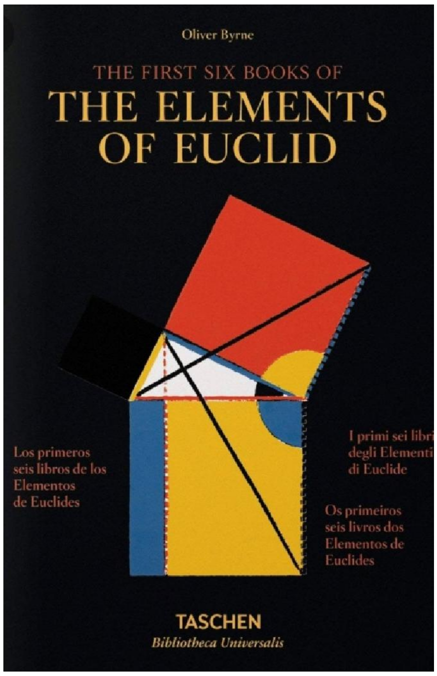
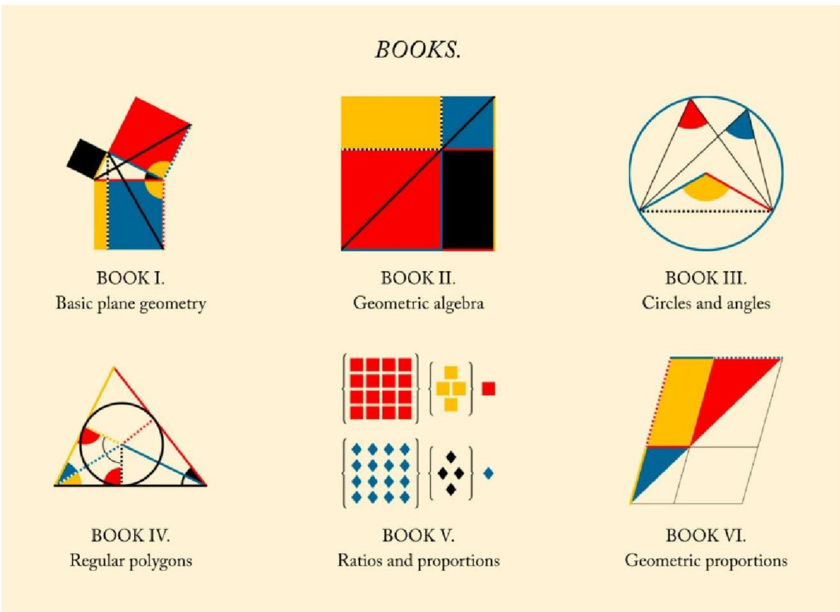
Unità didattica di liceo matematico:

L'antica matematica greca incontra il modernismo

Per geometria euclidea si intende in primo luogo la sistemazione su basi ipotetico-deduttive della geometria del piano e dello spazio operata da Euclide (sec. III a.C.) negli *Elementi*. Tale testo, in 13 libri, ha rappresentato, per oltre venti secoli, il modello di riferimento di ogni possibile geometria, fino alla nascita, nei primi decenni del XIX secolo, delle cosiddette *geometrie non euclidee*. Nel primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado gli studenti scoprono gli elementi di tale geometria del piano e dello spazio entro cui si definiscono i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni).
Si conosce ben poco della vita di Euclide: fondò una scuola ad Alessandria d'Egitto, visse al tempo di Tolomeo I il quale regnò fra il 306 e il 283 a.C. La sua opera principale, gli Elementi, è il libro che ha avuto il maggior numero di edizioni, Bibbia esclusa. Comprende geometria e aritmetica. Con Euclide si può dire che giunse a compimento un lungo lavoro di ricerca.
Gli Elementi di Euclide costituiscono il primo e forse più importante trattato di matematica della storia, non soltanto per i contenuti esposti, che rappresentano una *summa* delle conoscenze geometriche dell'epoca, ma soprattutto per il metodo deduttivo che vi è magistralmente impiegato. In particolare, negli Elementi, la geometria del piano è trattata nei primi sei libri, mentre quella dello spazio negli ultimi tre. Tutta l'opera si fonda su alcuni principi enunciati nel primo libro.
Circa un secolo prima che Mondrian portasse sulla tela le sue celebri figure geometriche rosse, gialle e blu, nel 1847 il matematico Oliver Byrne sfruttò questo schema cromatico per la sua edizione degli *Elementi* di Euclide, *"The first sixbooksof the ElementsofEuclid"*.La sua idea era di sfruttare i colori e le forme per agevolare l'apprendimento e diffondere la conoscenza. Il risultato di tale creatività lo ha reso uno dei libri più eccentrici e belli del XIX secolo.



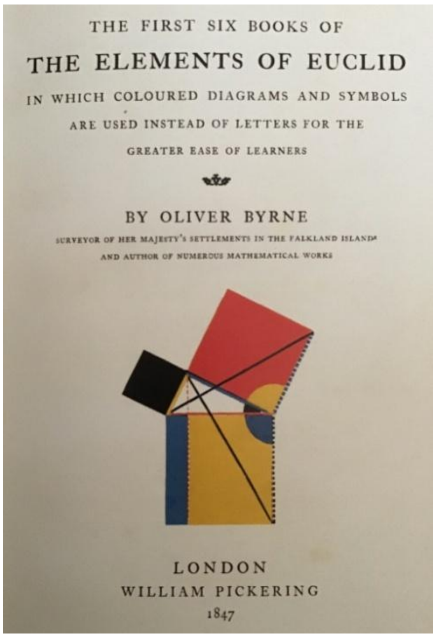


A partire dal testo di O.Byrne scritto in inglese abbiamo creato questa unità didattica laboratoriale nella quale tradurremo i testi e interpreteremo le figure, rielaboreremo le definizioni, i teoremi e i postulati formulati da Euclide; con spirito critico ripercorreremo i cambiamenti nelle terminologie, nelle ipotesi e tesi di teoremi fondamentali. Si prevede quindi la collaborazione del docente di lingua inglese nella traduzione, esposizione orale e per la creazione di un syllabus. L'eccentricità del matematico O.Byrne che ha scelto queste colorate figure per interpretare definizioni e teoremi ha data spunto ad un approfondimento di storia dell'arte e disegno tecnico da trattare e approfondire eventualmente con la collaborazione del docente di storia dell'arte. L'unità didattica è prevista per una classe di primo liceo e può essere ripresa anche in secondo.

- La parte iniziale del laboratorio è centrata sulle prime pagine dell'opera che delineano il "metodo" euclideo. Questi documenti possono trovare collocazione didattica come introduzione ad un percorso sulla geometria oppure servire quale ripresa di alcuni aspetti della parte iniziale per rinforzare il formalismo delle dimostrazioni. L'analisi del documento e dell'elenco di "definizioni", "postulati" e "assiomi", servirà a sottolineare la necessità di avere un bagaglio di informazioni necessarie per produrre una dimostrazione.
- Nel secondo laboratorio si analizza la prima proposizione del libro e si fa ragionare gli studenti sui passaggi dimostrativi e sulla loro veridicità. In questo contesto sarà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, mostrando come, a partire dagli Elementi di Euclide, essi abbiano permeato lo sviluppo della matematica occidentale.
- Il quarto laboratorio parte dall'analisi di un teorema importante e dalle sue varie dimostrazioni. Questo teorema viene fuori dalla pagina! La geometria euclidea incontra P.Mondrian, si approfondisce l'aspetto legato all'arte espressa nelle figure geometriche del testo e di come abbiano anticipato il pittore olandese. Questi disegni hanno ispirato anche i lavori di un illustratore specializzato in paper-engineering, Helen Friel che ha realizzato una serie di sculture chiamate "Here'sLookingatEuclid" reinventando i diagrammi colorati di Byrne in tre dimensioni, come se venissero fuori dalla pagina. Si costruisce il 3D dell'immagine del teorema e si formulano alcuni quesiti algebrici.
- Il terzo e quinto laboratorio ~~–~~sono legati al percorso di geometria svolto durante il primo biennio e possono essere collocati o per introdurre i concetti da studiare oppure per approfondirli con spirito critico~~.~~ Gli studenti saranno chiamati a riconoscere i teoremi e le proposizioni, tradurre e confrontare ipotesi, tesi e dimostrazioni.
- L'ultimo lavoro sarà una breve introduzione all'esistenza delle geometrie non euclidee, la lettura critica di due testi avvicinerà i ragazzi ad un nuovo concetto di geometria che potranno poi approfondire in seguito.

Piano di lavoro: (le schede di lavoro saranno svolte in gruppo da 2 o 3 o 4 studenti)

- Lezione introduttiva storica su Euclide e sugli "Elementi" (1 ora).
- Laboratorio 1: Elementi di Euclide – Definizioni, assiomi e postulati. Scheda di lavoro 1 (2 ore).
- Laboratorio 2: Libro I – Euclide – Prima proposizione. Scheda di lavoro 2 (2 ore).
- Laboratorio 3: Libro I - Triangoli – congruenza – teoremi. (3 ore).
- Laboratorio 4: Il teorema viene fuori dalla pagina - La geometria euclidea incontra Mondrian.(3 ore).
- Laboratorio 5: Libro III - La circonferenza e i poligoni. (4 ore).
- Laboratorio 6: Fare matematica con i documenti storici - Geometrie non euclidee. Scheda di lavoro 6 (1 ora).

