Questa riflessione nasce da una sperimentazione su un approfondimento di geometria piana e si può proporre in una classe terminale per trovare lo spunto per introdurre la crisi dei fondamenti della scienza per una UDA trasversale.

Prof.ssa Giuliana Massotti

Titolo: Riflessione sul punto di Torricelli_Fermat
Grado scolastico: 5^ anno
Tematica affrontata: approfondimento del V postulato
Prerequisiti: elementi fondamentali della geometria euclidea,
Obiettivi dell'attività: riflettere e analizzare enunciati e dimostrazioni geometriche cogliendone i passi fondamentali e le motivazioni che le giustificano.
Tempi: 6 ore

Durante tutto il laboratorio per approfondire il punto di Torricelli-Fermat, ci si è soffermati sull'importanza delle definizioni euclidee e sulle nozioni comuni per poter argomentare.
L'attività si è svolta sotto forma di laboratorio, dividendo in gruppi i ragazzi, laboratorio svolto durate la DAD al 100%, e per far ciò gli studenti hanno lavorato in stanze virtuali create sulla piattaforma utilizzata, in modo da lavorare liberamente ma con la supervisione del docente. Il laboratorio è stato coordinato da una laureanda alla Magistrale: Bianca Nicchiotti, ed è durato tre incontri da un'ora e mezza.

Inizialmente abbiamo dato spazio alla lettura delle definizioni e dei postulati nella forma originale, dedicando molta attenzione al V postulato, il cui enunciato è poco familiare agli studenti per sottolineare ancora una volta l'importanza del sistema ipotetico deduttivo come centrale negli Elementi. In questa prima parte si è evidenziato come l'ordine delle proposizioni non sia casuale, successivamente è stato presentata la costruzione di Torricelli del punto di Torricelli-Fermat. Il punto di Torricelli-Fermat di un triangolo è quel punto che rende minima la somma delle distanze di tale punto dai vertici del triangolo. Torricelli dimostrò che il punto è quello che considerando i segmenti che lo collegano i vertici del triangolo, formano tra loro angoli di 120. e si è chiesto loro di riflettere cercando di capire se e dove viene usato il V postulato. La risposta a tale quesito è stato l'obiettivo della sperimentazione.
Per si è proceduto per passi, in modo da abituare lo studente a porsi ad ogni step un quesito al quale dare una risposta, basandosi sulle premesse. Processo non agevole anche per una classe terminale.
Nel primi due incontri si è lavorato con le proposizioni I , 22,29,32, fornendo loro le dimostrazioni e facendoli riflettere quali definizioni o proposizioni vengono utilizzate per arrivare alla tesi.
Nel terzo si è affrontata la costruzione fornita da Torricelli.
Gli strumenti utilizzati e forniti agli studenti sono state due schede di lavoro e una scheda di strumenti utili (1).

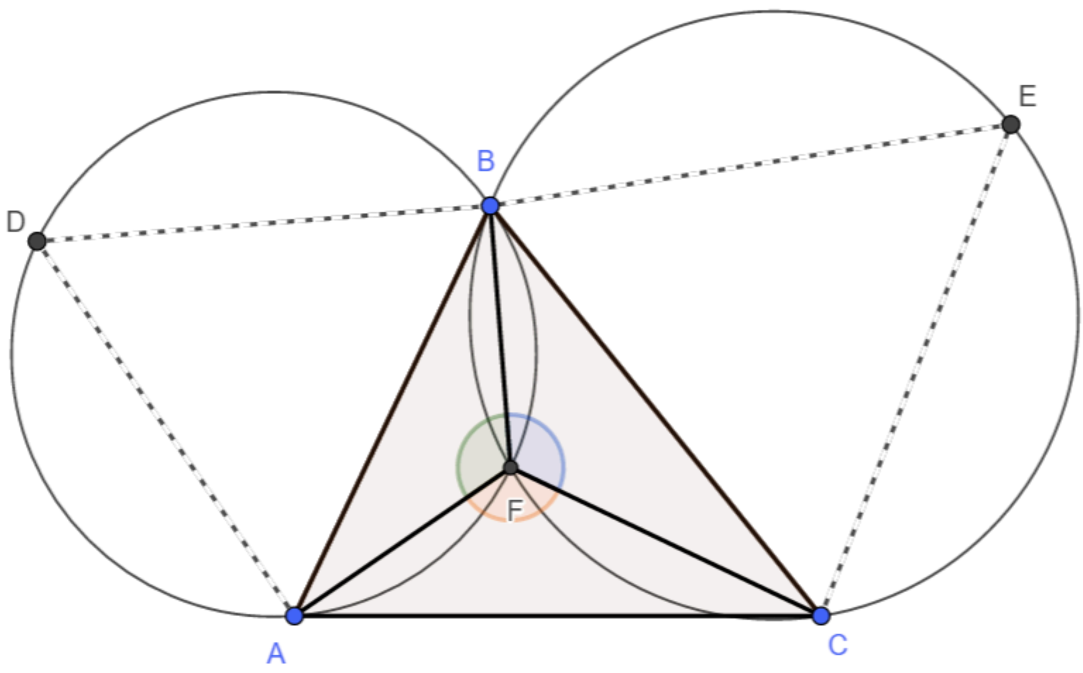
Riportiamo la costruzione del punto di Torricelli-Fermat proposta da Torricelli:

Proposizione 1. Dato un triangolo, con angoli interni tutti minori di 120_,
costruire un punto tale che i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo,
formino tra loro angoli di 120_. Il punto così costruito è quindi il punto di
Torricelli-Fermat del triangolo.

