

12/03/21

ELEMENTI DI EUCLIDE E V POSTULATO

Gli elementi di Euclide

Gli elementi di Euclide sono un trattato sulla geometria diviso in 13 libri e risalente al 300 a.C.

L' opera contiene un' esposizione chiara e completa di tutta la geometria nota al tempo e rappresenta un tentativo di assiomatizzazione della geometria, per dare una certa forma ed un certo rigore alla disciplina.

I postulati

Questa assiomatizzazione euclidea della geometria passa dunque per 5 postulati (assiomi). Sono dunque 5 affermazioni che si prendono per vere e che non hanno bisogno di una dimostrazione rigorosa. Esse si dicono verità evidenti e sono:

1. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto. In altre parole: per due punti passa una sola retta.
2. Un segmento si possa prolungare infinitamente in linea retta.
3. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro

Il V postulato

Il quinto postulato afferma (nella formulazione originale) che:

- Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due rette.

Questo postulato è divenuto però noto a noi nella sua riformulazione, attuata da Playfair:

- Dati nel piano un punto P e una retta r , esiste una e una sola retta per P parallela ad r .

12/03/21

LA COSTRUZIONE DI TORRICELLI

Il punto di Torricelli-Fermat

Il punto di Torricelli-Fermat di un triangolo è un punto che rende minima la somma delle distanze di tale punto dai vertici del triangolo. Torricelli fu il primo a dimostrare che un punto ha la precedente caratteristica se e solo se i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo, formano tra loro angoli di 120° .

La storia di Torricelli e Fermat

- Torricelli e Fermat, chi erano?

- Evangelista Torricelli (1607-1647) nato il 15 ottobre 1607 a Faenza, è stato un matematico e fisico, celebre in particolare per aver creato il barometro e il cosiddetto tubo di Torricelli che riproduce il vuoto.
- Studiò presso la scuola dei Gesuiti dove entrò in contatto con la Matematica. Fu molto amico di Galilei e Cavalieri, con cui iniziò a lavorare sulla Geometria degli indivisibili.



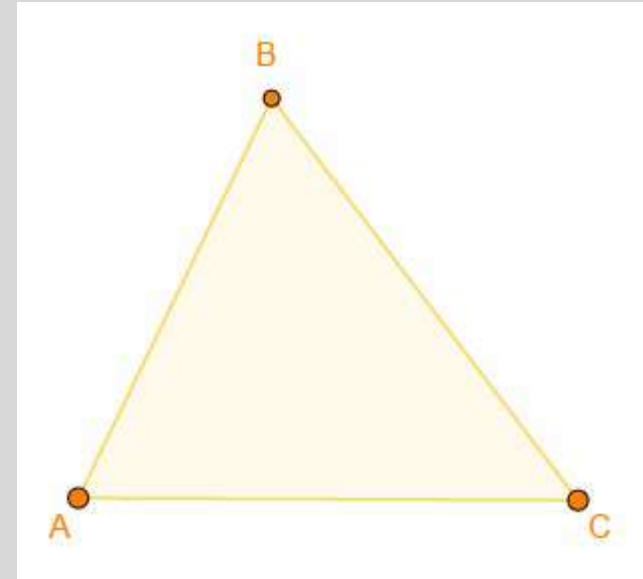
Pierre de Fermat è stato un matematico francese del Seicento (1601 - 1665) che inventò con Pascal il calcolo delle probabilità. Si occupò anche di letteratura ma fu soprattutto un appassionato della matematica. Compì ricerche di notevole importanza ma raramente pubblicò le sue scoperte. Fu il primo a estendere il metodo delle coordinate allo spazio tridimensionale, inoltre il suo metodo per calcolare le tangenti ispirò l'introduzione da parte di Newton del calcolo differenziale.



