EDUCARE ALL'ARGOMENTAZIONE

Prof.ssa Maria Puzio

Prof.ssa Elena Savinelli

Liceo Gaetano De Sanctis – Roma
in collaborazione con
Sapienza Università di Roma
Prof. Enrico Rogora

A.S. 2018-19

Argomentare, Interpretare, Dimostrare

Una delle criticità riconosciute nell'insegnamento/apprendimento della dimostrazione riguarda l'oscurità della sua funzione

SCOPO del laboratorio

- Stimolare una competenza trasversale, saper argomentare
- Collegare l'emergere delle esigenze dimostrative nella matematica greca al processo storico che ha portato all'affermazione dei princìpi democratici e del pensiero filosofico
- Realizzare un percorso trasversale, con modalità di Laboratorio Globalmente Interdisciplinare

PERCHÉ

- Per riuscire a far apprezzare agli alunni l'uso delle dimostrazioni e l'importanza del saper dimostrare anche in collegamento con le altre materie
- Per permetterci un viaggio attraverso la storia e la filosofia, dal Papiro di Rhind alla maieutica socratica
- Per chiarire meglio le implicazioni metodologiche della dimostrazione spesso interpretata in modo poco corretto dagli alunni

STRUTTURA del laboratorio

PRIMA FASE: seminario/laboratorio introduttivo

"Dall'arte della persuasione alla dimostrazione matematica"

La professoressa di Storia, presentando agli alunni la civiltà greca, ha approfondito l'utilizzo della retorica presso gli antichi Greci.

Gli alunni hanno svolto delle ricerche in gruppi e preparato delle presentazioni PP.

LA DIMOSTRAZIONE

Gli studenti hanno scoperto che:

- Le dimostrazioni nascono con la civiltà greca; sono figlie della necessità di argomentare per convincere, cioè del confronto politico e democratico.
- La dimostrazione matematica è una evoluzione della retorica, della dialettica e della logica.
- Le dimostrazioni si possono classificare in euclidee e pre-euclidee.

STRUTTURA del laboratorio

SECONDA FASE: lezione dialogata

- Proposta di tematiche per lavoro in gruppi (vaccinazioni, compiti a casa, energie alternative, fumo, social networks, medicine alternative)
- Presentazione pro e contro sulle tematiche proposte facendo retorica: gli alunni hanno illustrato le proprie teorie tentando di convincere i compagni di classe

STRUTTURA del laboratorio

SECONDA FASE: lezione dialogata

Agli ascoltatori è stata somministrata una scheda di lavoro, in cui hanno risposto a domande sul modo di porsi dell’oratore, su cosa è piaciuto di più e cosa di meno, su eventuali contraddizioni, sulla validità dell’argomentazione, sulla chiarezza

STRUTTURA del laboratorio

TERZA FASE: Stimolare la classe a formulare e risolvere una congettura

Questa fase del laboratorio, modellata sulla precedente, è stata preparata e svolta insieme, dalle docenti di Matematica e Fisica della classe e dal docente universitario, Prof. Rogora, che ha contribuito alla realizzazione del percorso laboratoriale e ha fornito gli approfondimenti disciplinari e le schede di lavoro

STRUTTURA del laboratorio

Questa attività vuole dar modo agli studenti di lavorare su un problema che richiede l'attivazione contemporanea di molte componenti caratteristiche del lavoro matematico, alle quali non si presta normalmente l'attenzione che meriterebbero:

- studio degli esempi;
- formulazione di una congettura;
- verifica della medesima;
- argomenti euristici a sostegno della stessa;
- ricerca dei controesempi;
- elaborazione di definizioni utili e ben motivate;
- dimostrazione finale.