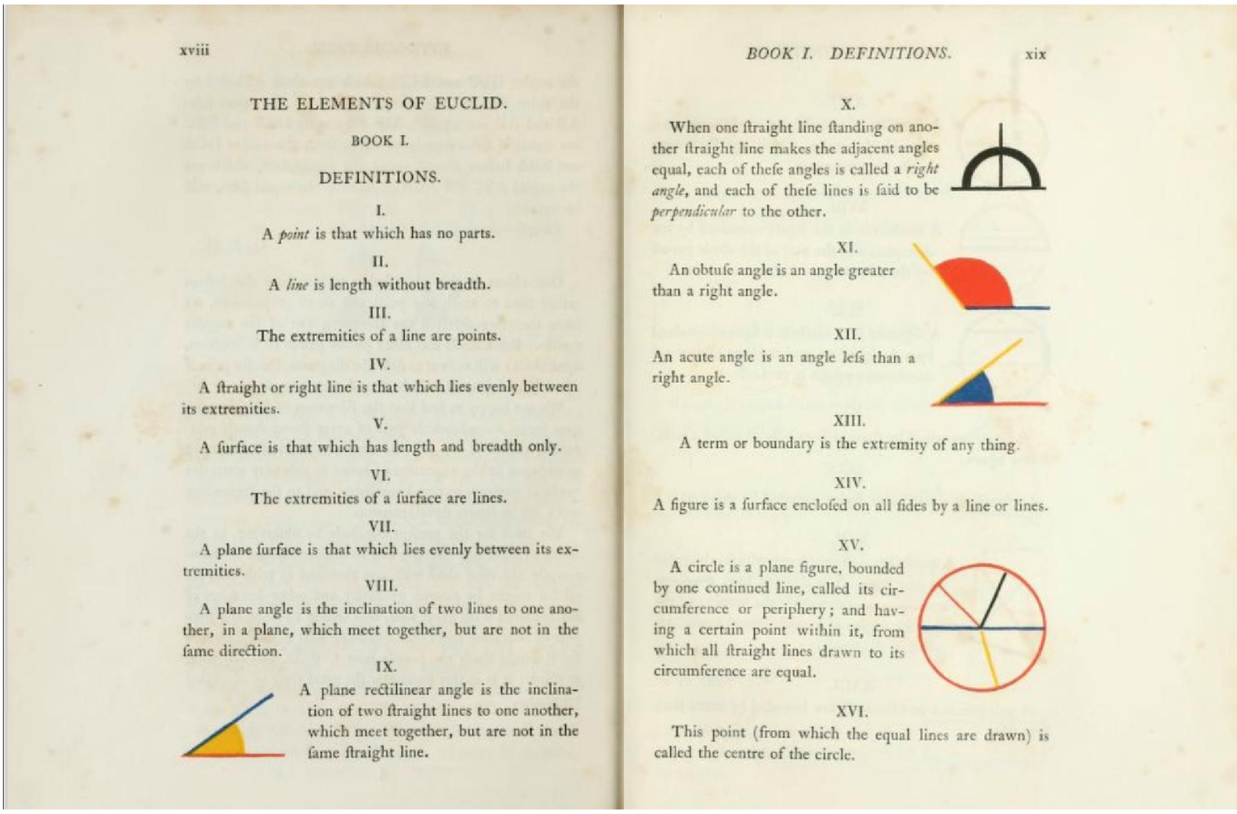


Scheda di lavoro 1:
Elementi di Euclide – Definizioni, assiomi e postulati

Nella prima parte degli Elementi sono spiegati i Termini; seguono i Postulati (proposizioni non dimostrate, di argomento specificamente geometrico) e le Nozioni co-muni (proposizioni di carattere generale).

ES 1: Analizziamo la prima parte del libro 1 degli Elementi di Euclide.

1.1 Leggi e traduci il testo di O. Byrne "I primi sei libri degli Elementi di Euclide":



xviii

THE ELEMENTS OF EUCLID.

BOOK I.

DEFINITIONS.

I.
A *point* is that which has no parts.

II.
A *line* is length without breadth.

III.
The extremities of a line are points.

IV.
A ſtraight or right line is that which lies evenly between its extremities.

V.
A ſurface is that which has length and breadth only.

VI.
The extremities of a ſurface are lines.

VII.
A plane ſurface is that which lies evenly between its extremities.

VIII.
A plane angle is the inclination of two lines to one another, in a plane, which meet together, but are not in the ſame direction.

IX.
A plane rectilinear angle is the inclination of two ſtraight lines to one another, which meet together, but are not in the ſame ſtraight line.

BOOK I. DEFINITIONS. xix

X.
When one ſtraight line ſtanding on another ſtraight line makes the adjacent angles equal, each of theſe angles is called a *right angle*, and each of theſe lines is ſaid to be *perpendicular* to the other.

XI.
An obtuſe angle is an angle greater than a right angle.

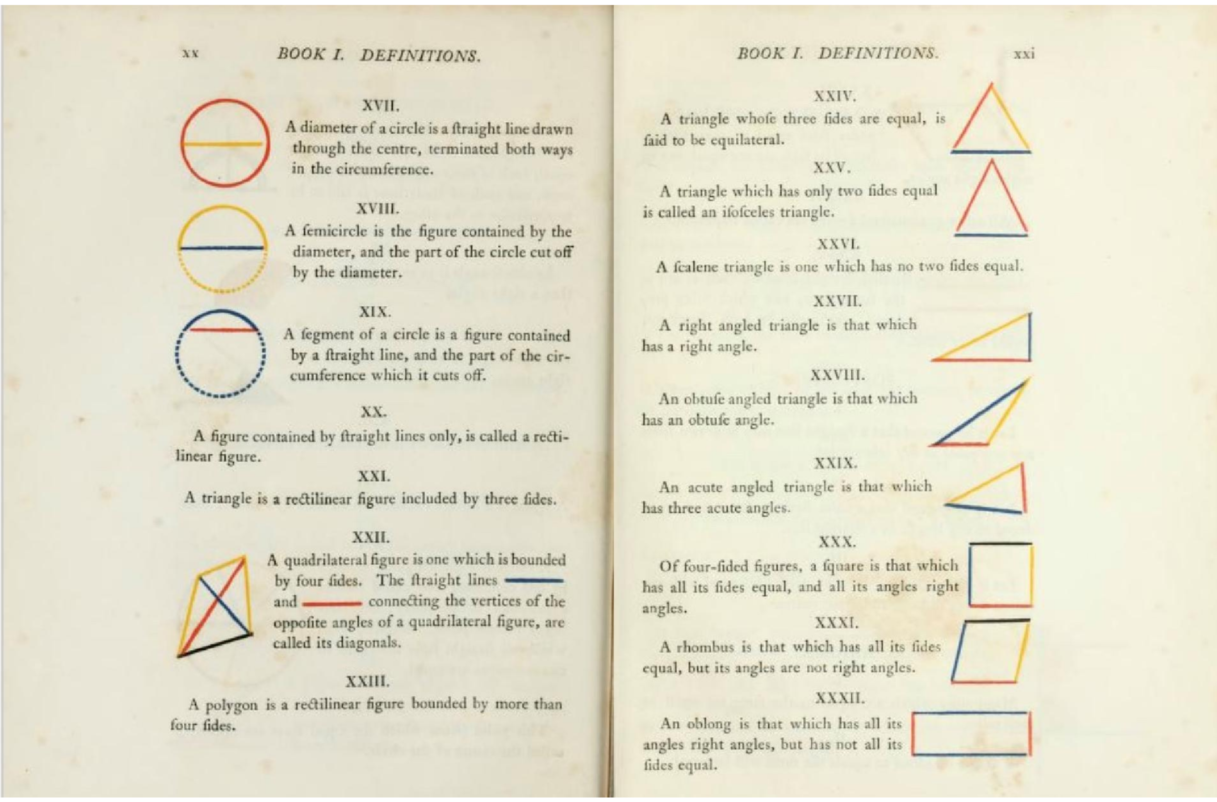
XII.
An acute angle is an angle leſs than a right angle.

XIII.
A term or boundary is the extremity of any thing.

XIV.
A figure is a ſurface encloſed on all ſides by a line or lines.

XV.
A circle is a plane figure, bounded by one continued line, called its circumference or periphery; and having a certain point within it, from which all ſtraight lines drawn to its circumference are equal.

XVI.
This point (from which the equal lines are drawn) is called the centre of the circle.



xx BOOK I. DEFINITIONS.

XVII.
A diameter of a circle is a ſtraight line drawn through the centre, terminated both ways in the circumference.

XVIII.
A ſemicircle is the figure contained by the diameter, and the part of the circle cut off by the diameter.

XIX.
A ſegment of a circle is a figure contained by a ſtraight line, and the part of the circumference which it cuts off.

XX.
A figure contained by ſtraight lines only, is called a rectilinear figure.

XXI.
A triangle is a rectilinear figure included by three ſides.

XXII.
A quadrilateral figure is one which is bounded by four ſides. The ſtraight lines ——— and ——— connecting the vertices of the oppoſite angles of a quadrilateral figure, are called its diagonals.

