma_d = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{8}$. Quindi, $\frac{\Sigma_{AC}}{\Sigma_{AB}} = \frac{AC^2}{AB^2} = \alpha^2$, $\frac{\Sigma_{CB}}{\Sigma_{AB}} = \frac{CB^2}{AB^2} = (1-\alpha)^2$, $\frac{\Sigma_{AC}}{\Sigma_{BC}} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}$.

5 Proponi un titolo alla configurazione

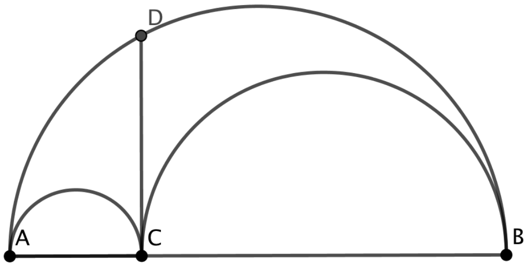
1. I tunnel
2. Arbelo
3. Stesura di una tovaglia in un giorno di vento
4. Semicirconferenze tangenti
5. Semicirconferenze belle
6. Le tre semicirconferenze o la ricerca dell'area massima
7. La fronte di Babbo Natale con cappello.
8. Composizione di circonferenze.
9. Vela al vento
10. Metamorfosi di una circonferenza.
11. vela da kit surf
12. Pi greco
13. Cappello dello gnomo

6 Proponi una o più congetture relative alla configurazione

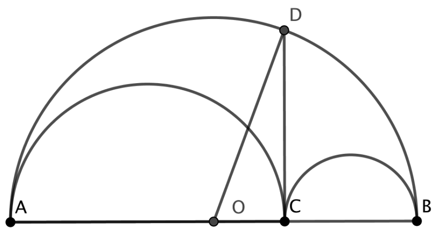
Abbiamo deciso, nel commento alle congetture, di dimostrare quelle più significative. Ricordiamo che nel lavoro da fare in classe l'insegnante, commentando le diverse congetture proposte (scuola secondaria di secondo grado, per cui suggeriamo di proporre l'ultima congettura della nostra lista, anche se non dovesse venir fuor in questa forma dalla classe) o discutendo la scelta delle figure di cui calcolare area e perimetro (scuola secondaria di primo grado), deve scegliere con la classe una congettura da esplorare o una figura di cui calcolare area e perimetro e, prima di dare la soluzione, deve raccogliere dagli studenti l'indicazione degli approcci che si intendono seguire.

1. Buongiorno, cosa si intende con "Proponi una o più congetture relative alla configurazione"? *Osservazione: Una congettura è una proprietà ipotizzata di una configurazione geometrica. Per esempio si può ipotizzare, in una data configurazione, che il quadrato costruito sopra un certo lato è la somma dei quadrati costruiti su due altri lati, oppure che il cappello di Babbo Natale sia equivalente (ciò abbia la stessa area) del cerchio costruito sul segmento che unisce C al punto della semicirconferenza posto sopra di esso perpendicolarmente al diametro AB. Si noti che una congettura non può essere formulata su un disegno ma deve riferirsi a una figura geometrica o, solitamente, ad una configurazione geometrica*

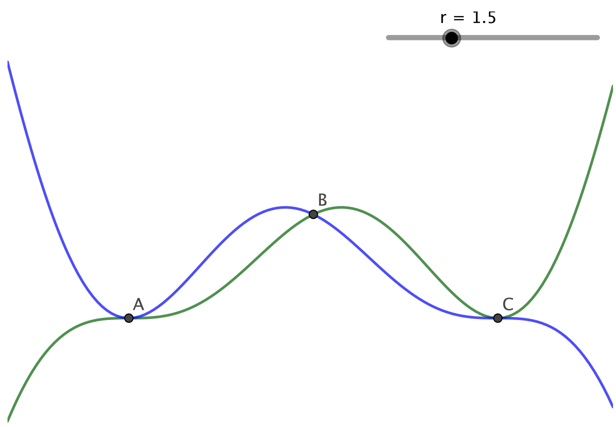
2. Il peso sovrastante è equamente distribuito sui due tunnel. (Possono sembrare due tunnel affiancati con diverso utilizzo. La cupola maggiore sostiene il carico complessivo). *Osservazione: Il peso non è una proprietà delle figure geometriche, ma può essere utile dal punto di vista euristico per esplorare alcune proprietà geometriche (come per esempio, nel calcolo euristico dell'area di un segmento di parabola proposto da Archimede). Questa congettura, ipotizzando che le figure siano omogenee e che quindi che i loro pesi siano proporzionali alle loro aree, ci sembra che si possa interpretare nel modo seguente: L'area della regione finita limitata dall'arco AC, dall'arco AD e dal segmento DC è uguale all'area della regione finita delimitata dall'arco CB, dall'arco DB e dal segmento DC.*



