



# LA CRISI DEI FONDAMENTI

Lo statuto della  
matematica nel logicismo,  
nel formalismo e  
nell'intuizionismo

---

# LOGICISMO

- ◉ **J. G. Frege** (1848-1925). *Ideografia* 1879
- ◉ **B. Russell** (1872-1970) – A. N. Whitehead (1861-1947) *Principia mathematica* 1910-13
- ◉ Precursori: Boole (1815-1864) e Cantor (1845-1918)

# FORMALISMO

- David Hilbert (1862-1943)

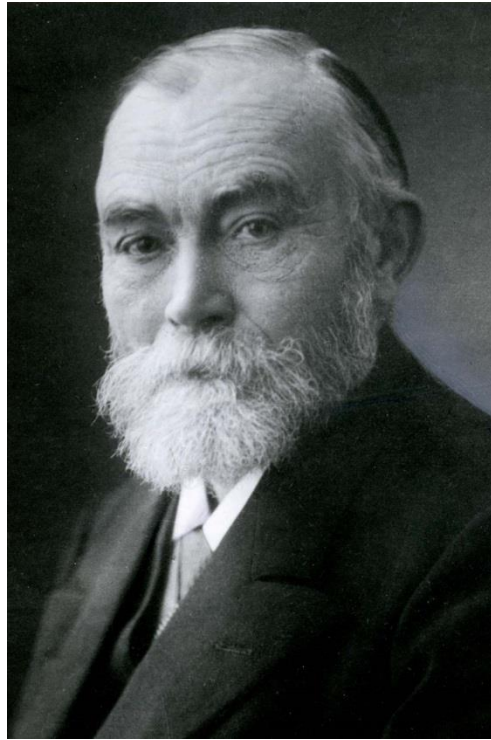
# INTUIZIONISMO

- Jan Luitzen Egebertus Brouwer (1881-1966)

# LOGICISMO

- Cantor intraprese il progetto di fondare l'intera matematica sulla teoria degli insiemi
- Frege riprende il progetto e lo radicalizza

# FREGE



# LOGICISMO

## (Frege)

- Fondazione della matematica nella logica
- Al contrario di quello che aveva sostenuto Kant e tornando a Leibniz, Frege sostiene che le verità matematiche siano analitiche
- Ciò vuol dire: si dimostrano «sulla base di leggi logiche generali e di qualche definizione precisa»

# LOGICISMO

## (Frege)

- Oggetto della logica sono i concetti
- I concetti hanno uno statuto platonico: hanno una realtà oggettiva indipendente dalla mente umana
- La mente ha rappresentazioni soggettive (per esempio l'immagine di un triangolo) che non sono identiche ai concetti

# LOGICISMO (Frege)

- Fondamentale distinguere la logica dalla psicologia
- Se così non fosse le verità logiche e matematiche avrebbero il valore di generalizzazioni dell'esperienza e non potrebbero valere in modo universale e necessario

NB La stessa battaglia contro lo psicologismo viene condotta dal padre della fenomenologia **E. Husserl** nelle sue *Ricerche logiche* (1901)

# LOGICISMO

## (Frege)

- I concetti sono funzioni, cioè relazioni che a ogni valore di un dominio fanno corrispondere un determinato valore di un codominio

$$2x = y$$

è una funzione  $f(x) = y$

# LOGICISMO

## (Frege)

- I concetti sono funzioni che operano non solo su quantità

*X è la squadra campione d'Italia nel 2021*

A x posso sostituire vari argomenti: solo con «Inter» l'enunciato è vero.

Se sostituisco «Lazio» risulta falso

# LOGICISMO (Frege)

- Analogamente questa funzione «più generica»

*La squadra x è stata campione d'Italia*

Vero per Inter, Juventus, Roma; falso per Sambenedettese o Pistoiese

# LOGICISMO

## (Frege)

- Una funzione però ha un dominio e un codominio.
- Qual è il codominio di funzioni come *«La squadra x è stata campione d'Italia»* ?

**La verità e la falsità**

*«La squadra x è stata campione d'Italia»*

Dominio

Codominio

Inter

V

Sambenedettese

F

Juventus

V

Atletico S. Lorenzo

F

# LOGICISMO

## (Frege)

- Intensione o senso (*Sinn*): insieme delle caratteristiche che un oggetto deve avere per cadere sotto quel concetto (per rendere vero l'enunciato)
- Estensione o significato (*Bedeutung*): insieme degli oggetti che cadono sotto quel concetto

# LOGICISMO (Frege)

- Il Senso è un oggetto ideale, un contenuto concettuale che per Frege esiste al modo delle idee di Platone

# LOGICISMO (Frege)

- L'estensione (Bedeutung) corrisponde a una classe
- Le classi possono essere trattate come individui ed essere comprese in macroclassi
- Questo è fondamentale per il concetto di numero