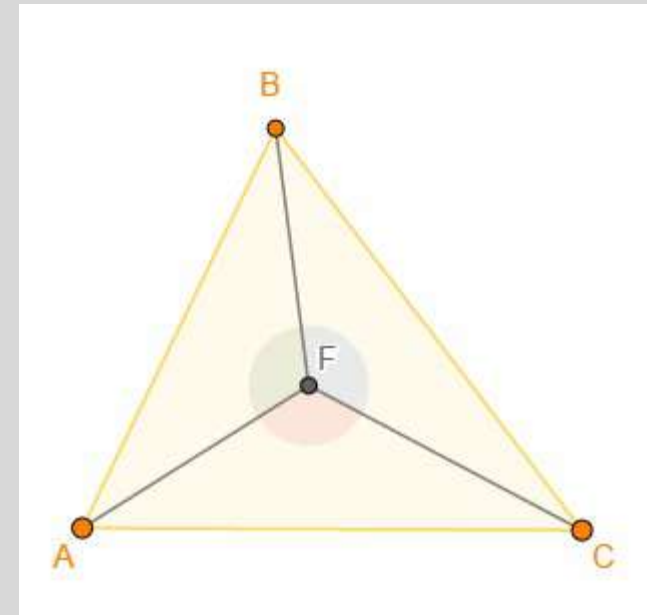
La dimostrazione

«Dato un triangolo, con angoli interni tutti minori di 120° , costruire un punto tale che i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo, formino tra loro angoli di 120° . Il punto così costruito è quindi il punto di Torricelli-Fermat del triangolo.»

Questa è proprio la proposizione che andremo a dimostrare nelle diapositive successive.

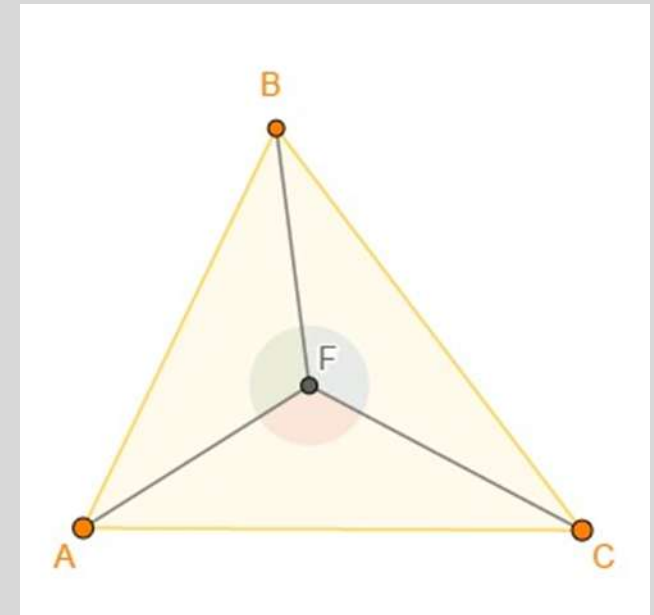


Dato il triangolo ABC vogliamo costruire il punto F tale che i segmenti AF, BF e CF formino tre angoli di 120° .



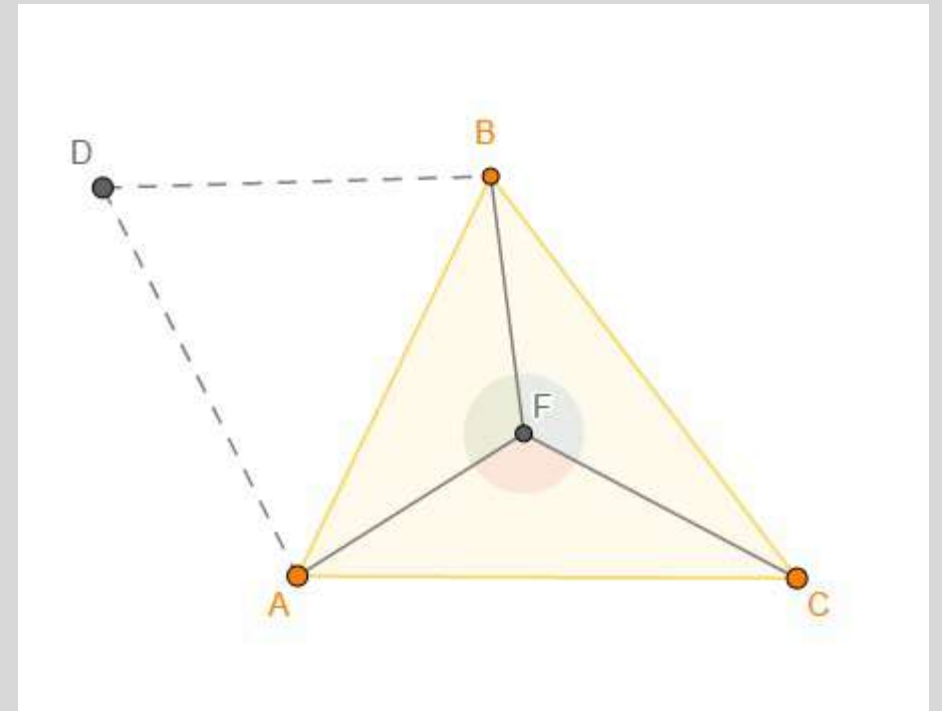
Si costruiscano i segmenti FA, FB e FC.