Dimostrazione. Dato il triangolo ABC vogliamo costruire il punto F tale che
i segmenti AF, BF e CF formino tre angoli di 120_.
1. Si costruisca un triangolo equilatero ABD sul lato AB, esternamente al triangolo

(1) Vedi allegati

2. Si costruisca un triangolo equilatero BCE sul lato BC, esternamente al triangolo
3. Si costruiscano poi le due circonferenze circoscritte ai triangoli ABD e BCE ; queste si intersecano in B e in un altro punto che chiamiamo F.
4. Osserviamo che i triangoli equilateri ABD e BCE hanno tutti gli angoli uguali. In particolare, ciascun angolo misura 60_*.
5. Si costruiscano i segmenti FA, FB e FC.
6. Consideriamo il quadrilatero ADBF: l'angolo AFB misura 120_.
7. Facendo le stesse osservazioni sul quadrilatero BFCE possiamo dire che anche l'angolo BFC è di 120_, di conseguenza anche AFC.
*



In seguito, con l'aiuto del collega di Filosofia, ci siamo soffermati su come, per Aristotele e Platone, la scienza per essere tale, non poteva essere organizzata che in un sistema ipotetico-deduttivo. Dopo di loro la matematica non poteva essere organizzata che in forma euclidea.
Per comprendere come sia stato possibile costruire geometrie diverse da quella euclidea, abbiamo ripreso la teoria Kantiana.
Fino alla fine nell'800, la geometria di Euclide, era considerata l'unica possibile perché era l'autentica rappresentazione dello spazio fisico non solo per i matematici ma anche per i filosofi.
Lo stesso Kant considera la geometria una conoscenza sintetica, in quanto accrescitiva del sapere e in grado di riflettere le strutture trascendentali dell'esperienza, ed è a priori poiché è nota con certezza e non ne richiede il controllo empirico.
Kant pensava alla geometria euclidea come l'unico modo con cui era possibile rappresentarsi e prendere coscienza dello spazio.
L'esistenza di geometrie diverse ha fatto vacillare tutta la costruzione kantiana che aveva come pilastro fondamentale la verità unica possibile della geometria euclidea.

Filosofi e matematici che avevano fondato sulla verità della geometria le loro sicurezze si trovarono man mano a dover rivedere molte loro convinzioni.
Intorno al 1900 diventa più esplicita una critica agli ‘Elementi’, relativamente alla definizione delle parallele e all’assioma relativo
Non vi è alcun dubbio sulla verità del postulato ma, si accusa Euclide di averlo posto tra essi. Per questo motivo non pochi tentarono la dimostrazione usufruendo solo delle proposizioni presenti nel I libro e che precedono la 29 nella quale viene utilizzato da Euclide per la prima volta.
Insomma si è cercato di dimostrare l’inutilità del postulato.
Il V postulato ha una storia lunga 2000 anni, perché matematici di tutti i tempi hanno cercato di dimostrare la proprietà delle parallele, tentativi tutti falliti che hanno però portato alla convinzione nel XIX secolo dell’impossibilità di dimostrarlo. E’ proprio da questa convinzione che inizia a farsi strada l’idea di costruire una geometria che ne faccia a meno.
Beltrami fu uno dei primi a costruire un modello di geometria iperbolica che però aveva il difetto di essere valida solo localmente (fu dimostrato da Hilbert nel 1901).

Per Kant la geometria è una scienza che determina le proprietà dello spazio in modo sintetico e a priori perché fornisce un’informazione sulle strutture trascendentali a cui devono conformarsi gli oggetti d’esperienza (la retta è la via più breve per congiungere 2 punti e non richiede un controllo empirico dell’esperienza .
Kant pensava che la geometria euclidea fosse l’unica in grado di rappresentarci per prendere coscienza dello spazio.
Il distacco che si ottenne tra la geometria matematica cioè la conoscenza analitica a priori, e la geometria fisica cioè la conoscenza sintetica a posteriori, si ottenne per l’impossibilità di una geometria sintetica a priori.
Le geometrie non euclidee: ellittica e iperbolica, sono geometrie che si basano sulla negazione del V postulato.
Accettare la possibilità di geometrie diverse da quella euclidea fu un vero progresso nella concezione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo.
Per dimostrare la validità delle geometrie non euclidee occorre dimostrare l’indipendenza del V postulato dagli altri 4 e la non contraddittorietà. Se le geometrie non euclidee avessero portato ad un assurdo, non avrebbero soddisfatto il principio di non contraddittorietà, e allora, anche la geometria euclidea, su cui si basano, sarebbe stata non coerente.
Le geometrie non euclidea e quella euclidea sono disgiunte perché una esclude l’altra ma sono legate in sede logica: la validità di una implica quella delle altre.