STRUTTURA del laboratorio

Il percorso laboratoriale si è svolto secondo il seguente schema:

- Studio preliminare di esempi – reti poligonali
- Formulazione di congetture – formula di Eulero per le reti poligonali
- Controllo delle congetture in alcuni esempi
- Tentativi di dimostrazione – dimostrazione proposta dal docente e discussa dalla classe
- Vaglio delle dimostrazioni – controesempi discussi e richiesti agli studenti
- Raffinamento delle definizioni – discussione sui controesempi
- Elaborazione di una dimostrazione condivisa

STRUTTURA del laboratorio

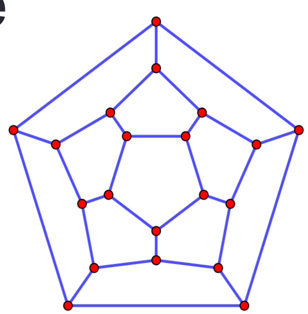
Il teorema di Eulero in forma dialogica

- L'attività è ispirata alla famosa lezione di Lakatos «Dimostrazioni e Confutazioni» sul teorema di Eulero
- E' stata presa in considerazione l'analoga formula per le reti poligonali $F + V - L = 1$

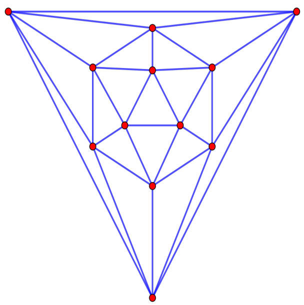
Scheda di lavoro

”Dal Descrivere al Congetturare al Definire”

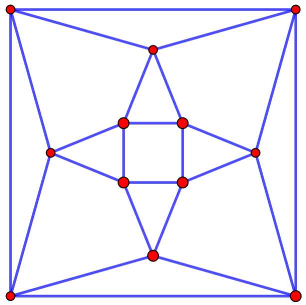
Conta il numero delle facce *F*, dei lati *L* e dei vertici *V* presenti nelle quattro reti poligonali e riportali nella tabella, come è stato fatto a titolo di esempio per la quinta rete



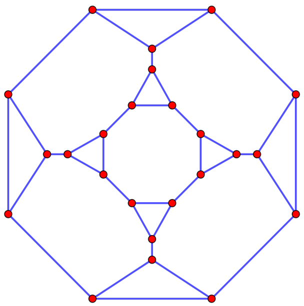
Rete poligonale A



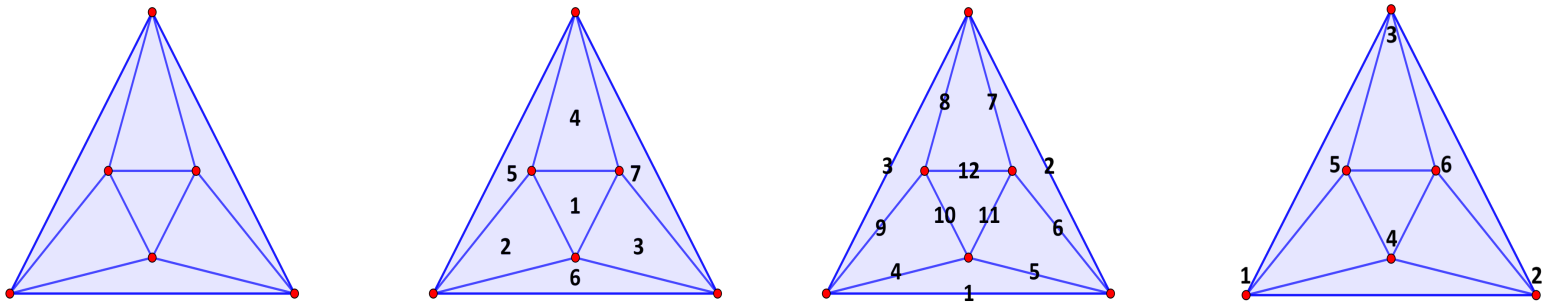
Rete poligonale B



Rete poligonale C



Rete poligonale D

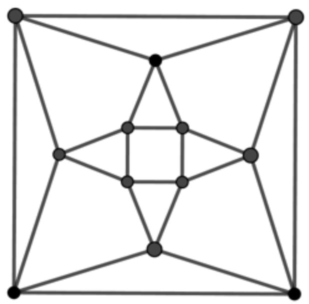


Rete poligonale E

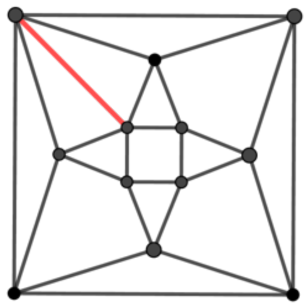
Rete	Facce	Lati	Vertici	F+L+V
A				
B				
C				
D				
E	7	12	6	25