XXIII.
A polygon is a rectilinear figure bounded by more than four ſides.

BOOK I. DEFINITIONS. xxi

XXIV.
A triangle whoſe three ſides are equal, is ſaid to be equilateral.

XXV.
A triangle which has only two ſides equal is called an iſoſceles triangle.

XXVI.
A ſcalene triangle is one which has no two ſides equal.

XXVII.
A right angled triangle is that which has a right angle.

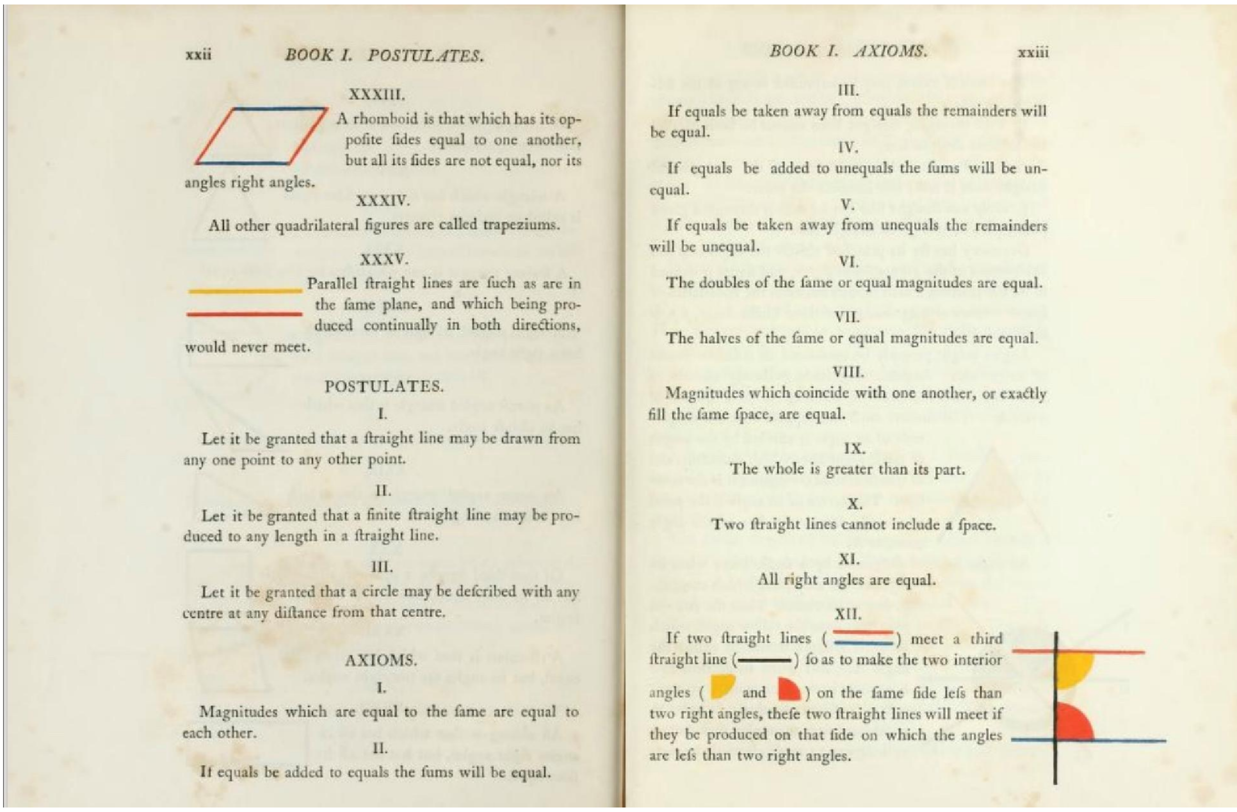
XXVIII.
An obtuſe angled triangle is that which has an obtuſe angle.

XXIX.
An acute angled triangle is that which has three acute angles.

XXX.
Of four-ſided figures, a ſquare is that which has all its ſides equal, and all its angles right angles.

XXXI.
A rhombus is that which has all its ſides equal, but its angles are not right angles.

XXXII.
An oblong is that which has all its angles right angles, but has not all its ſides equal.



xxii BOOK I. POSTULATES.

XXXIII.

A rhomboid is that which has its oppoſite ſides equal to one another, but all its ſides are not equal, nor its angles right angles.

XXXIV.

All other quadrilateral figures are called trapeziums.

XXXV.

Parallel ſtraight lines are ſuch as are in the ſame plane, and which being produced continually in both directions, would never meet.

POSTULATES.

I.

Let it be granted that a ſtraight line may be drawn from any one point to any other point.

II.

Let it be granted that a finite ſtraight line may be produced to any length in a ſtraight line.

III.

Let it be granted that a circle may be deſcribed with any centre at any diſtance from that centre.

AXIOMS.

I.

Magnitudes which are equal to the ſame are equal to each other.

II.

If equals be added to equals the ſums will be equal.

BOOK I. AXIOMS. xxiii

III.

If equals be taken away from equals the remainders will be equal.

IV.

If equals be added to unequals the ſums will be unequal.

V.

If equals be taken away from unequals the remainders will be unequal.

VI.

The doubles of the ſame or equal magnitudes are equal.

VII.

The halves of the ſame or equal magnitudes are equal.

VIII.

Magnitudes which coincide with one another, or exactly fill the ſame ſpace, are equal.

IX.

The whole is greater than its part.

X.

Two ſtraight lines cannot include a ſpace.

XI.

All right angles are equal.

XII.

If two ſtraight lines ( ) meet a third ſtraight line ( ) ſo as to make the two interior angles (and) on the ſame ſide leſs than two right angles, theſe two ſtraight lines will meet if they be produced on that ſide on which the angles are leſs than two right angles.

Definizioni:

I……………………………………………………………………………………………...

II…………………………………………………………………………………………...

III…………………………………………………………………………………………...

IV…………………………………………………………………………………………...

V…………………………………………………………………………………………...

VI…………………………………………………………………………………………...

VII…………………………………………………………………………………………...

VIII…………………………………………………………………………………………...

IX…………………………………………………………………………………………...

X…………………………………………………………………………………………...

XI…………………………………………………………………………………………...

XII…………………………………………………………………………………………...

XIII…………………………………………………………………………………………...

XIV…………………………………………………………………………………………...

XV…………………………………………………………………………………………...

XVI…………………………………………………………………………………………...

XVII…………………………………………………………………………………………...

XVIII…………………………………………………………………………………………...

XIX………………………………………………………………………………………………...

XX………………………………………………………………………………………………...

XXI………………………………………………………………………………………………...

XXII………………………………………………………………………………………………...

XXIII………………………………………………………………………………………………...

XXIV………………………………………………………………………………………………...

XXV………………………………………………………………………………………………...

XXVI………………………………………………………………………………………………...

XXVII………………………………………………………………………………………………...

XXVIII………………………………………………………………………………………………...

XXIX………………………………………………………………………………………………...

XXX………………………………………………………………………………………………...

XXXI………………………………………………………………………………………………...

XXXII………………………………………………………………………………………………...

XXXIII………………………………………………………………………………………………...

XXXIV………………………………………………………………………………………………...

XXXV………………………………………………………………………………………………...

Postulati:

I………………………………………………………………………………………………...

II………………………………………………………………………………………………...

III………………………………………………………………………………………………...

Assiomi:

I………………………………………………………………………………………………...

II………………………………………………………………………………………………...

III………………………………………………………………………………………………...

IV………………………………………………………………………………………………...

V………………………………………………………………………………………………...

VI………………………………………………………………………………………………...

VII………………………………………………………………………………………………...

VIII………………………………………………………………………………………………...

IX………………………………………………………………………………………………...

X………………………………………………………………………………………………...

XI………………………………………………………………………………………………...

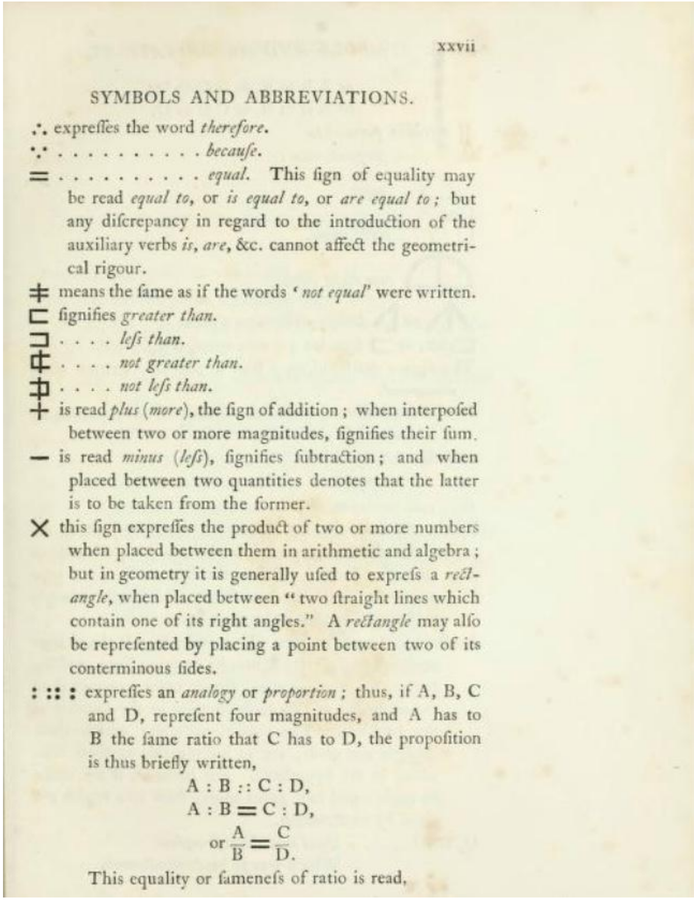
XII………………………………………………………………………………………………...

XIII………………………………………………………………………………………………...

