

IL V POSTULATO

Il quinto postulato afferma che:

Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due rette.

Il punto di Torricelli-Fermat

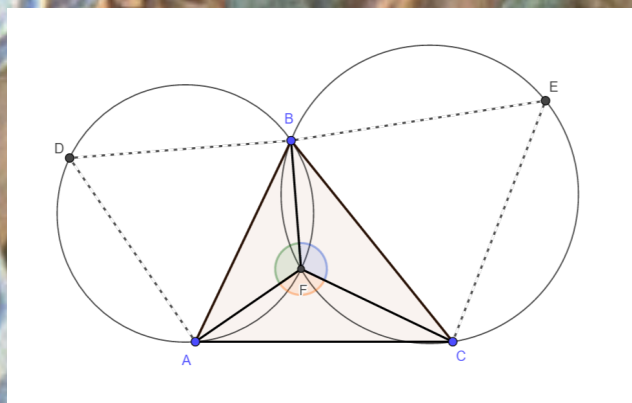
Il punto di Torricelli-Fermat di un triangolo è un punto che rende minima la somma delle distanze di tale punto dai vertici del triangolo. Torricelli fu il primo a dimostrare che un punto ha la precedente caratteristica se e solo se i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo, formano tra loro angoli di 120° .

Di seguito riportiamo la costruzione del punto di Torricelli-Fermat proposta da Torricelli, che si basa proprio su quest'ultima caratteristica.

Proposizione 1. Dato un triangolo, con angoli interni tutti minori di 120° , costruire un punto tale che i segmenti che lo collegano ai vertici del triangolo, formino tra loro angoli di 120° . Il punto così costruito è quindi il punto di Torricelli-Fermat del triangolo.

Dimostrazione. Dato il triangolo ABC vogliamo costruire il punto F tale che i segmenti AF, BF e CF formino tre angoli di 120° .

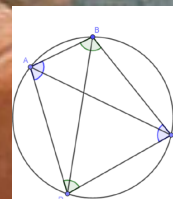
1. Si costruisca un triangolo equilatero ABD sul lato AB.
2. Si costruisca un triangolo equilatero BCE sul lato BC.
3. Si costruiscano poi le due circonferenze circoscritte ai triangoli ABD e BCE ; queste si intersecano in B e in un altro punto che chiamiamo F.
4. Osserviamo che i triangoli equilateri ABD e BCE hanno tutti gli angoli uguali . In particolare, ciascun angolo misura 60° .
5. Si costruiscano i segmenti FA, FB e FC.
6. Consideriamo il quadrilatero ADBF: l'angolo $\angle AFB$ misura 120° .
7. Facendo le stesse osservazioni sul quadrilatero BFCE possiamo dire che anche l'angolo $\angle BFC$ è di 120° , di conseguenza anche $\angle AFC$.



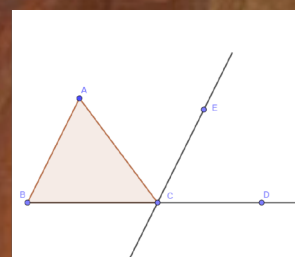
E il V postulato?

Per giustificare il **punto 6**, si usa la **proposizione 22**: «La somma degli angoli opposti di ogni quadrilatero iscritto in una circonferenza è uguale a due angoli retti».

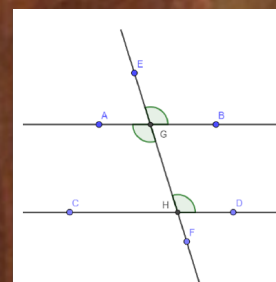
Per giustificare la **proposizione 22** però si usa la **proposizione 32**: «In un triangolo ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti. Inoltre la somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a due retti».



Sempre per dimostrare la **proposizione 32** viene usata la **proposizione 29**: «Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora tra gli angoli formati sussistono le seguenti relazioni: gli angoli alterni sono uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali, gli angoli coniugati interni sono uguali a due retti».



E per concludere la successione, per giustificare la **proposizione 29**, nel punto 4 si utilizza il **V postulato** di Euclide.



Le geometrie non euclidee

Le geometrie non euclidee nascono dalla riflessione riguardo al V postulato di Euclide ed in particolare dalla sua negazione. Nel XIX secolo alcuni matematici si concentrarono sulla negazione del V postulato e costruirono le assiomatiche di queste nuove geometrie. Il postulato può essere negato in due modi: negando l'esistenza della parallela e negando la sua unicità.

La seguente formulazione:

Dati nel piano un punto P e una retta r, esiste una e una sola retta per P parallela a r. è quella fornita dal matematico scozzese John Playfair,

CONOSCENZE

Elementi fondamentali della geometria euclidea;
Assiomi di Euclide

COMPETENZE

capacità di lavorare in gruppo e confrontarsi costruttivamente;
capacità di analizzare enunciati e dimostrazioni geometriche, cogliendone i passi fondamentali e le motivazioni che li giustificano;
capacità di riflettere sui fondamenti della matematica, in particolare sull'assiomatica euclidea e sul ruolo del V postulato in essa.