- Determina un'espressione tra *F*, *L* e *V*, simile a quella che compare nell'ultima colonna, in modo che tale relazione restituisca lo stesso valore per tutte le reti poligonali che abbiamo considerato.
- Chiamiamo *INV* questa espressione.
- Disegna altre reti poligonali per cui *INV* ha lo stesso valore calcolato negli esempi precedenti.
- "Per ogni rete poligonale, *INV* è costante". Questa frase è:
  - Un teorema
  - Una tesi
  - Un'ipotesi
  - Una congettura
  - Una falsità
  - Una speranza
  - Altro: . . . .

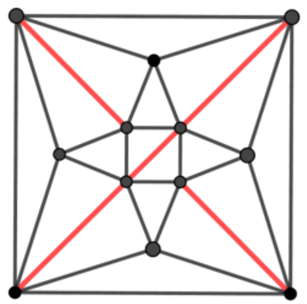
Come varia *INV triangolando* come nell'esempio di seguito una rete poligonale?



La rete non è *triangolare*: ci sono 5 quadrilateri

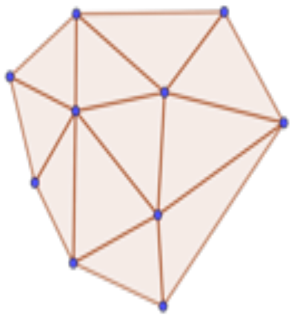


Triangoliamo un quadrilatero. Come varia *INV* ?

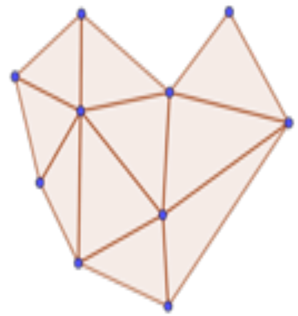


Triangoliamo l'intera rete. Come varia *INV* ?

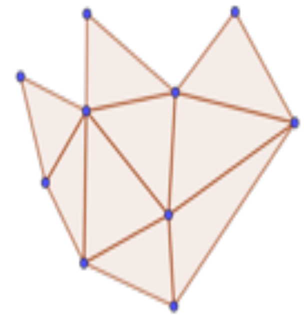
Dimostriamo che per ogni rete triangolare il valore di *INV* è sempre lo stesso



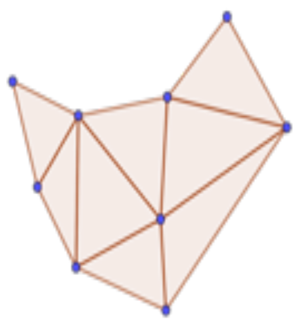
Rete triangolare



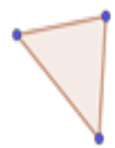
Si rimuove un triangolo: come varia *INV*?



Si rimuove un secondo triangolo: come varia *INV*?