Questo accade evidentemente quando A=C e quando B=C, dove entrambe le aree sono nulle. Accade anche quando C è il punto medio del segmento AB per evidenti ragioni di simmetria. Per stabilire se la congettura è vera o falsa si richiede la capacità di valutare le aree interessate. Con riferimento alla figura seguente



indicato con α *l'angolo* $\widehat{DOB}$, *abbiamo che l'area del settore circolare* AOD *misura* $r^2\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, *l'area del traingolo* ODC *misura* $\dfrac{1}{2}r^2\sin\alpha\cos\alpha$, *l'area del settore* DOB *misura* $r^2\dfrac{\alpha}{2}$, *l'area del semicerchio* AC *misura* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r+r\cos\alpha}{2}\right)^2\pi$ *e l'area del semicerchio* CB *misura* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r-r\cos\alpha}{2}\right)^2\pi$.
Si può allora studiare, in funzione dell'angolo α *tra* 0 *e* π *l'andamento della funzione che assegna ad* α *l'area della regione* DCB *(grafico verde) e l'area della regione* ACD *(grafico blu). Rappresentando con* `GeoGebra` *le due funzioni, per un valore del raggio pari a* $1,5$, *vediamo che i tre valori di* α *che abbiamo già determinato (*0, π *e* $\pi/2$*) sono i soli per i quali le regioni hanno uguale area.*



3. Il perimetro della figura è congruente a quello dell'intera circonferenza di diametro AB. *Infatti, sia d il diametro di una delle due semicirconferenze e D quello dell'altra. Allora il perimetro del cappello è somma di tre semicirconferenze di ampiezza* $\frac{\pi \cdot d}{2} + \frac{\pi \cdot D}{2} + \frac{\pi \cdot d + D}{2} = \pi \cdot d + D$ *che coincide con l'espressione della lunghezza della circonferenza esterna, di diametro* $d + D$.

4. La traiettoria di un salto di una pulce (puntiforme) - Una tenda da campeggio tirata dal vento - Un becco di tucano. *Osservazione: Qui la parola congettura è stata interpretata in senso non matematico ed è occasione per riflettere sul significato di questa parola.*

5. (a) Babbo Natale si sta nascondendo da un bambino che è entrato nella stanza.

   (b) E' il momento in cui babbo natale entra nel camino.

   Osservazione: come sopra.

6. Hai a disposizione una tovaglia e tre tuoi compagni, la tovaglia ha un lato il triplo dell'altro, riesci a realizzare altre figure? quante, quali? Il titolo (Stesura di una tovaglia in un giorno di vento) è accattivante per gli alunni.Trovare un modo simpatico per far ragionare gli alunni su immagini che spesso vediamo nei fenomeni quotidiani quindi sulle semicirconferenze, senza parlare di geometria, ma provando in classe con materiali di uso quotidiano. Ovviamente la teorizzazione verrà poi guidata. *Osservazione; qui si manifesta a nostro avviso una certa difficoltà nel tenere ben distinti creatività, rigore, intuizione e precisione. I suggerimenti per attività laboratoriali da svolgere in classe sono*

interessanti, ma è necessario far emergere chiaramente il contenuto matematico di tali attività che metta bene in evidenza la differenza tra misurare *oggetti o disegni e* stabilire con rigore *proprietà di una figura o di una configurazione geometrica.*

7. La domanda che mi sono posta è: quali relazioni ci sono tra queste tre semicirconferenze? La loro peculiarità è la costruzione: due semicirconferenze tangenti e di diametro rispettivamente AC e CB sono costruite sul diametro AB di una semicirconferenza più grande, dove AB=BC+AC. *Osservazione: la tangenza tra le semicirconferenze è conseguenza del fatto che AB=AC+CB, non è quindi una richiesta da aggiungere alla costruzione ma è automaticamente verificata.* Forse sussiste qualche relazione tra i le aree o le loro lunghezze.

