PERCHÉ PARLARE ANCORA DI PI-GRECO?

Giuliana Massotti
L.S. A. Avogadro

….questo misterioso 3,14159…,che passa attraverso ogni porta e ogni finestra, e scende da ogni camino

Augustus de Morgan (1806-1871)

- Breve storia di pi-greco
- Determinazione del valore , metodo di esaustione
- Irrazionalità e trascendenza

Il numero π è nato da una semplice osservazione: il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro è costante.

La maggior parte della sua storia è cercare il più possibile la sua approssimazione

I Babilonesi e gli Egizi utilizzarono un metodo analogo per calcolare π: un metodo fondato sulla comparazione di figure geometriche, resa possibile dalla conoscenza dei principi elementari della geometria.

Grandi civiltà antiche hanno compreso molto presto che:

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} = \text{cost}$$

Solo nel XVIII secolo verrà dato un nome e un simbolo
(Eulero 1707-1783)

I Babilonesi conoscevano il valore di π o meglio, tra tutti i popoli dell'antichità, sono quelli che hanno calcolato il valore più preciso di

$$\pi = 3{,}125$$

Ma c'è di più, i Babilonesi possedevano una regola per calcolarlo molto vicina a quella che utilizzerà Archimede.

Tutto questo è scritto in una tavoletta che ha 4000 anni e che è stata ritrovata nel 1936, modificando quello che si conosceva sulle capacità matematiche dei popoli della Mesopotamia.

Il metodo usato era questo:

Inscrivere un esagono regolare in una circonferenza,

in modo che $l_6 = \frac{d}{2}$

Conoscevano il valore della costante, quindi

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2l} = \text{cost}$$

Calcolando: $\frac{E}{C} = \frac{6l}{cost\ 2l} = \frac{3}{cost} = \frac{3}{\pi}$

Sapendo calcolare $\frac{E}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} = 0{,}96$ da cui $\pi = 3{,}125$

In un papiro rinvenuto nei resti dell'antica Tebe nel 1858, testimonia che anche gli Egizi avevano calcolato un valore di pi.

L'area di un cerchio con un diametro di 9 unità è pari all'area di un quadrato di lato l di 8 unità:

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 = l^2$$

$$A = \frac{1}{4}\pi\, 9^2 = 8^2$$

$$\pi = 4\,\frac{8^2}{9^2} = 3{,}160$$

Anche Euclide entra a pieno titolo nella storia di pi-greco, non solo perché è il più grande geometra di ogni tempo, ma anche perché riprende il metodo di esaustione per sostenere che la differenza tra l’area di un cerchio e l’area occupata da un poligono regolare che vi è inscritto può essere ridotta a piacere, formulazione che prelude al concetto di limite e, quindi ad Archimede.

Nell’antichità solo Apollonio, utilizzando il metodo di Archimede, ottenne un valore migliore: $\pi = 3 + \frac{17}{120} = 3{,}14167$

Dopodiché bisognerà aspettare 1500 anni prima che in Europa nasca un matematico creativo come Leonardo Pisano che nel 1220 pubblica *Practica geometrie* e si ricominci a parlare di pi-greco.

Archimede è il primo a proporre un metodo scientifico per calcolare pi, e costituisce un salto di qualità nella storia di pi e del pensiero matematico.

In qualche modo riprende la tecnica di comparazione tra figure geometriche: inscrivendo e circoscrivendo un esagono ad un cerchio, si avrà la disuguaglianza: $E_i < C < E_c$

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$\frac{E_i}{d} < \pi < \frac{E_c}{d}$$

Aumentando il numero dei lati dei due poligoni fino a 96, giunse con grande precisione al valore di pi

La forbice di π che può considerarsi eccellente:

$$\frac{223}{71} = 3{,}140845 \ldots < \pi < \frac{22}{7} = 3{,}142857$$

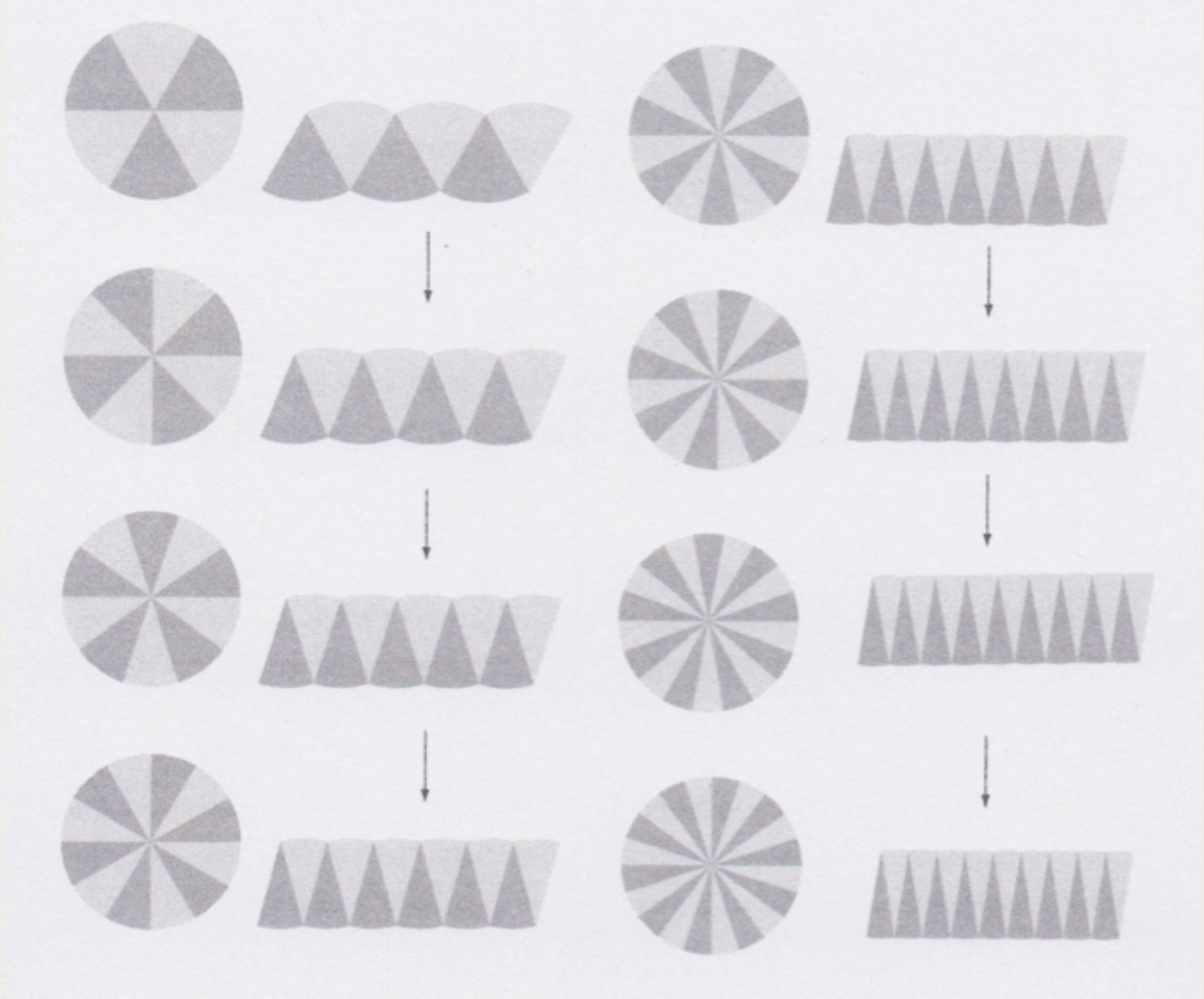
Chi ci assicura però che questa costante, questo π che proviene dall'area sia lo stesso π che compare nella lunghezza?

Senza dubbio è lo stesso, ma non è così evidente mostrarlo, la genialità di Archimede ce ne da la certezza.

Archimede però non aveva la definizione moderna di limite e utilizzava il metodo di esaustione di Eudosso di Cnido (400 a.C)

Per mezzo di esso usava poligoni iscritti e circoscritti, che fornivano valori per eccesso e per difetto.

Il seguente schema ci aiuta a capire perché l'area del cerchio è πr^2.



Suddividendo il cerchio in un numero sempre più grande di settori circolari, si forma un romboide curvilineo che diventa ogni volta sempre più piano, la cui area è base per altezza. L'altezza ogni volta è sempre più vicina al raggio r, mentre la base è una curva che tende al valore del semiperimetro del cerchio.