Per giustificare questo punto si utilizza il 1° postulato:
«Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto. In altre parole: per due punti passa una retta».



Si costruisca un triangolo equilatero ABD sul lato AB.

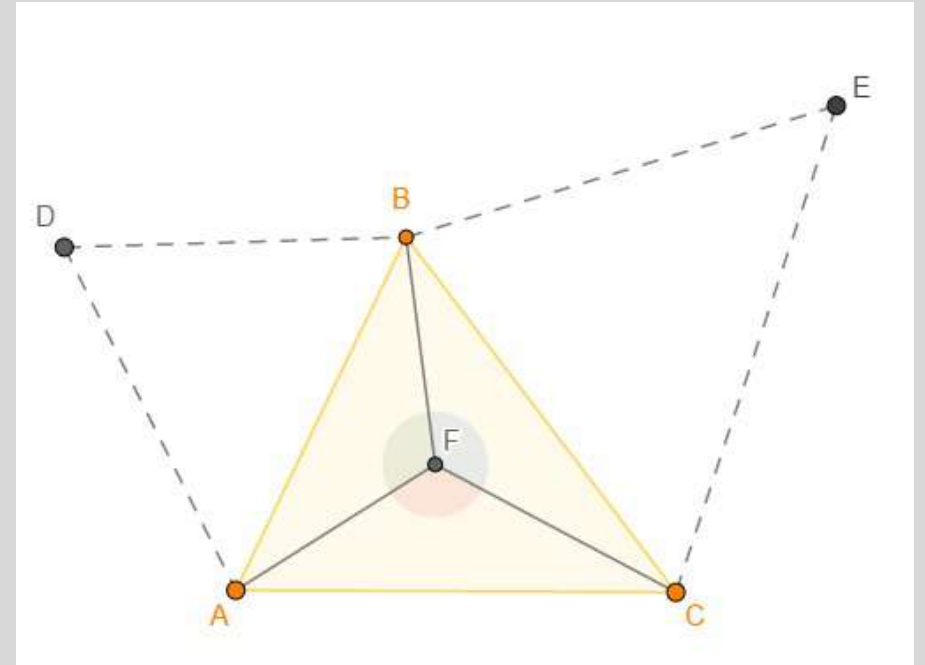
Tale punto è giustificabile con la proposizione 1:
«Costruire un triangolo equilatero di lato fissato».



Si costruisca un triangolo equilatero BCE sul lato BC.

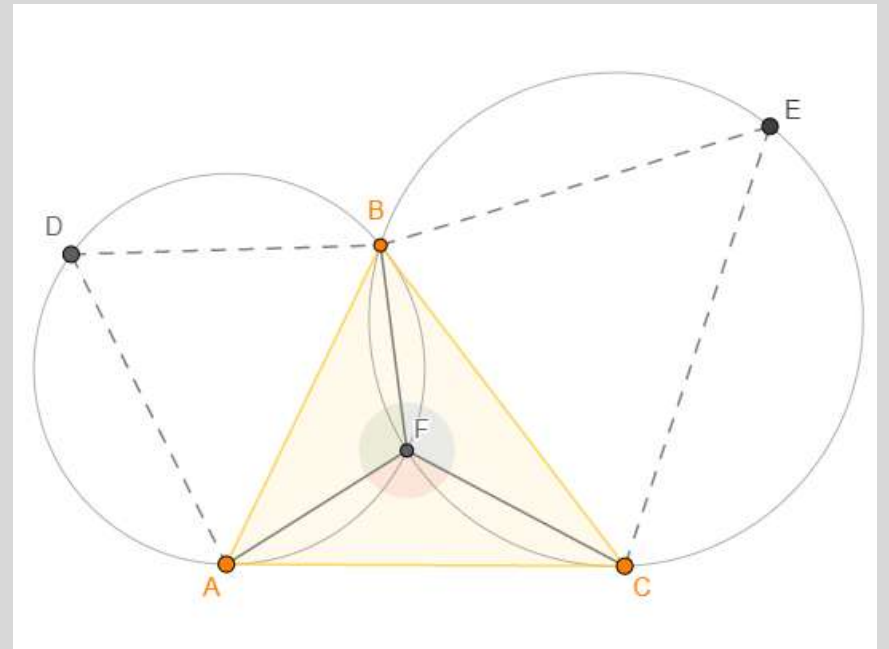
Analogamente al punto precedente, la giustificazione è la proposizione 1:

«Costruire un triangolo equilatero di lato fissato».