Osservazione: in tutto il libro di Euclide saranno richiamate le definizioni, gli assiomi e i postulati seguendo la numerazione assegnata. (ad esempio def. 7 sarà la definizione 7 precedentemente tradotta)

1.2 Che differenza c'è tra definizione, assioma e postulato?

1.3 Leggi i simboli e le notazioni utilizzate in tutto il testo e durante gli esercizi ricorda di utilizzarli.



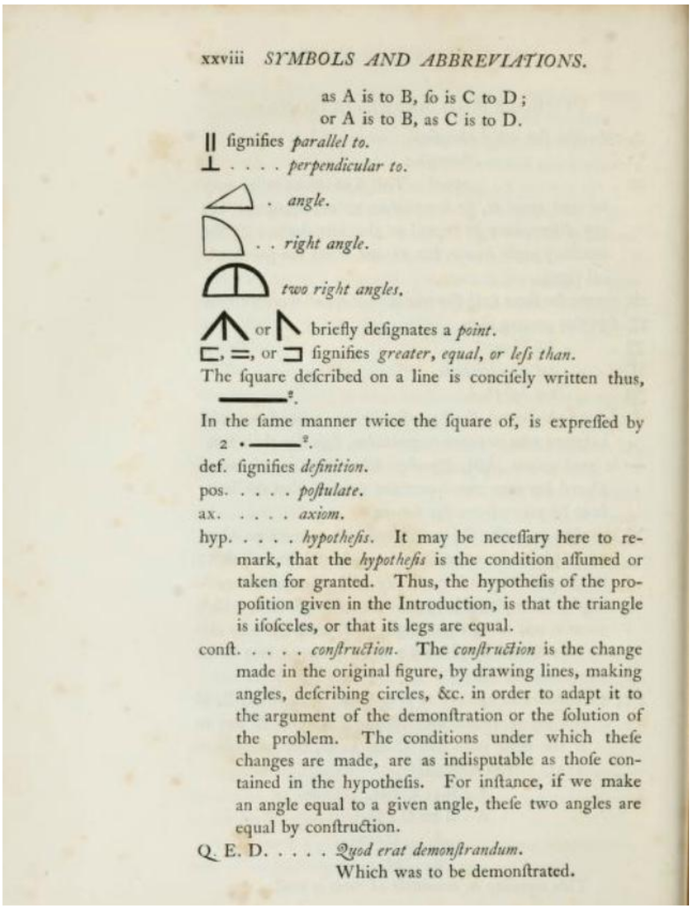
xxvii

SYMBOLS AND ABBREVIATIONS.

∴ expreſſes the word *therefore*.
∵ . . . . *becauſe*.
= . . . . *equal*. This ſign of equality may be read *equal to*, or *is equal to*, or *are equal to*; but any diſcrepancy in regard to the introduction of the auxiliary verbs *is*, *are*, &c. cannot affect the geometrical rigour.
≠ means the ſame as if the words '*not equal*' were written.
⊏ ſignifies *greater than*.
⊐ . . . . *leſs than*.
. . . . *not greater than*.
. . . . *not leſs than*.
+ is read *plus* (*more*), the ſign of addition; when interpoſed between two or more magnitudes, ſignifies their ſum.
− is read *minus* (*leſs*), ſignifies ſubtraction; and when placed between two quantities denotes that the latter is to be taken from the former.
× this ſign expreſſes the product of two or more numbers when placed between them in arithmetic and algebra; but in geometry it is generally uſed to expreſs a *rectangle*, when placed between "two ſtraight lines which contain one of its right angles." A *rectangle* may alſo be repreſented by placing a point between two of its conterminous ſides.
: :: : expreſſes an *analogy* or *proportion*; thus, if A, B, C and D, repreſent four magnitudes, and A has to B the ſame ratio that C has to D, the propoſition is thus briefly written,

$$A : B :: C : D,$$
$$A : B = C : D,$$
$$\text{or } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

This equality or ſameneſs of ratio is read,



xxviii *SYMBOLS AND ABBREVIATIONS.*

as A is to B, ſo is C to D;
or A is to B, as C is to D.

|| ſignifies *parallel to*.
⊥ . . . . *perpendicular to*.
. *angle*.
. . *right angle*.
two right angles.
or briefly deſignates a *point*.
⊏, =, or ⊐ ſignifies *greater, equal, or leſs than*.
The ſquare deſcribed on a line is conciſely written thus, $\overline{\quad\quad}^2$.
In the ſame manner twice the ſquare of, is expreſſed by $2 \cdot \overline{\quad\quad}^2$.
def. ſignifies *definition*.
pos. . . . . *poſtulate*.
ax. . . . . *axiom*.
hyp. . . . . *hypotheſis*. It may be neceſſary here to remark, that the *hypotheſis* is the condition aſſumed or taken for granted. Thus, the hypotheſis of the propoſition given in the Introduction, is that the triangle is iſoſceles, or that its legs are equal.
conſt. . . . . *conſtruction*. The *conſtruction* is the change made in the original figure, by drawing lines, making angles, deſcribing circles, &c. in order to adapt it to the argument of the demonſtration or the ſolution of the problem. The conditions under which theſe changes are made, are as indiſputable as thoſe contained in the hypotheſis. For inſtance, if we make an angle equal to a given angle, theſe two angles are equal by conſtruction.
Q. E. D. . . . . *Quod erat demonſtrandum*.
Which was to be demonſtrated.

ES 2: Per interpretare il documento
2.1 Ricerca le risposte corrette nel documento tratto dagli Elementi di Euclide.

1. "L'estremo di qualche cosa" è detto:
   - punto;
   - estremo di una superficie;termine;
   - linea.

2. Romboide è una figura quadrilatera che:
   - è equilatera;

- è equilatera e rettangola;
- ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro;
- ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola.

3. Si ammetta di poter:
   - con ogni centro e con ogni distanza descrivere un circolo;
   - con ogni distanza descrivere un circolo;
   - con ogni centro descrivere un circolo;
   - sempre descrivere un circolo.

4. Se da cose eguali si tolgono cose eguali:
   - sono eguali;
   - i resti sono eguali;
   - i tutti e i resti sono eguali;
   - le cose eguali, i tutti e i resti sono eguali.

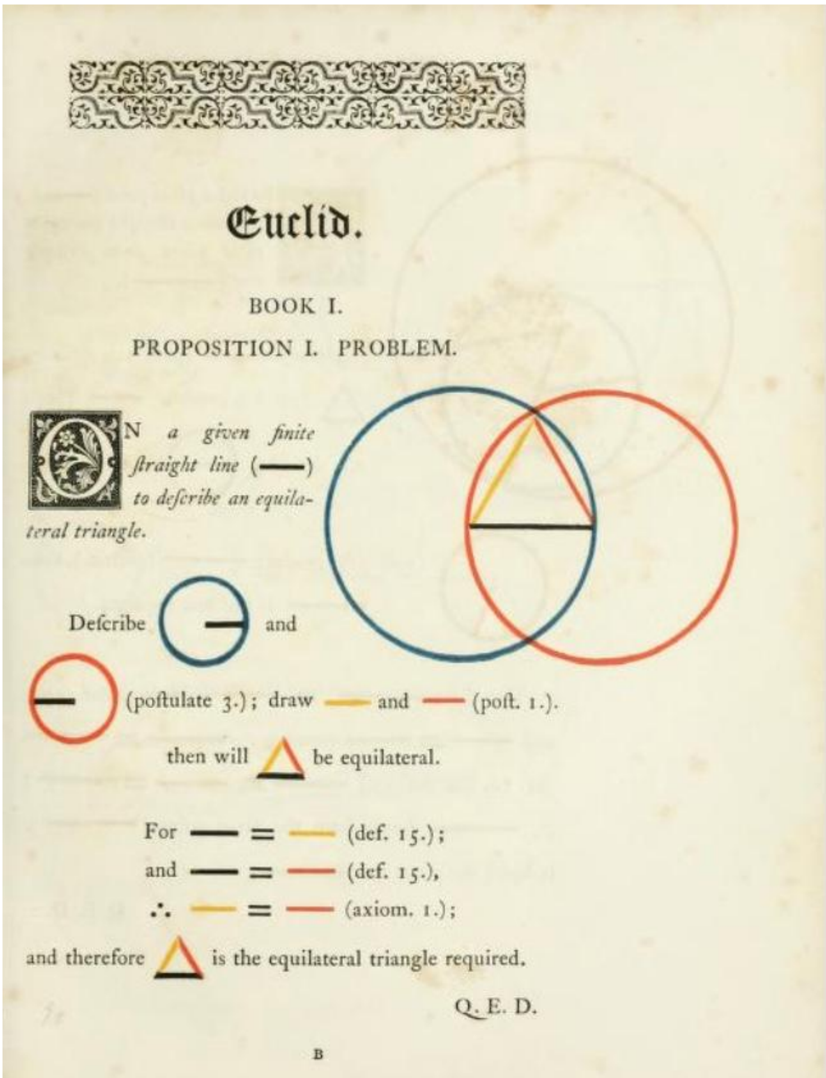
2.2 Rivedi il termine oblungo: a quale figura, indicata con una termine attuale, corrisponde?

2.3 Rivedi la definizione di trapezio studiata nel tuo libro di geometria e confrontala con quanto trovi nel documento. Cosa è cambiato?

2.4 Traccia almeno tre figure che 'diano l'idea' di essere *trapezii* nel senso indicato da Euclide (fai in modo che i tre esempi abbiano il minor numero di proprietà comuni che ti è possibile). Disegna poi tre figure che siano trapezi nel senso studiato a scuola. Si trovano degli esempi che non siano comuni necessariamente ad entrambi?