# LOGICISMO

## (Frege)

- Il numero è la classe delle classi equinumerose
- Classe equinumerosa rispetto a un'altra: quando si può trovare una corrispondenza biunivoca fra tutti gli elementi dell'una e dell'altra

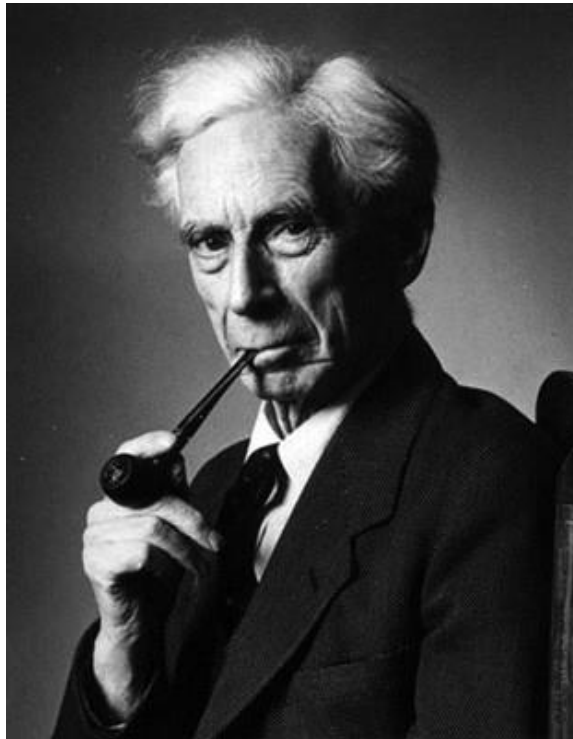
# LOGICISMO (Frege)

Porcellini [Timmy, Tommy, Jimmy]

Nipoti di Paperino [Qui, Quo, Qua]

.....

# LOGICISMO (Russell)



# LOGICISMO (Russell)

- Russell segue Cantor e Frege nella fondazione della matematica nella logica
- Tuttavia individua un problema: il famoso **paradosso di Russell**

# LOGICISMO (Russell)

- Tutte le classi individuate da Frege (compresi i numeri) contengono altre classi, ma non contengono sé stesse
- Che ne è allora della **classe delle classi che non contengono sé stesse?**

# LOGICISMO (Russell)

- o La **classe delle classi che non contengono sé stesse**

contiene o no sé stessa?

- ❖ Se contiene sé stessa è contraddittorio
- ❖ Se non contiene sé stessa, gode della proprietà di non contenere sé stessa e quindi deve essere inclusa in sé stessa. Ciò è ugualmente contraddittorio

# LOGICISMO (Russell)

- Russell spiega il paradosso con una storiella.
- «Un certo villaggio ha tra i suoi abitanti un solo barbiere. È ben sbarbato e fa la barba a tutti quelli che non si fanno la barba da soli»
- Chi rade il barbiere? Se si rade da solo è violata la premessa. Se non si rade da solo deve farsi radere dal barbiere, cioè.... da sé stesso!

# LOGICISMO (Russell)

- Russell propone di risolvere il paradosso con la teoria dei tipi
- Creare una gerarchia di oggetti logici (classi). Ognuno di essi appartiene a un oggetto di tipo superiore ma non a sé stesso.
- In sostanza si tratta di evitare l'autoriferimento.

# LOGICISMO (Russell)

- Tuttavia la teoria dei tipi pone seri problemi alla fondazione della matematica.
- Per esempio non può dimostrare l'infinità dei numeri e deve introdurla come postulato

# FORMALISMO (Hilbert)



# FORMALISMO (Hilbert)

- David Hilbert (1862-1943)

# FORMALISMO (Hilbert)

- La logica, che fa uso di nozioni aritmetiche come quelle di insieme e di numero, non può essere considerata più fondamentale della matematica
- Logica e matematica devono essere sviluppate parallelamente

# FORMALISMO (Hilbert)

- Le diverse teorie matematiche (teoria degli insiemi, geometria, analisi) sono strutture assiomatico-deduttive sul modello euclideo
- Ciascuna risulta fondata se se ne prova la coerenza e la completezza

# FORMALISMO

## (Hilbert)

- Coerenza: dagli assiomi non devono derivare due proposizioni contraddittorie ( $A$  e non- $A$ )
- Completezza: ogni proposizione  $A$ , che possa scriversi nei termini del sistema, deve essere decidibile all'interno di esso; si deve cioè derivare o  $A$  o non- $A$