Questo laboratorio è proseguito con un lavoro di italiano ed uno di Filosofia che possono essere schematizzati in queste schede:

Scheda 1:
Proposta didattica per una 5 liceo: analisi delle geometrie non euclidee nella letteratura italiana e straniera

Titolo: Prospettive non euclidee nella Letteratura

Grado scolastico: 5^ anno

Tematica affrontata: applicazione del pensiero non euclideo attraverso passi scelti di autori selezionati della letteratura italiana e straniera

Prerequisiti:
- elementi fondamentali della geometria euclidea e della geometria non euclidea;
- conoscenza degli autori proposti

(1) Vedi allegati

Obiettivi dell'attività: riflettere e analizzare una "letteratura deduttiva" attraverso la distinzione tra "verità" e "coerenza" che inquadra una teoria matematica nel meccanismo ipotetico-deduttivo di stampo non euclideo

Tempi: 10-15 ore

Premessa: questa riflessione nasce dall'approccio di G.Saccheri e dalla vera e propria rivoluzione matematica che portò ad accettare il fatto che gli assiomi ce li possiamo inventare, indipendentemente dal fatto che esprimano proprietà evidenti dello spazio fisico o dell'intuizione, purché non siano contraddittori.

Insomma, venne introdotta la distinzione tra "verità" e "coerenza" e una teoria matematica fu spogliata di ogni pretesa attribuzione di verità, essendo i suoi assiomi di base pure convenzioni sulle quali il matematico costruisce l'edificio ipotetico-deduttivo.

Quindi non potremo dire se i teoremi dedotti sono veri nel senso tradizionale di asserzioni avvalorate dall'esperienza sensoriale, ma soltanto affermare che sono deducibili da un insieme di assiomi coerenti, non contraddittori.

METODOLOGIA:

L'attività laboratoriale con suddivisione in gruppi dei ragazzi

Presentazione di piccole Unità concentrate su autori della letteratura il cui pensiero e la cui posizione è stata spiegata dagli studenti attraverso la lettura ed il commento di passi scelti presentati tramite LIM in Power point
L'attività ha previsto:

1) Parte introduttiva: tra matematica e letteratura con G. Saccheri (dal trattato *"Euclides ab omni naevo vindicatus")*, L.Sinisgalli (dall'articolo "Natura, calcolo, fantasia" nella rivista Pirelli, 1951) e Dante
2) Leopardi ed estratti dallo *Zibaldone* e dalle *Dissertazioni filosofiche*
3) E.A.Poe e l'incipit dei *Delitti della rue Morgue*
4) L.Pirandello e l'intervento di Finetti (dal settimanale *Quadrivio*)
   L.Pirandello: passi scelti da *Così è se vi pare* e *Uno, nessuno e centomila*
5) J.L.Borges: passo scelto da *Il giardino dei sentieri che si biforcano*
6) I.Calvino e l'OULIPO; lettura e commento di un estratto dell'*Incendio della casa abominevole* e del *Prato infinito* da *Palomar*
7) U.Eco: passi scelti da *Il nome della Rosa* e *Il pendolo di Foucault*
8) Dostoevskji: passi scelti dai *Fratelli Karamazov*
9) J.Saramago: passi scelti da *"Storia dell'assedio di Lisbona"*

Scheda 2

Titolo: Lo statuto degli enunciati matematici e la crisi dei fondamenti

Grado scolastico: 5^ anno

Tematica affrontata: analitico e sintetico; modello e realtà; logicismo, formalismo e intuizionismo tra filosofia e matematica.

Prerequisiti: - elementi fondamentali della geometria euclidea e della geometria non euclidea;
- conoscenza della logica aristotelica

Obiettivi dell'attività: condurre una riflessione interdisciplinare sulla grammatica logica degli enunciati scientifici e sulla loro relazione con la realtà.

Tempi: 9 ore

UD 1. Analitico e sintetico in Kant (3 ore)
UD 2. La concezione convenzionalistica della scienza in Nietzsche (3 ore)
UD 3. La crisi dei fondamenti: logicismo, formalismo e intuizionismo tra filosofia e matematica (3 ore).

Testi

I. Kant, *Critica della ragion pura*, trad. it. di Giorgio Colli, Adelphi, Milano 1976.
Introduzione; 45-71

F. Nietzsche: brani seguenti tratti da: *Umano troppo umano* (UTU); *La gaia scienza* (GS):
GS 110 Origine della conoscenza, *111 Origine del logico, 112 Causa ed effetto;
UTU 16 Fenomeno e cosa in sé; *18 I problemi fondamentali della metafisica; 19 Il numero

N. Abbagnano – G Fornero, *La ricerca del pensiero,* vol. 3B
Unità 11 – Cap. 1, *Filosofia, scienza e linguaggio: da Frege a Russell* ; pp. 195-208.

(1) Vedi allegati