Scheda di lavoro 2

Libro I – Euclide – Prima proposizione



Ecco, riportati in modo schematico, alcuni passaggi della dimostrazione della Proposizione 1. del Libro Primo, completa tu le indicazioni, ricavandole dal documento in inglese. Considera che A e B sono rispettivamente gli estremi del segmento in nero, il terzo vertice del triangolo è Γ, Δ generico altro punto della circonferenza in blu, E generico punto della circonferenza in rosso.

1. Tracciare il primo cerchio.(come?)

2. Tracciare il secondo cerchio. (come?)

3. Tracciare le rette (segmenti, in che modo?)

4. La AΓ è eguale alla AB poiché

5. La BΓ è eguale alla BA poiché

6. ΓA, AB, BΓ sono eguali tra loro poiché

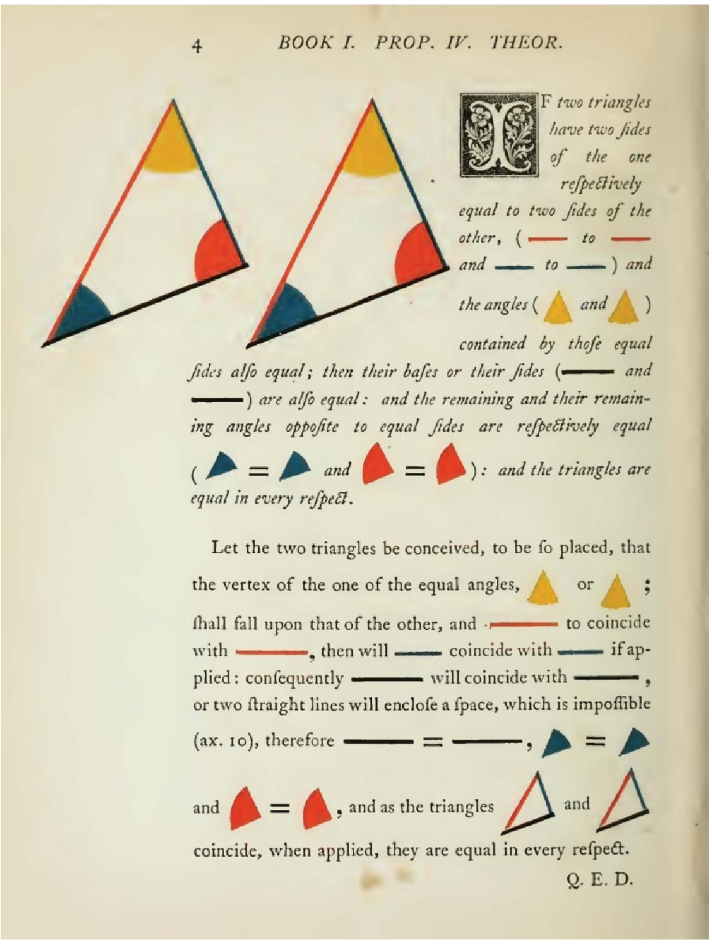
7. Il triangolo ABΓ ....

   Leibniz scoprì che la dimostrazione del primo teorema degli Elementi contiene una lacuna: prova a rivederla e a scoprire quale potrebbe essere questa lacuna (...in effetti nessun postulato assicura che i due cerchi si incontrino."Il tutto è maggiore della parte").

Scheda di lavoro 3

Libro I Elementi – triangoli, congruenze e teoremi.

ES 1: La geometria euclidea tra i libri di scuola e negli Elementi di Euclide.

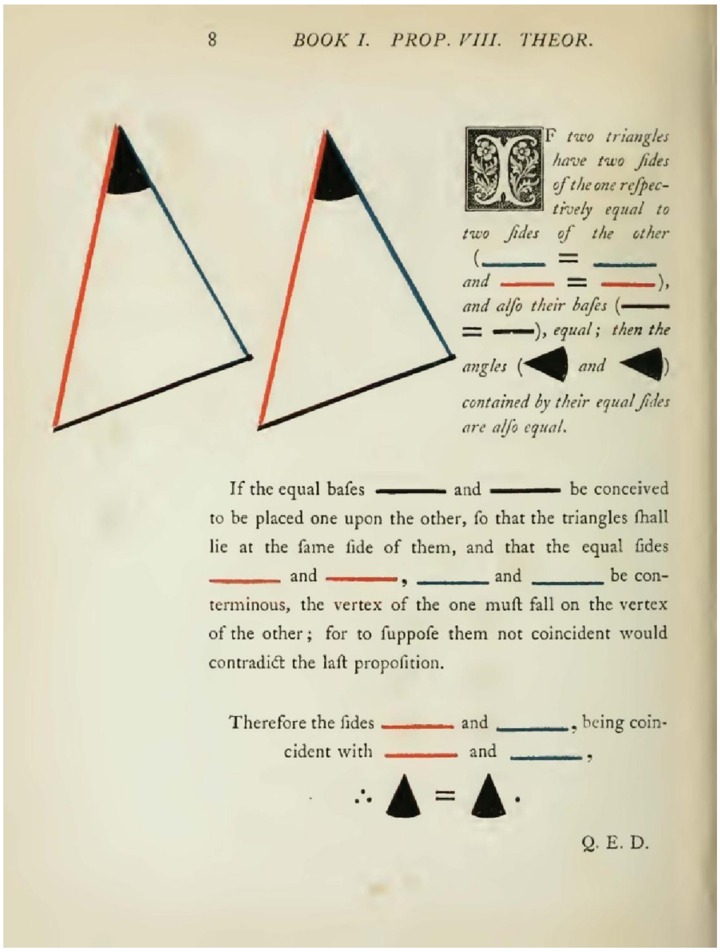


4 BOOK I. PROP. IV. THEOR.

If two triangles have two ſides of the one reſpectively equal to two ſides of the other, (—— to ——) and —— to ——) and the angles (and) contained by thoſe equal ſides alſo equal; then their baſes or their ſides (—— and ——) are alſo equal: and the remaining and their remaining angles oppoſite to equal ſides are reſpectively equal (= and =): and the triangles are equal in every reſpect.

Let the two triangles be conceived, to be ſo placed, that the vertex of the one of the equal angles, or ; ſhall fall upon that of the other, and —— to coincide with ——, then will —— coincide with —— if applied: conſequently —— will coincide with ——, or two ſtraight lines will encloſe a ſpace, which is impoſſible (ax. 10), therefore —— = ——, = and = , and as the triangles and coincide, when applied, they are equal in every reſpect.

Q. E. D.



8 BOOK I. PROP. VIII. THEOR.

If two triangles have two ſides of the one reſpectively equal to two ſides of the other (—— = —— and —— = ——), and alſo their baſes (—— = ——), equal; then the angles (and) contained by their equal ſides are alſo equal.

If the equal baſes —— and —— be conceived to be placed one upon the other, ſo that the triangles ſhall lie at the ſame ſide of them, and that the equal ſides —— and ——, —— and —— be conterminous, the vertex of the one muſt fall on the vertex of the other; for to ſuppoſe them not coincident would contradict the laſt propoſition.

Therefore the ſides —— and ——, being coincident with —— and ——,

$\therefore$ = .

Q. E. D.

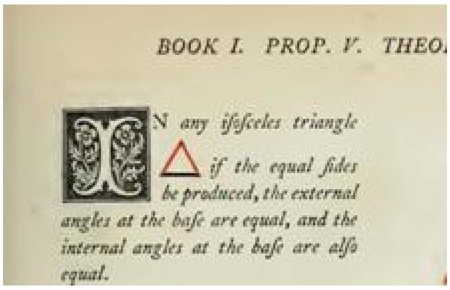
1.1 Leggi e comprendi le proposizioni. Di che argomento si tratta?

Traduci gli enunciati, tesi e ipotesi di entrambi.

1.2 Viene utilizzata la parola congruenza?

1.3 Confronta con quello che hai studiato a lezione. Come cambiano le tesi e le ipotesi? Enuncia i criteri di congruenza.