    (a) Sicuramente la somma delle aree dei due semicerchi è diversa dall'area del semicerchio più grande. Dopo qualche calcolo ho trovato che la relazione riguarda le lunghezze delle semicirconferenze:

    (b) La lunghezza della semicirconferenza di diametro AB è uguale alla somma delle lunghezze della semicirconferenza di diametro AC e quella di diametro BC.

    Osservazione: In questa descrizione abbiamo trovato interessante seguire passo a passo uno sguardo che cerca di penetrare i segreti di una configurazione geometrica. Questo ci suggerisce di sollecitare i ragazzi a rispondere con questo dettaglio alle domande poste nelle schede, in modo da rendersi conto, con le parole stesse dei protagonisti, come si passa da guardare a vedere.

8. Come dividere un arco in parti uguali *Osservazione: qui ci sembra che la congettura sia che si tratta di una procedura per dividere un arco in parti uguali. Anche se non è così, ci sembra molto interessante prendere spunto da questa osservazione per discutere un problema fondamentale della Geometria elementare, quella della suddivisione degli angoli. Mentre esiste una procedura, facilmente eseguibile con riga e compasso, per dividere un segmento in un numero qualsiasi di parti uguali, non esiste e non può esistere una procedura per dividere in parti uguali un arco (o un angolo) qualsiasi che usi solamente la riga e il compasso. Alcune suddivisioni sono possibili, per esempio è sempre possibile dividere un angolo in 2^n parti uguali ma già la trisezione di un angolo con riga e compasso è possibile solo per angoli particolari (per esempio π). Il problema della trisezione di un angolo con riga e compasso è uno dei tre grandi problemi della geometria antica, insieme a quello di*

quadrare un cerchio e di duplicare un cubo. La loro impossibilità con l'impiego della sola riga e del compasso è stata dimostrata rigorosamente da Pierre-Laurent Wantzel nel 1837 (trisezione e duplicazione) basandosi sulle idee di Gauss e da Lindemann nel 1880 (quadratura del cerchio).

9. L'area della regione compresa tra la semicirconferenza più grande e le due più piccole è un multiplo intero dell'area di almeno una delle due semicirconferenze interne. *: Osservazione. Indichiamo con d e D i diametri dei semicerchi piccoli e con r e R i rispettivi raggi. L'area del semicerchio di raggio r è $\Sigma_r = \frac{1}{2}\pi r^2$, quella del semicerchio di raggio R è $\Sigma_R = \frac{1}{2}\pi R^2$. L'area del cappello è $S = \frac{1}{2}\pi((r+R)^2 - r^2 - R^2) = rR\pi$. Il rapporto S/Σ_r vale quindi $2R/r = 2D/d$. Per ogni valore α di questo rapporto (in particolare per ogni α intero) è quindi possibile realizzare α come rapporto tra le aree, pur di prendere il rapporto dei raggi (o equivalentemente dei diametri) pari a $\alpha/2$.* [4]

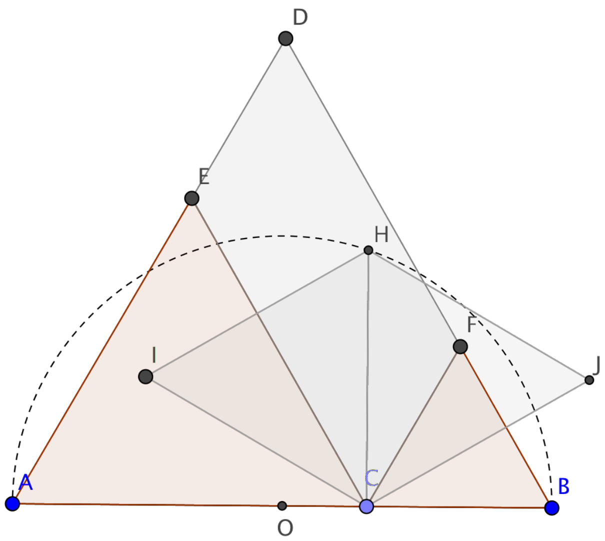
10. L'area della regione di piano delimitata dalle semicirconferenze è multiplo del prodotto $x(d-x)$ secondo il fattore $\pi/2$. Nel caso specifico della configurazione $d = 4x$ esso vale $3/2\pi x^2$. *Osservazione: L'autore dell'osservazione indica con x il valore del diametro di uno dei due semicerchi piccoli e con d quello del semicerchio esterno. La formula è allora*[5] *$\frac{\pi}{4}x(d-x)$. Con riferimento ai raggi r ed R delle due semicirconferenze interne, la formula è πrR. È interessante chiedersi come costruire una figura* più semplice *che abbia la stessa area. Una possibile risposta potrebbe essere: un rettangolo di lati πr e R rispettivamente. Tale figura però non è costruibile con riga e compasso per la presenza del fattore π. Se non è possibile* rettangolare *il cappello dello gnomo con riga e compasso è possibile invece* circolarla, *nel senso che è possibile costruire un cerchio equivalente al cappello. A tal fine è sufficiente costruire un segmento x tale che $x^2 = dD$ e questo si ottiene innalzando da C la perpendicolare a AB e intersecando la perpendicolare con il semicerchio nel punto D. CD è il segmento cercato. Il cerchio di diametro CD* circola *il cappello.*