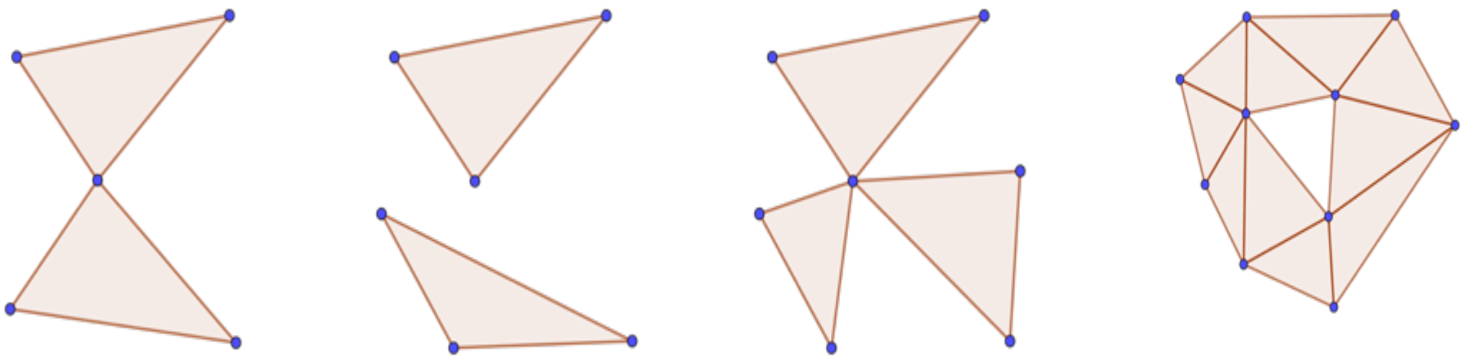
Si rimuove un terzo triangolo: come varia *INV*?



Rimane un solo triangolo: quanto vale *INV*?

Controesempi

Quanto vale *INV* per le seguenti reti?



Ma sappiamo cosa è una Rete Poligonale?

Riflessioni

- Le difficoltà degli studenti nell'approccio alla dimostrazione non sono spiegabili esclusivamente in termini cognitivi di carenze nel ragionamento logico, ma collegate alla difficoltà di attribuire una chiara funzione al dimostrare

- Il percorso laboratoriale proposto ha fatto nascere negli studenti l'apprezzamento delle capacità argomentative

- Si chiede allo studente di riflettere sulle ipotesi, mettendo in evidenza come il problema derivi dal fatto che la definizione degli oggetti riferiti nelle ipotesi non sia mai stata formalizzata. Occorre quindi definire in maniera precisa cosa sia una rete poligonale

Definire oggetti matematici

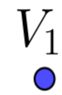
Definire un oggetto matematico è un processo complesso

Per definire una *rete poligonale* proponiamo agli studenti il seguente percorso:

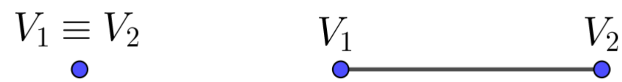
- Partiamo dalla definizione di **p-gono**
- Si definisce **p-gono** un oggetto costituito da:
  - p vertici: $V_1 - V_2 - \ldots - V_p$
  - p segmenti: $V_1V_2 - V_2V_3 - \ldots - V_{p-1}V_p - V_pV_1$
- Dare esempi di **p-goni** per p = 1, 2, 3, 4

Esempi di p-goni

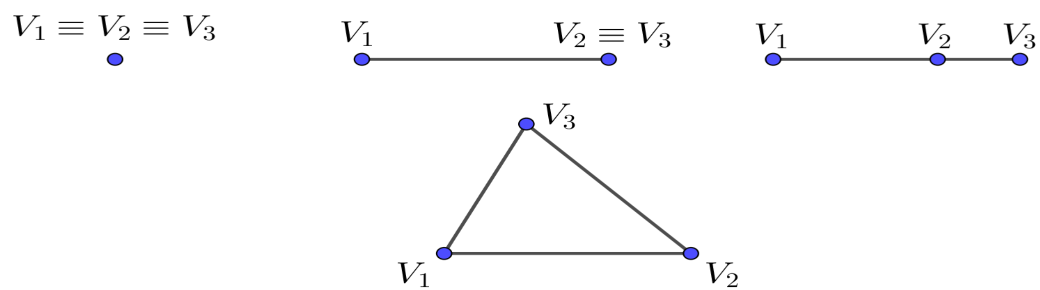
- 1-gono (ugono)