# FORMALISMO (Hilbert)

- Concetto di sintassi logica (sviluppato da Carnap). Ogni sistema formale deve contenere:
  - Regole di formazione degli enunciati (nomi individuali, predicati, operazioni logiche)
  - Assiomi
  - Regole di inferenza o di derivazione (per esempio il modus ponens: se A allora B; A; dunque B)

# FORMALISMO (Hilbert)

- Hilbert cominciò con l'aritmetica.
- Lista finita di simboli combinati secondo regole di inferenza e di derivazione

# FORMALISMO (Hilbert)

- Dimostrazione della non-contraddittorietà. Lo schema è questo
  - Assunti certi assiomi e certe regole di inferenza si prova che essi godono di una certa proprietà
  - Si mostra che un'eventuale proposizione contraddittoria non godrebbe di quella proprietà
  - Tale proposizione non può quindi essere derivata dal sistema

# LA CRISI DEL FORMALISMO: I TEOREMI DI GÖDEL



# LA CRISI DEL FORMALISMO: I TEOREMI DI GÖDEL

- Nel 1931 il matematico austriaco Kurt Gödel mise in crisi il programma di Hilbert mostrando due teoremi.
- Essi riguardano sistemi formali sufficientemente potenti, capaci cioè di dimostrare quello che dimostra l'aritmetica elementare.

# LA CRISI DEL FORMALISMO: I TEOREMI DI GÖDEL

## **Primo teorema di Gödel.**

*È possibile costruire una proposizione  $G$  che non sia né dimostrabile né refutabile all'interno del sistema*

- Ciò mostra l'incompletezza del sistema.
- Peraltro nel caso in cui  $G$  sia vera essa è indecidibile all'interno del sistema
- Non è quindi possibile risolvere il concetto di verità in quello di dimostrabilità

# LA CRISI DEL FORMALISMO: I TEOREMI DI GÖDEL

- ◉ **Secondo teorema di Gödel.**

*Non è possibile dimostrare all'interno di un sistema come l'aritmetica elementare la non-contraddittorietà del sistema stesso*

# LA CRISI DEL FORMALISMO: I TEOREMI DI GÖDEL

- Risultato: ogni teoria assiomatica, potente quanto l'aritmetica è  
incompleta (primo teorema di Gödel)  
incapace di giustificarsi (secondo teorema di Gödel)

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- La matematica non è riducibile alla logica e alla nozione di sistema formale
- La matematica, come insegna Kant, si fonda sull'intuizione «dello scorrere continuo del tempo, dell'unità nella differenza, della persistenza nel mutamento»
- Gli enti matematici sono costruzioni mentali

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- La matematica, a differenza della logica, è un costruire privo di parole (kantianamente sta nell'Estetica trascendentale non nell'Analitica, trascendentale cioè nell'intuizione pura non nell'intelletto)
- « $2 + 2 = 3 + 1$ » va letto come: ho effettuato le costruzioni mentali indicate come  $2 + 2$  e  $3 + 1$  e ho trovato che portano allo stesso risultato.

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- In particolare viene rifiutato il principio del terzo escluso e la dimostrazione per assurdo:
- Dimostrare la falsità di non-A non equivale a dimostrare la verità di A in assenza di un procedimento che dimostri A

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- Esempio di due formule

- I)  $k$  è il più grande numero primo tale che anche  $k-1$  è un numero primo oppure  $k=1$  se tale numero non esiste
- II)  $l$  è il più grande numero primo tale che anche  $l-2$  è un numero primo oppure  $l=1$  se tale numero non esiste

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- Le matematica classica accetta entrambe come definizioni, l'intuizionismo solo la prima perché essa è calcolabile ( $K=3$ )
- La seconda non è accettabile in quanto non si può dimostrare se la serie dei numeri primi  $p$  e  $p+2$  sia finita o no.

# INTUIZIONISMO (Brouwer)

- L'intuizionismo però ha un grosso limite: ci impone di sacrificare tutta quella parte di matematica basata sul principio del terzo escluso
- [https://air.unimi.it/retrieve/handle/2434/35641/71971/Con%20gli%20occhi%20negli%20occhi%20di%20Brouwer\\_Franchella.pdf](https://air.unimi.it/retrieve/handle/2434/35641/71971/Con%20gli%20occhi%20negli%20occhi%20di%20Brouwer_Franchella.pdf)

# BIBLIOGRAFIA

E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1964

C. Mangione, "La svolta della logica nell'Ottocento", in L. Geymonat, *Storia del pensiero scientifico e filosofico*, vol. V, Garzanti, Milano 1971

Id. "Logica e problema dei fondamenti nella seconda metà dell'Ottocento", *Ibid.*, cit.

Id. "La logica nel ventesimo secolo", in L. Geymonat, cit., vol. VI.

Id. "La logica nel ventesimo secolo (II)", in L. Geymonat., cit., vol. VII.