11. Unire i punti disegnati su un segmento con delle curve. *Osservazione: la congettura non è molto chiara ma stimola la riflessione sulla possibilità di considerare figure più generali dei semicerchi, ma costruite secondo lo stesso principio. Ma secondo quale principio? Si tratta di*

[4] Rivedere i conti e aggiungere un esempio.

[5] Controlla!

considerare tre figure simili, ognuna delle quali sia completamente determinata dalla stessa costruzione a partire da un segmento, in modo che uno dei segmenti sia la somma degli altri due. L'esempio che abbiamo preso in considerazione fino a questo momento è quello di tre semicerchi aventi come diametri i segmenti AC, CB e AB=AC+CB. Un secondo esempio potrebbe essere quello di tre triangoli equilateri di lati rispettivamente uguali ai tre segmenti di cui sopra. Per ognuna delle figure così costruite, il perimetro di quella esterna è uguale alla somma dei perimetri di quelle interne e l'area della differenza tra la figura grande e la somma delle aree delle delle due figure piccole è uguale al doppio della figura simile alle tre di da cui si parte e che è costruita sul segmento CD ottenuto intersecando in D il semicerchio di diametro AB con la perpendicolare ad AB per C.



12. La lunghezza della semicirconferenza più grande è la somma delle semicirconferenze più piccole. La congettura si dimostra usando la formula per il calcolo della semicirconferenza in funzione del raggio.

13. Sia C un punto su un segmento AB e si considerino, nello stesso dei due semipiani determinati dalla retta AB, le tre semicirconferenze di diametro rispettivamente AB, AC e CB. L'area della parte limitata di piano avente come bordo l'unione delle tre circonferenze è uguale all'area del cerchio avente come diametro il segmento CD, dove D è il punto di intersezione della semicirconferenza di diametro AB con la perpendicolare condotta da C al segmento AB. *Dimostrazione: Riprendiamo*

le notazioni già introdotte in un precedente commento. Indichiamo con d e D i diametri AC e CB delle semicirconferenze piccole e con r e R i rispettivi raggi. L'area della figura a forma di cappello di Babbo Natale *è* $S = \frac{1}{2}\pi((r+R)^2 - r^2 - R^2) = rR\pi$. *Come abbiamo già osservato in un commento precedente, è interessante chiedersi se è possibile costruire una figura* più semplice *che abbia la stessa area. Un possibile candidato potrebbe essere un rettangolo di lati πr e R rispettivamente. Tale figura però non è costruibile con riga e compasso, per la presenza del fattore π. Se non è possibile* rettangolare *(e quindi poi* quadrare*) il cappello di Babbo Natale con riga e compasso è possibile però* circolarla, *nel senso che è possibile costruire un cerchio equivalente al cappello. A tal fine è sufficiente costruire un segmento x tale che $x^2 = dD$. Questo si ottiene innalzando da C la perpendicolare a AB e intersecando la perpendicolare con il semicerchio nel punto D. Il cerchio di diametro CD* circola *il cappello, infatti il suo raggio vale $y = x/2$ e quindi $y^2 = x^2/4 = dD/4 = d/2 \cdot D/2)r \cdot R$ e per tanto la sua area, $y^2\pi = rR\pi$, coincide con quella del cappello.*