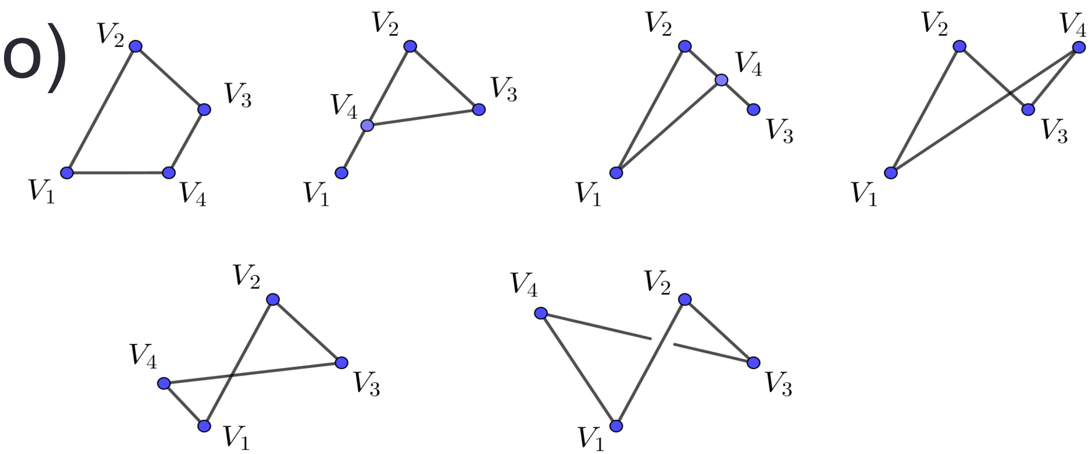
- 2-gono (bigono)



- 3-gono (trigono)



- 4-gono (quadrigono)



Sulla base della definizione di *p-gono*, cosa è un *poligono*?

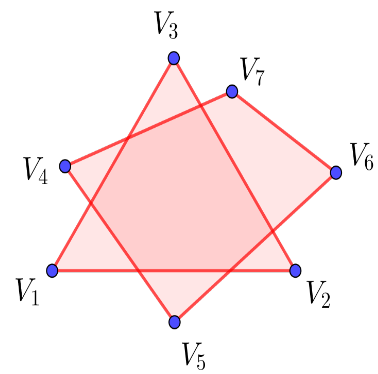
Si definisce ***poligono*** *un p-gono piano, non intrecciato, avente i vertici tutti distinti*

- Dai la definizione di Poligono Convesso

- Per ogni *definizione* di *rete di poligoni* che ti proponiamo di seguito trova, se esiste, un caso in cui *INV* ≠ 1 (*controesempio*), oppure un esempio "*particolare*" che vuoi escludere, nonostante *INV* valga 1
- In questo secondo caso motiva le ragioni dell'esclusione

Def.1 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni convessi

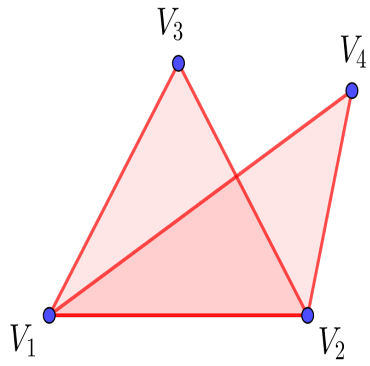
Controesempio:



INV = 2

Def.2 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni (convessi) attaccati per un lato

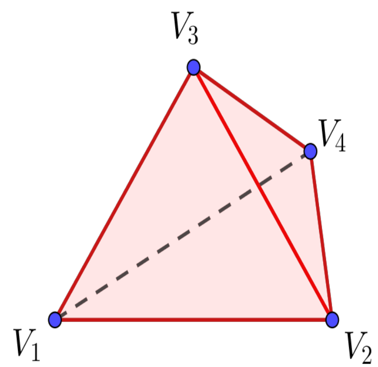
Caso particolare:



INV = 1, ma le facce dei due poligoni si intersecano

Def. 3 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni (convessi) tali che ogni coppia abbia in comune un lato o un vertice o è disgiunta

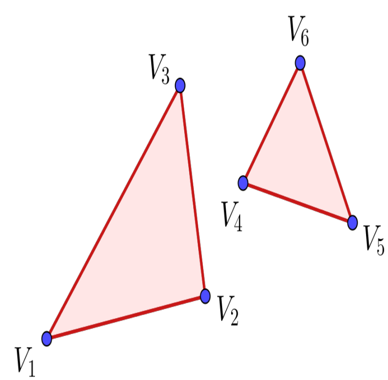
Controesempio:



Per un tetraedro *INV* = 2

Def. 4 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni (convessi) complanari tali che ogni coppia abbia in comune un lato o un vertice o è disgiunta

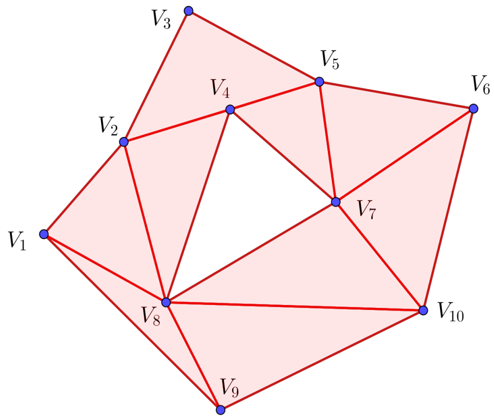
Controesempio:



La rete poligonale non è connessa
INV = 2

Def. 5 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni (convessi) complanari tali che ogni coppia abbia in comune un lato o un vertice o è disgiunta. Inoltre, per ogni coppia di punti, esiste una linea spezzata che li congiunge, tutta contenuta nella rete.

Controesempio:



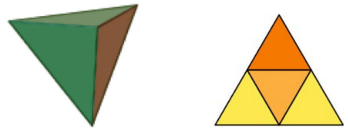
F = 9 V = 10 L = 19 quindi *INV* = 0

Def. 6 Una rete di poligoni è un numero finito di poligoni (convessi) complanari e tali che ogni coppia abbia in comune un lato o un vertice o è disgiunta.
Inoltre, per ogni coppia di punti, esiste una linea spezzata che li congiunge, tutta contenuta nella rete.
Infine l'unione di tutti i poligoni è la faccia di un poligono.

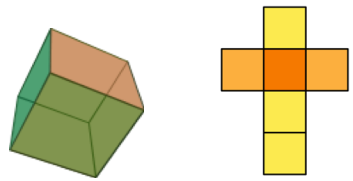
Con la definizione di *rete poligonale* trovata, possiamo ritenere dimostrato il teorema proposto?

"Per ogni rete poligonale, *INV* è costante"

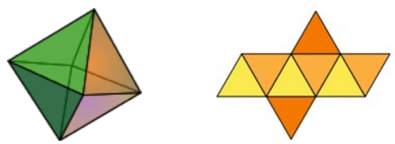
Calcola *INV* per i seguenti poliedri:



$Facce = \ ...\ Spigoli = \ ...\ Vertici = \ ... \Rightarrow INV = ...$

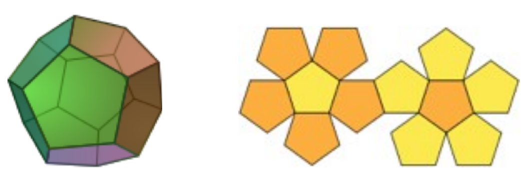


$Facce = \ ...\ Spigoli = \ ...\ Vertici = \ ... \Rightarrow INV = ...$



$Facce = \ ...\ Spigoli = \ ...\ Vertici = \ ... \Rightarrow INV = ...$

$Facce = \ ...\ Spigoli = \ ...\ Vertici = \ ... \Rightarrow INV = ...$



$Facce = \ ...\ Spigoli = \ ...\ Vertici = \ ... \Rightarrow INV = ...$

Possiamo definire un poliedro in modo che *INV* sia costante?

Conclusioni

L'approccio interdisciplinare aiuta a:

- Affrontare problemi specifici dell'insegnamento della matematica, non ponendosi dal punto di vista di una teoria generale dell'insegnamento, ma collegando gli oggetti e i problemi dell'insegnamento della matematica a quello delle altre materie
- Sviluppare l'immaginazione
- Comprendere l'importanza del linguaggio e la specificità dei linguaggi disciplinari
- Sviluppare le capacità di argomentare
- Superare la paura di sbagliare e scoprire l'importanza e il ruolo dell'errore