Si costruiscano poi le due circonferenze circoscritte ai triangoli ABD e BCE ; queste si intersecano in B e in un altro punto che chiamiamo F.

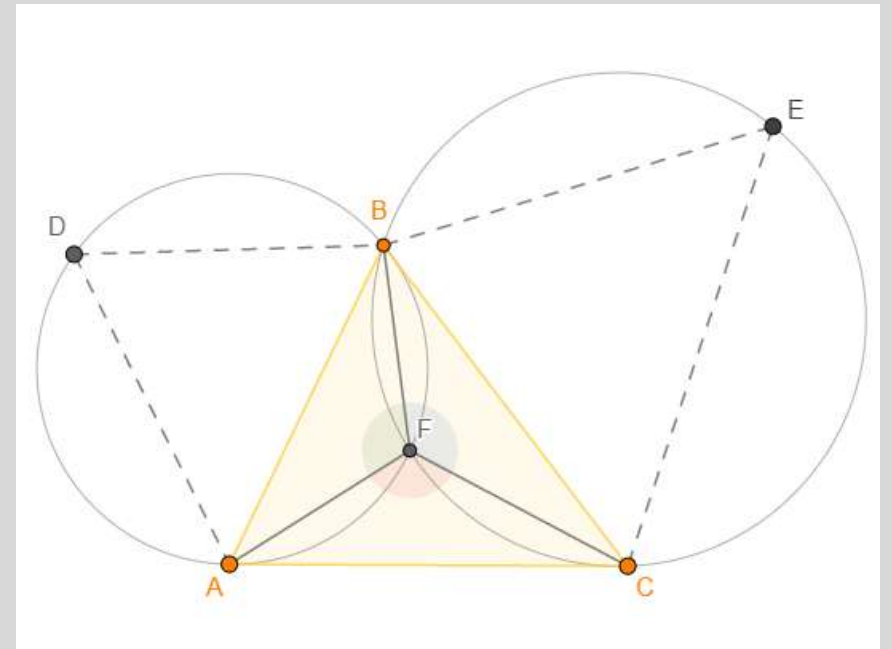
Per costruire due circonferenze circoscritte a due triangoli dati si utilizza la proposizione 5 del libro IV: «Intorno a un triangolo dato, circoscrivere un cerchio».



Osserviamo che i triangoli equilateri ABD e BCE hanno tutti gli angoli uguali . In particolare, ciascun angolo misura 60° .

Per dimostrare che tutti gli angoli del triangolo ottenuto si usa la definizione di triangolo equilatero (definizione 20):

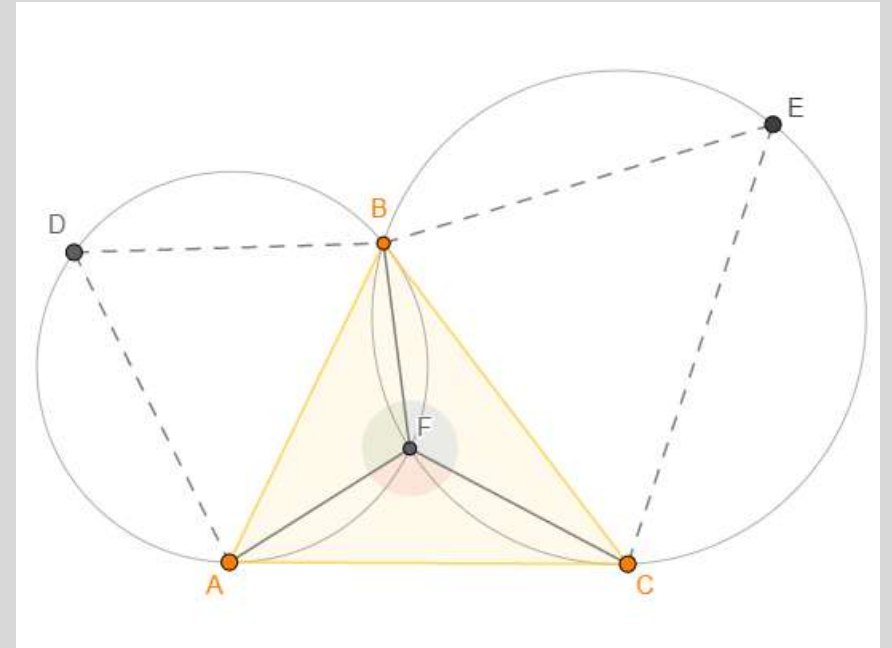
«Delle figure trilateri, triangolo equilatero è quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha due soli lati uguali, scaleno quello che ha i tre lati disuguali».