1.4 Traduci l’enunciato del seguente teorema e individua tesi e ipotesi:

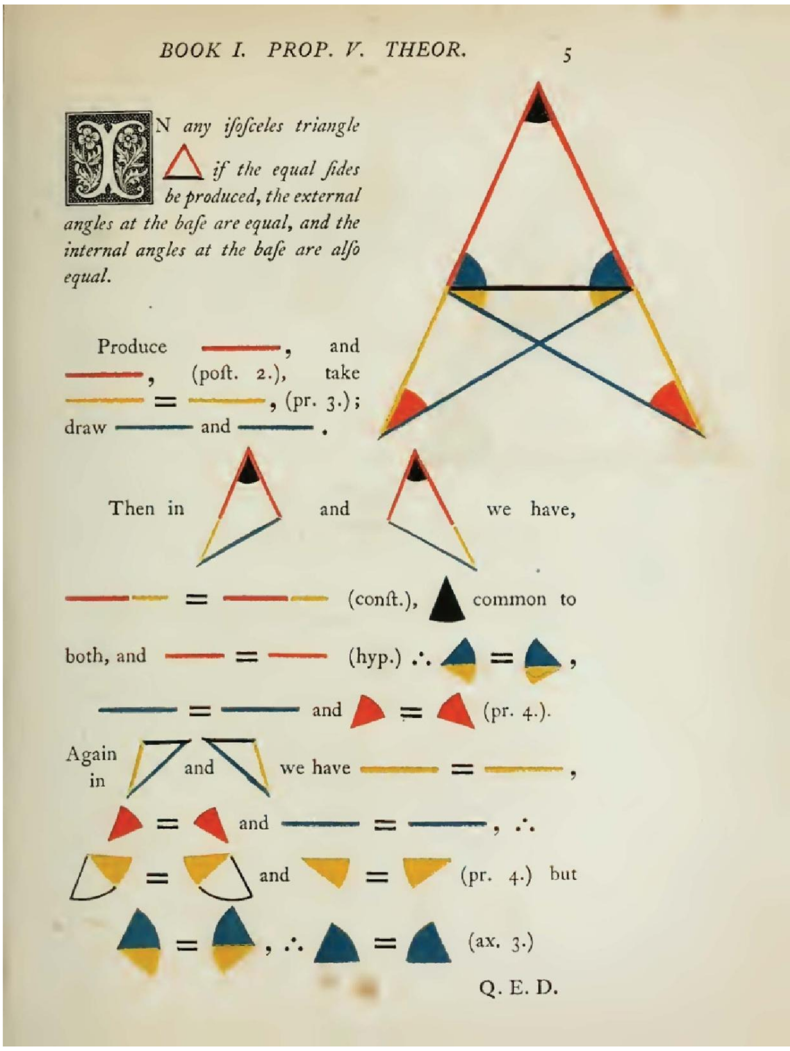


BOOK I. PROP. V. THEO

IN any iſoſceles triangle △ if the equal ſides be produced, the external angles at the baſe are equal, and the internal angles at the baſe are alſo equal.

1.5 Prova a dimostrare il teorema precedente.

1.6 Confronta la dimostrazione con quella del libro riportata in basso.



BOOK I. PROP. V. THEOR. 5

IN any iſoſceles triangle if the equal ſides be produced, the external angles at the baſe are equal, and the internal angles at the baſe are alſo equal.

Produce , and , (poſt. 2.), take = , (pr. 3.); draw and .

Then in and we have,

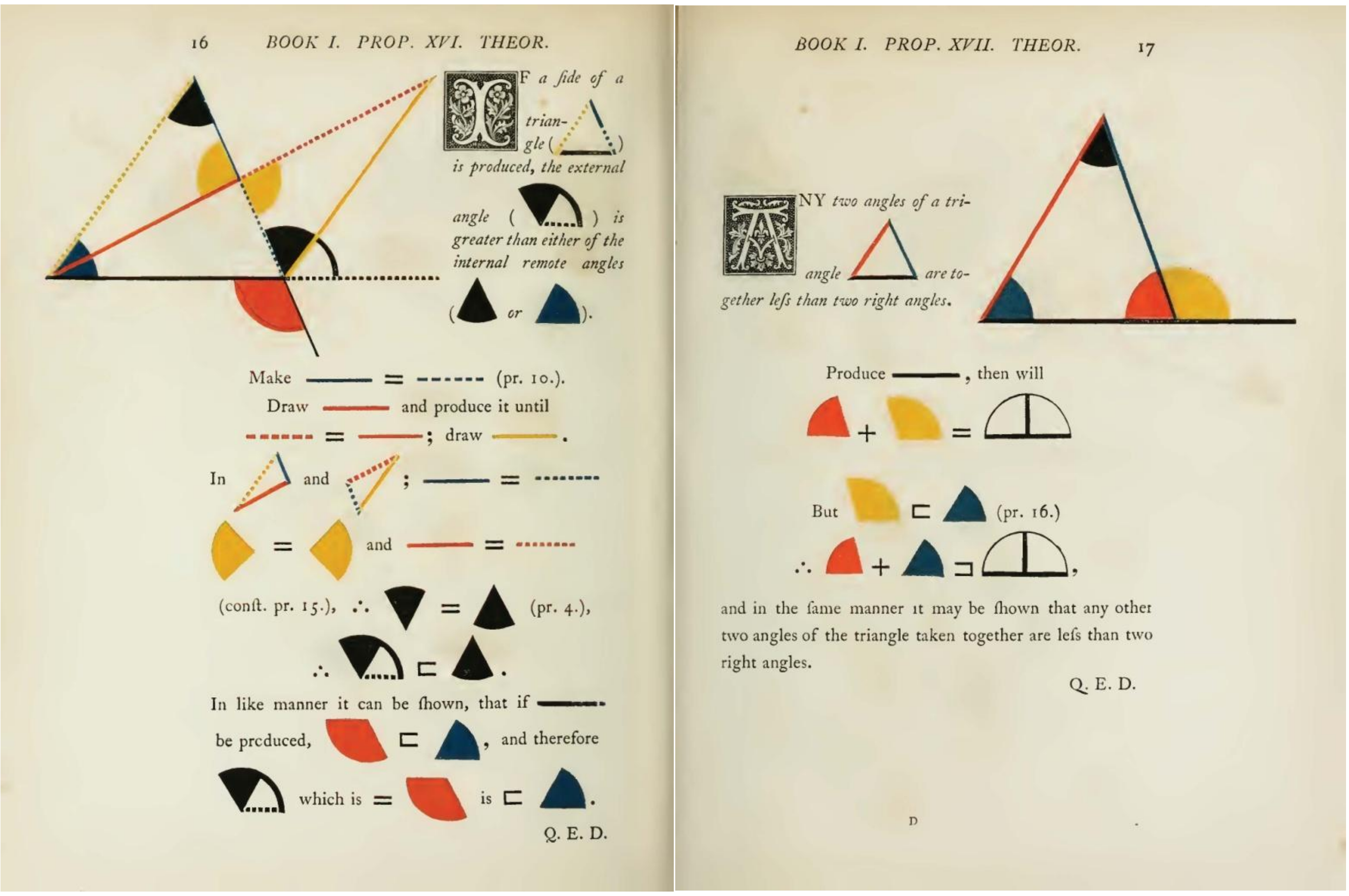
= (conſt.), common to both, and = (hyp.) ∴ = , = and = (pr. 4.).

Again in and we have = , = and = , ∴ = and = (pr. 4.) but = , ∴ = (ax. 3.)

Q. E. D.

1.7 Quali differenze ci sono con il teorema del triangolo isoscele inverso e diretto studiato? Motiva ricordando i due enunciati.

ES 2: Individua i teoremi:


16 BOOK I. PROP. XVI. THEOR.

IF a side of a triangle ( ) is produced, the external angle ( ) is greater than either of the internal remote angles (or).

Make = (pr. 10.).
Draw and produce it until = ; draw .

In and ; = = and = (const. pr. 15.), ∴ = (pr. 4.), ∴ ⊏ .

In like manner it can be shown, that if be produced, ⊏ , and therefore which is = is ⊏ .

Q. E. D.

BOOK I. PROP. XVII. THEOR. 17

ANY two angles of a triangle are together less than two right angles.

Produce , then will + = .

But ⊏ (pr. 16.)
∴ + ⊐ ,

and in the same manner it may be shown that any other two angles of the triangle taken together are less than two right angles.

Q. E. D.

D

Riconosci i teoremi illustrati e traduci letteralmente le dimostrazioni.

Che teoremi rappresentano?

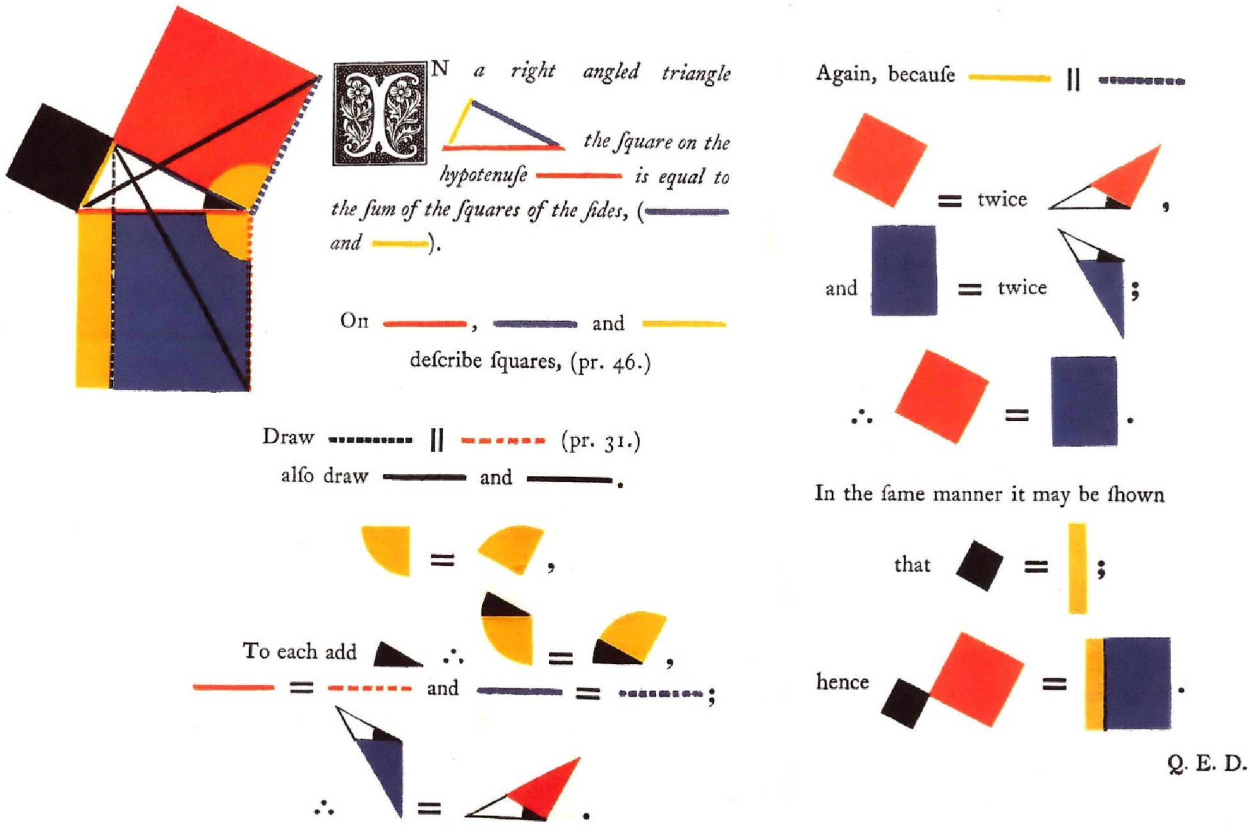
Le ipotesi di questi teoremi sono le stesse dei teoremi studiati?