L'area tende a:

$$r\frac{l}{2} = r\frac{2\pi r}{2} = r\pi r = \pi r^2$$

I problema che interessava i matematici antichi era costruire una superficie quadrata equivalente ad una circolare, perché misurare un’area quadrata era elementare e semplice mentre la misurazione di aree circolari comportava difficoltà e offriva un valore approssimativo.

Nell’epoca in cui dominava il pensiero greco, a questa esigenza di conoscenza si aggiunse la pretesa di trovare tale equivalenza per procedimento divino, lineare, in linea con la filosofia greca; quindi per costruire un quadrato equivalente ad un cerchio si ammetteva solo l’uso della riga e del compasso.

In questo consiste quadrare un cerchio: ottenere una costruzione che risolva l'equivalenza usando gli strumenti un numero finito di volte.

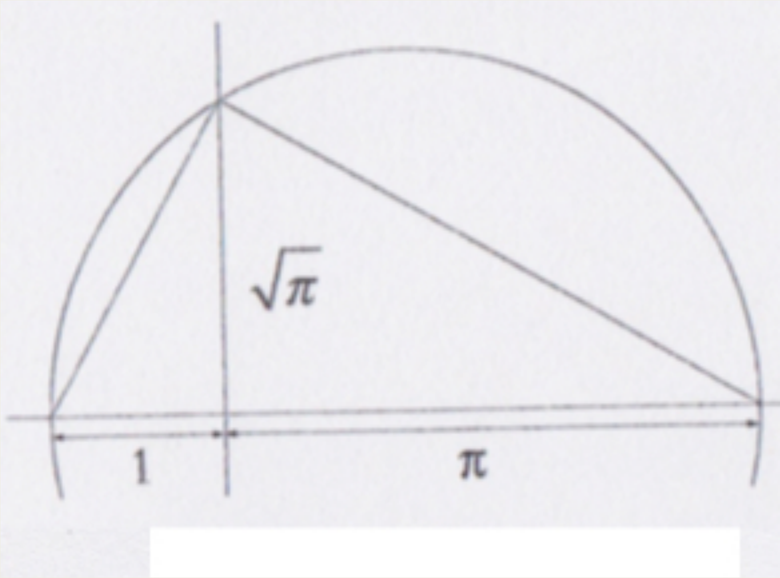
Dal punto di vista algebrico , «quadrare» significa cercare un quadrato tale che:

$$\pi r^2 = l^2$$

Ovvero:

$$l = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$$

Il che equivale a costruire $\sqrt{\pi}$ con riga e compasso. Se si ha $\sqrt{\pi}$, una semplice costruzione ci porta a π.



Ma allora ….otterremmo la quadratura del cerchio, Storicamente J.Lambert nel 1767 dimostra che π è irrazionale

Nel 1794 A. Legendre dimostra che anche π^2 è irrazionale , a differenza di $\sqrt{2}$ il cui quadrato è un intero.

Nel 1844 J. Liouville dimostra che esistono numeri non algebrici, numeri che trascendono dal metodo algebrico: i trascendenti

I numeri algebrici sono quelli che sono soluzione di un’equazione polinomiale.

Tutte le costruzioni geometriche ottenute con riga e compasso ed un numero finito di passi, danno origine a segmenti costruibili come $\sqrt{2}$ che può dirsi numero euclideo, irrazionale, algebrico.

I matematici definiscono i numeri non algebrici, trascendenti.

Come dimostrò Lindemann nel 1882, pi-greco oltre ad essere irrazionale , non è algebrico, perchè non è possibile costruirlo geometricamente.

Cosicché la ricerca di un procedimento per quadrare il cerchio finisce qui.

Pi-greco quindi appartiene alla parte trascendente dei numeri che ne costituisce la maggioranza e che non ha alcuna regolarità.

Pi-greco e 'Il piccolo principe'

Supponiamo che il personaggio in questione percorra un meridiano, e che la sua altezza sia 1 metro.

Se percorre 1000 metri, quale distanza percorre la testa?

Siccome cammina per 1000m e la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$,

La distanza percorsa a piedi in metri è 1000=$2\pi r$, il protagonista è alto 1 metro quindi $C = 2\pi(r + 1)$

Sottraendo le due espressioni:

Distanza in metri percorsa dalla testa –distanza in metri percorsa dai piedi=

$C - 1000 = 2\pi(r+1) - 2\pi r = 2\pi(r+1-r) = 2\pi = 6{,}28$!

In tutto il calcolo il raggio dell'asteroide non influisce per nulla .