Consideriamo il quadrilatero ADBF: l'angolo AFB misura 120° .

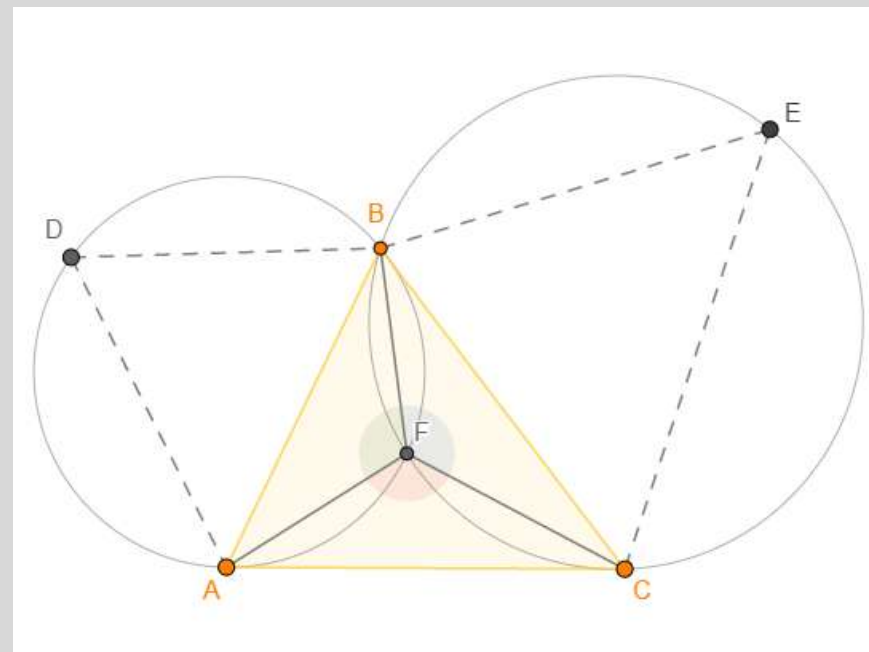
Per giustificare tale punto si utilizza la proposizione 22 del libro III:

«La somma degli angoli opposti di ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza è uguale a due angoli retti».



Facendo le stesse osservazioni sul quadrilatero BFCE possiamo dire che anche l'angolo BFC è di 120° , di conseguenza anche AFC.

Si eseguono le stesse considerazione fatte in precedenza.



E il V postulato?

Per giustificare il **punto 6** (Consideriamo il quadrilatero ADBF: l'angolo AFB misura 120°), si usa la **proposizione 22**: «Costruire un triangolo dati i suoi tre lati (soddisfacenti alla disuguaglianza triangolare)».

Per giustificare la **proposizione 22** però si usa la **proposizione 32**: «In un triangolo ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti. Inoltre la somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a due retti».

Sempre per dimostrare la **proposizione 32** viene usata la **proposizione 29**: «Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora tra gli angoli formati sussistono le seguenti relazioni: gli angoli alterni sono uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali, gli angoli coniugati interni sono uguali a due retti».

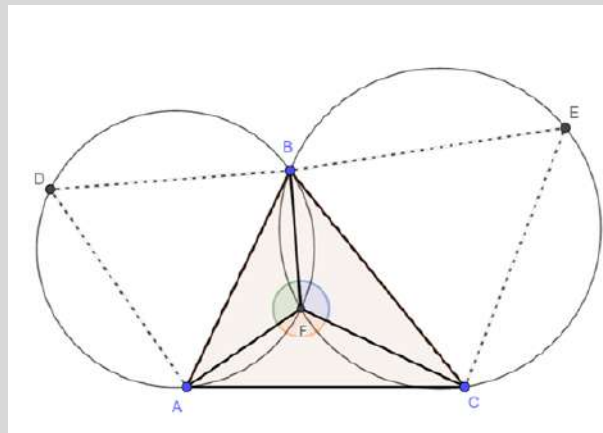
E per concludere la successione, per giustificare la **proposizione 29** si utilizza il **V postulato** di Euclide.