Scheda di lavoro 4

Il teorema viene fuori dalla pagina - La geometria euclidea incontra Mondrian.

ES 1: Scopri il teorema

1.1.Leggi il teorema e individua di che teorema si tratta



……………………………………………………………………………………………………..

1.1 Prova a riportare la dimostrazione, aggiungi le lettere alla figura per esprimere più chiaramente la dimostrazione.

1.2 Conosci un'altra dimostrazione differente del teorema?

ES 2: La geometria euclidea incontra Mondrian.

Circa un secolo prima che Piet Mondrian portasse sulla tela le sue celebri figure geometriche rosse, gialle e blu, nel 1847 il matematico Oliver Byrne sfruttò questo schema cromatico per la sua edizione degli *Elementi* di Euclide.

Composizione con grande piano rosso, giallo, nero, grigio e blu del 1921

PietMondrian

Questi disegni hanno ispirato anche i lavori di un illustratore specializzato in specializzato in paper-engineering Helen Friel che ha realizzato una serie di sculture chiamate “Here’sLooking at Euclid” reinventando i diagrammi colorati di Byrne in tre dimensioni, come se venissero fuori dalla pagina.

2.1 Esegui una ricerca sulle tecniche del famoso pittore olandese Piet Montdrian.

2.1 Visiona il sito https://www.helenfriel.com/ e in particolare i lavori ispirati ad Euclide.

2.3Utilizzando il cartoncino colorato (colla forbici e pennarelli) ricrea la figura come riprodotto al lato. Scegli per la terza dimensione aggiunta una delle seguenti: la lunghezza di un cateto o la lunghezza dell’altezza del triangolorettandolo. NB. Riproduci 5 solidi, gli angoli puoi disegnarli sul cartoncino.

2.4 Scegli la profondità dei solidi pari al cateto minore del triangolo rettangolo e rispondi alle seguenti domande.

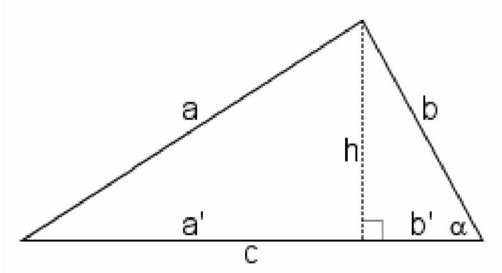
Solido 1 = parallelepipedo costruito sul cateto minore ROSSO

Solido 2= parallelepipedo costruito sul cateto maggiore NERO

Solido 3 = parallelepipedo costruito sull'ipotenusa BLU+GIALLO (unione dei due solidi)

Solido 4 = prisma con base il triangolo rettangolo BIANCO

- Esplicita i volumi di questi solidi utilizzando le notazioni al lato



$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$

$V_4 =$

- Che relazione c'è tra i volumi dei parallelogrammi e il volume del prisma V_4?

- Verifica se
  $V_3 = V_1 + V_2$ (*)

- Scegliendo come profondità del solido h cambiano le relazioni tra i volumi? Vale ancora la relazione (*)?

- Con una opportuna scelta della profondità dei solidi puoi trovare quanto valgono
  $a^3 =$
  $b^3 =$

- Sapresti calcolare la formula della somma di cubi e differenza di cubi utilizzando i volumi?

  $a^3 + b^3 =$

  $a^3 - b^3 =$

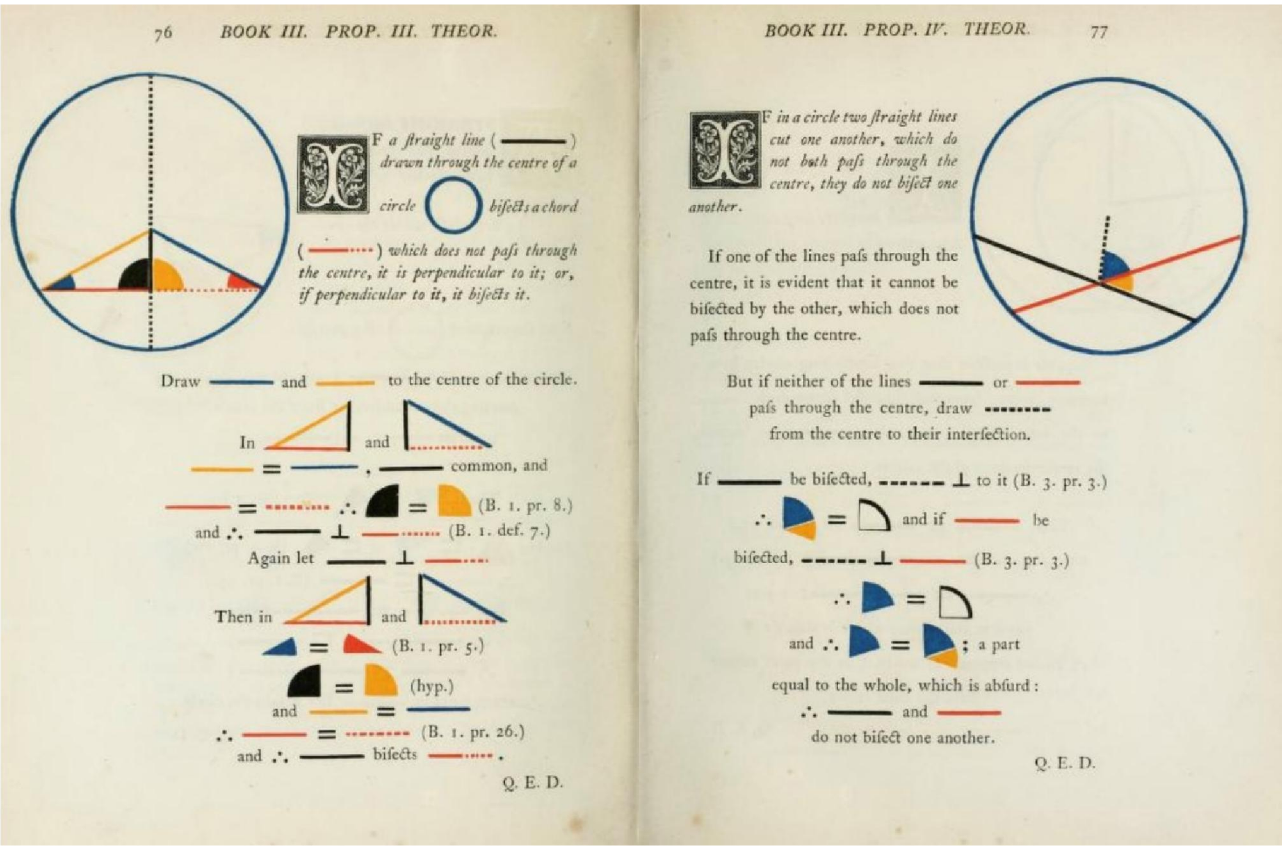
- Rifletti sulla dimostrazione appena svolta per il calcolo della differenza e la somma di cubi, le hai dimostrate per ogni valore di a e b? Pensa alla figura di partenza e a cosa verificano a e b.

Scheda di lavoro 5

Libro III – Circonferenza e poligoni

ES 1:RELAZIONI TRA CORDE E DIAMETRO E TRA CORDE E DISTANZA DAL CENTRO

Leggi i teoremi Prop. III e Prop. XIV, nomina i punti individuati per indicare gli angoli e i segmenti colorati, traduci poi i teoremi indicando anche ipotesi e tesi. (utilizza le lettere per indicare segmenti e angoli al posto dei disegni utilizzati da Euclide!)



76 BOOK III. PROP. III. THEOR.

If a straight line ( ) drawn through the centre of a circle bisects a chord ( ) which does not pass through the centre, it is perpendicular to it; or, if perpendicular to it, it bisects it.

Draw and to the centre of the circle.

In and

= , common, and

= ∴ = (B. 1. pr. 8.)

and ∴ ⊥ (B. 1. def. 7.)

Again let ⊥

Then in and

= (B. 1. pr. 5.)

= (hyp.)

and =

∴ = (B. 1. pr. 26.)

and ∴ bisects .

Q. E. D.

BOOK III. PROP. IV. THEOR. 77

If in a circle two straight lines cut one another, which do not both pass through the centre, they do not bisect one another.

If one of the lines pass through the centre, it is evident that it cannot be bisected by the other, which does not pass through the centre.

But if neither of the lines or pass through the centre, draw from the centre to their intersection.

If be bisected, ⊥ to it (B. 3. pr. 3.)