12/03/21

IL V POSTULATO E TORRICELLI

Il V postulato si applica nella costruzione di Torricelli indirettamente tramite la proposizione 22, vediamo perché:

Proposizione 1. *Dato un triangolo, con angoli interni tutti minori di 120° , costruire un punto tale che i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo, formino tra loro angoli di 120° . Il punto così costruito è quindi il punto di Torricelli-Fermat del triangolo.*



Nel punto sei della dimostrazione interviene la proposizione 22(libro 3):

Consideriamo il quadrilatero ADBF: l'angolo $\widehat{AFB}$ misura 120° .

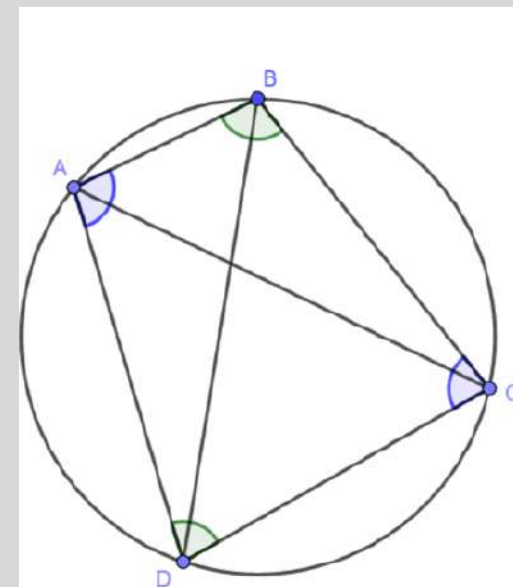
Punto sei:

Proposizione 22. *La somma degli angoli opposti di ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza è uguale a due angoli retti.*

A sua volta nel punto due della proposizione 22(Libro tre) interviene la proposizione 32 (Libro uno):

Punto due:

La somma dei tre angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ del triangolo ABC è uguale a due angoli retti.

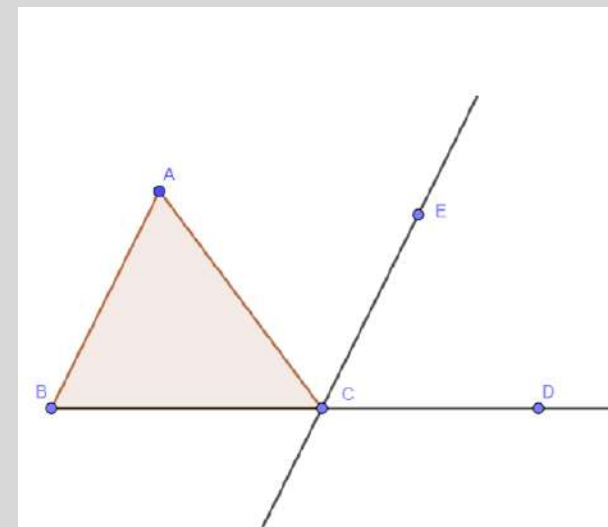


Proposizione 32. *In un triangolo ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti. Inoltre la somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a due retti.*

Analogamente nel punto due della dimostrazione della Proposizione 32, interviene la 29

2. Si sommi l'angolo $\widehat{BGH}$ ad ognuno. La somma degli angoli $\widehat{AGH}$ e $\widehat{BGH}$ è quindi maggiore della somma degli angoli $\widehat{BGH}$ e $\widehat{GHD}$. Ma la somma degli angoli $\widehat{AGH}$ e $\widehat{BGH}$ è uguale a due retti.

Proposizione 29. *Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora tra gli angoli formati sussistono le seguenti relazioni: gli angoli alterni sono uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali, gli angoli coniugati interni sono uguali a due retti. In altre parole valgono le relazioni elencate nella Proposizione 27 e nella Proposizione 28.*

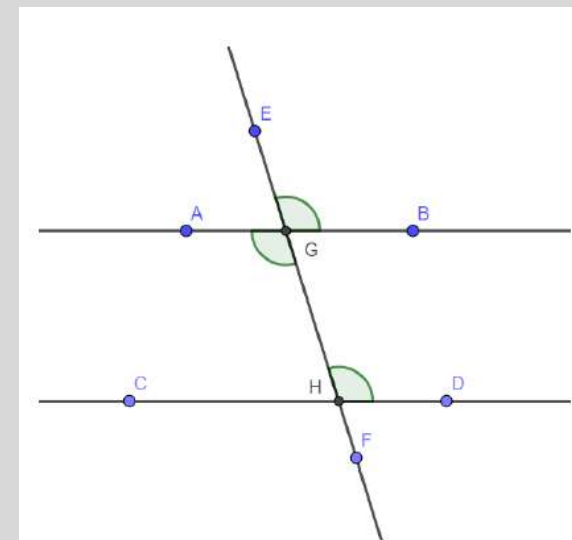


Infine nel punto 4 della proposizione 29 interviene il quinto postulato:

4. Le rette AB e CD, se prolungate illimitatamente, si incontrano. Tuttavia questo è assurdo perché AB e CD sono parallele per ipotesi, di conseguenza si ha che l'angolo $\widehat{AGH}$ è uguale all'angolo $\widehat{GHD}$.

Quinto postulato:

5. Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.



12/03/21

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Cosa sono?

Una geometria non euclidea è una geometria costruita negando o non accettando alcuni postulati euclidei.

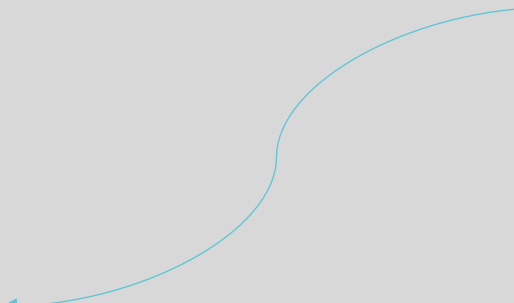
Le geometrie non euclidee nascono dalla riflessione riguardo al V postulato di Euclide e alla sua natura poco evidente. Nel XIX secolo alcuni matematici si concentrarono sulla sua negazione e costruirono le assiomatiche di queste nuove geometrie.

La formulazione di Playfair

Una di queste negazioni fu proprio del matematico scozzese John Playfair, con la seguente formulazione:

Dati nel piano un punto P e una retta r , esiste una e una sola retta per P parallela a r .

esistenza della
parallela



unicità della
parallela



Il V postulato nella formulazione di Playfair

Le geometrie non euclidee nascono dalla formulazione del V postulato, che dal matematico viene negato in due modi:

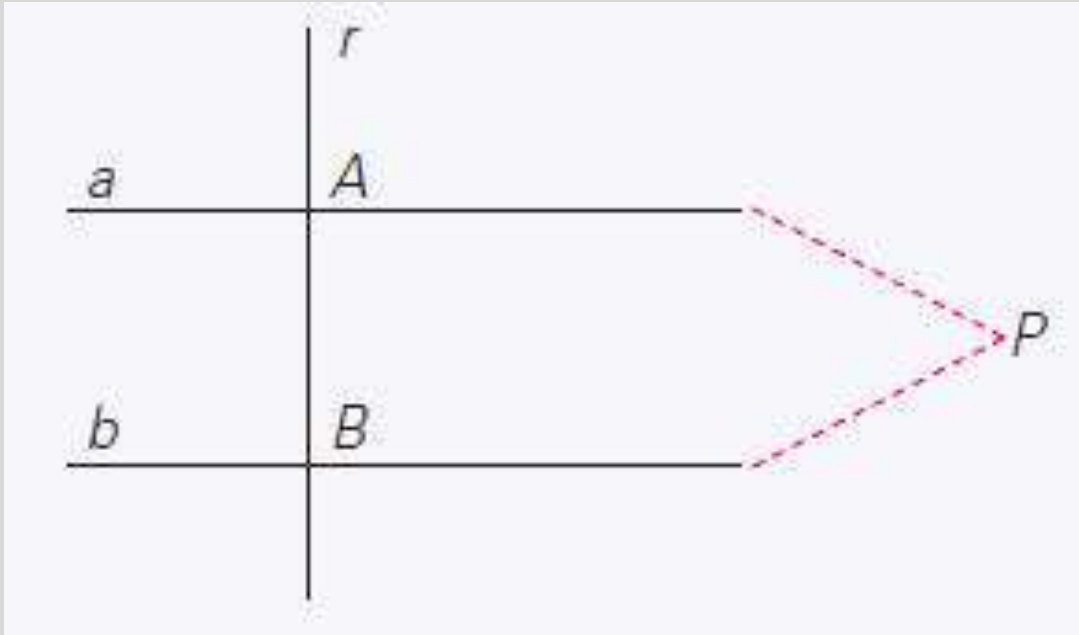
- **Negando l'esistenza della parallela**

“Non esistono rette parallele: due rette hanno sempre un punto in comune”

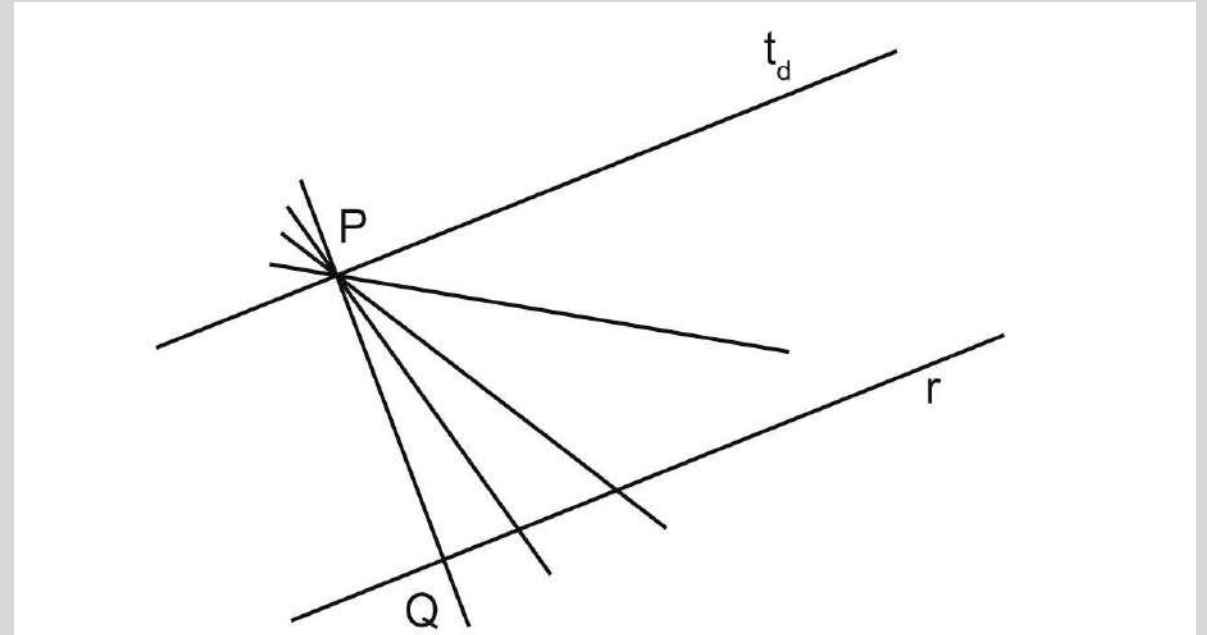
- **Negando l'unicità della parallela**

“Dati nel piano un punto e una retta esistono più parallele alla retta passanti per il punto”

A livello grafico...



Negazione esistenza
della parallela



Negazione unicità della
parallela

12/03/21

CONSIDERAZIONI FINALI

Metodologia del lavoro

Il laboratorio presuppone i seguenti passaggi:

- Visione dei materiali condivisi;
- Divisione della classe in 5 sottogruppi;
- Studio generale su Euclide e i 5 postulati della matematica

Svolgimento del laboratorio

- Analisi della proposizione presa in esame;
- Costruzione della figura;
- Lettura critica della dimostrazione;
- Giustificazione della proposizione, mediante postulati, definizioni, nozioni comuni e proposizioni già giustificate in precedenza.

Conclusioni generali...

- Competenze acquistate durante l'attività:
- Applicazione pratica di postulati al fine di giustificare una dimostrazione;
- Aumento della capacità di lavoro in gruppo;



Liceo Matematico

12/03/21

LAVORO SVOLTO IN COLLABORAZIONE
CON IL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DI
SAPIENZA