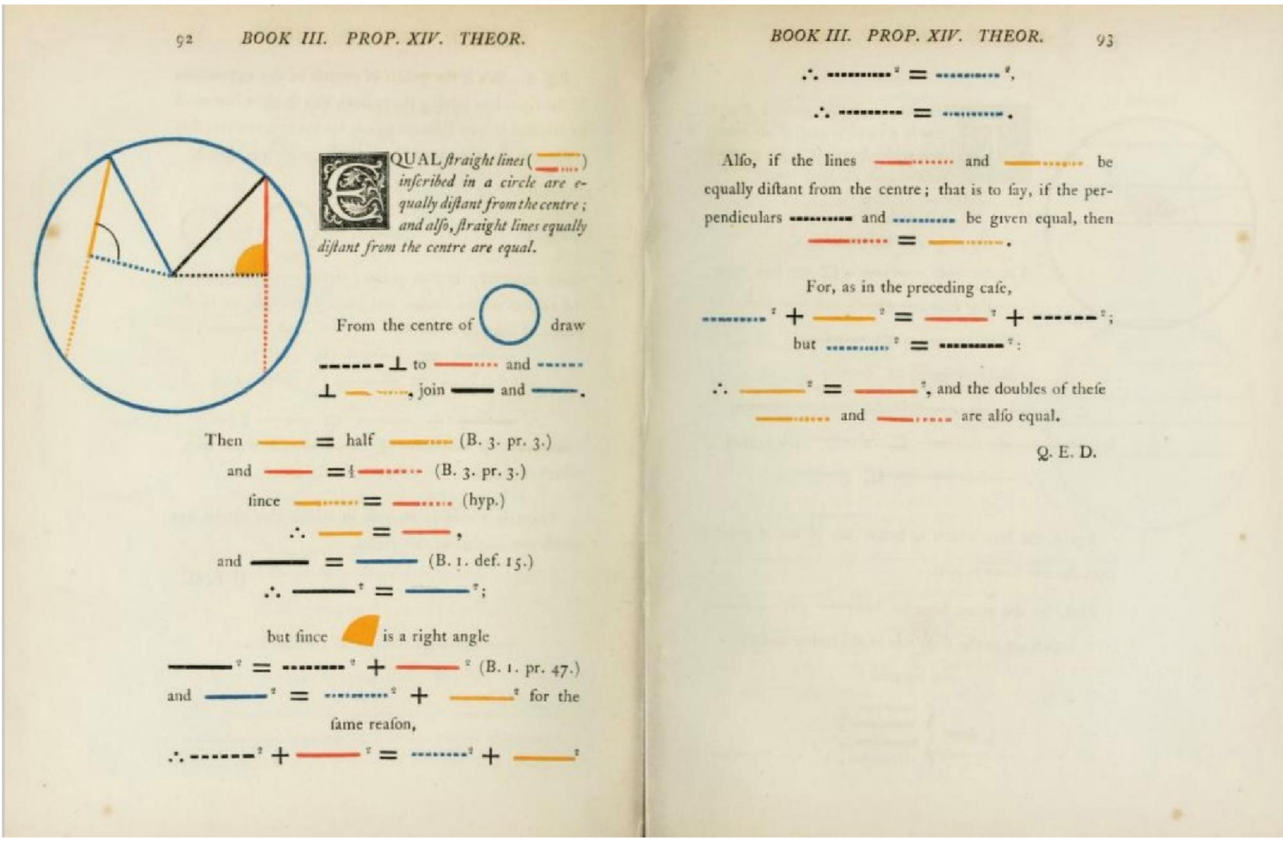
∴ = and if be bisected, ⊥ (B. 3. pr. 3.)

∴ =

and ∴ = ; a part equal to the whole, which is absurd :

∴ and do not bisect one another.

Q. E. D.



92 BOOK III. PROP. XIV. THEOR.

EQUAL *straight lines* ( ) *inscribed in a circle are equally distant from the centre; and also, straight lines equally distant from the centre are equal.*

From the centre of draw ⊥ to and ⊥ , join and .

Then = half (B. 3. pr. 3.)

and = ½ (B. 3. pr. 3.)

since = (hyp.)

∴ = ,

and = (B. 1. def. 15.)

∴ ² = ²;

but since is a right angle

² = ² + ² (B. 1. pr. 47.)

and ² = ² + ² for the same reason,

∴ ² + ² = ² + ²

BOOK III. PROP. XIV. THEOR. 93

∴ ² = ².

∴ = .

Also, if the lines and be equally distant from the centre; that is to say, if the perpendiculars and be given equal, then = .

For, as in the preceding case,

² + ² = ² + ²;

but ² = ²:

∴ ² = ², and the doubles of these and are also equal.

Q. E. D.

Prova a dedurre quali sono le proposizioni che richiama nella dimostrazione per far seguire la tesi.

Ad es: B. 3. Che Teorema importante rappresenta?

oppure B. 1. Che definizione richiama?

Riconosci un teorema studiato a lezione?

Cosa intende con il termine “biflects”?

Trovi delle differenze nelle ipotesi e nella dimostrazione? Confronta la formulazione di Euclide con quella studiata in classe.

ES 2: Guardando la figura che Teorema sta dimostrando Euclide nel terzo libro?

………
……………………………………………

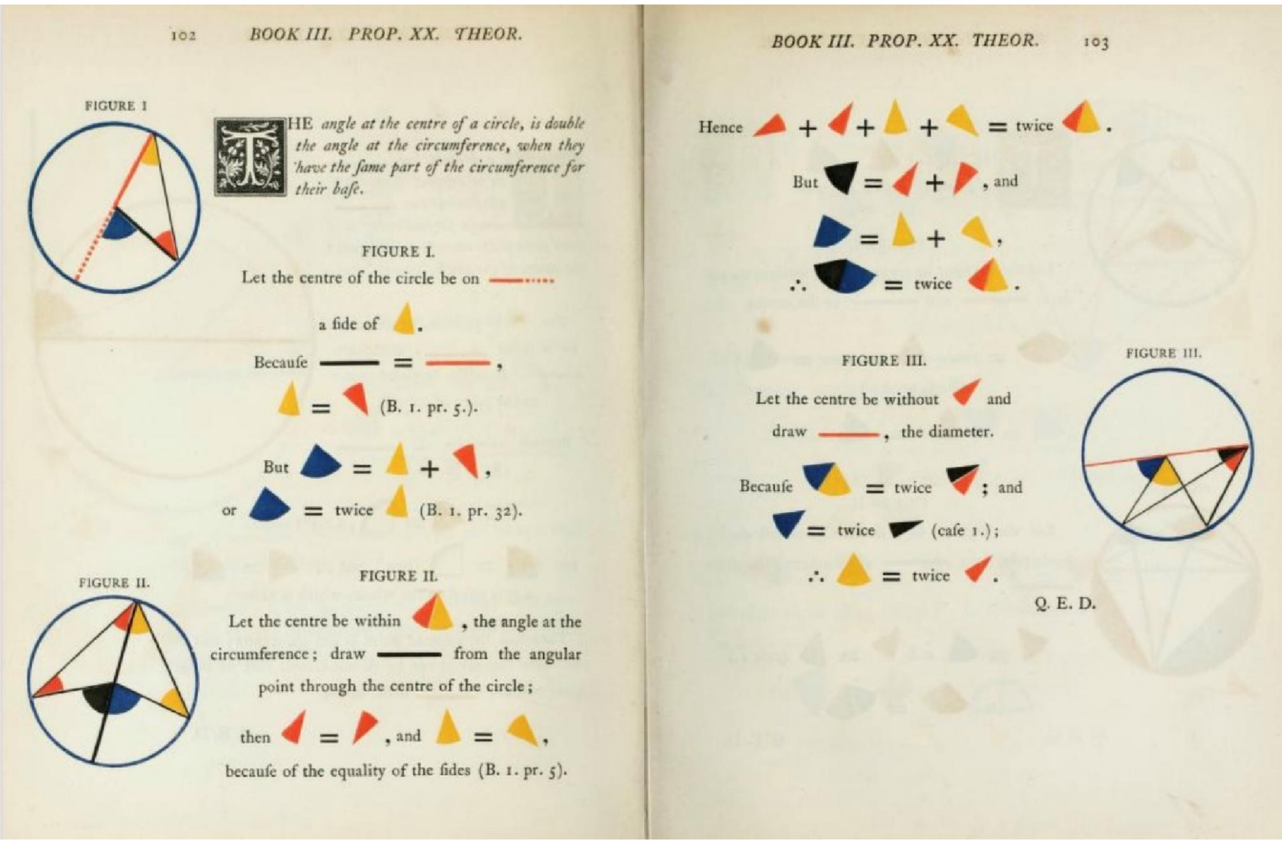

102 BOOK III. PROP. XX. THEOR.

FIGURE I

THE angle at the centre of a circle, is double the angle at the circumference, when they have the same part of the circumference for their base.

FIGURE I.

Let the centre of the circle be on a side of .

Because = ,

= (B. 1. pr. 5.).

But = + ,

or = twice (B. 1. pr. 32).

FIGURE II.

FIGURE II.

Let the centre be within , the angle at the circumference; draw from the angular point through the centre of the circle;

then = , and = ,

because of the equality of the sides (B. 1. pr. 5).

BOOK III. PROP. XX. THEOR. 103

Hence + + + = twice .

But = + , and

= + ,

∴ = twice .

FIGURE III.

FIGURE III.

Let the centre be without and draw , the diameter.

Because = twice ; and

= twice (case 1.);

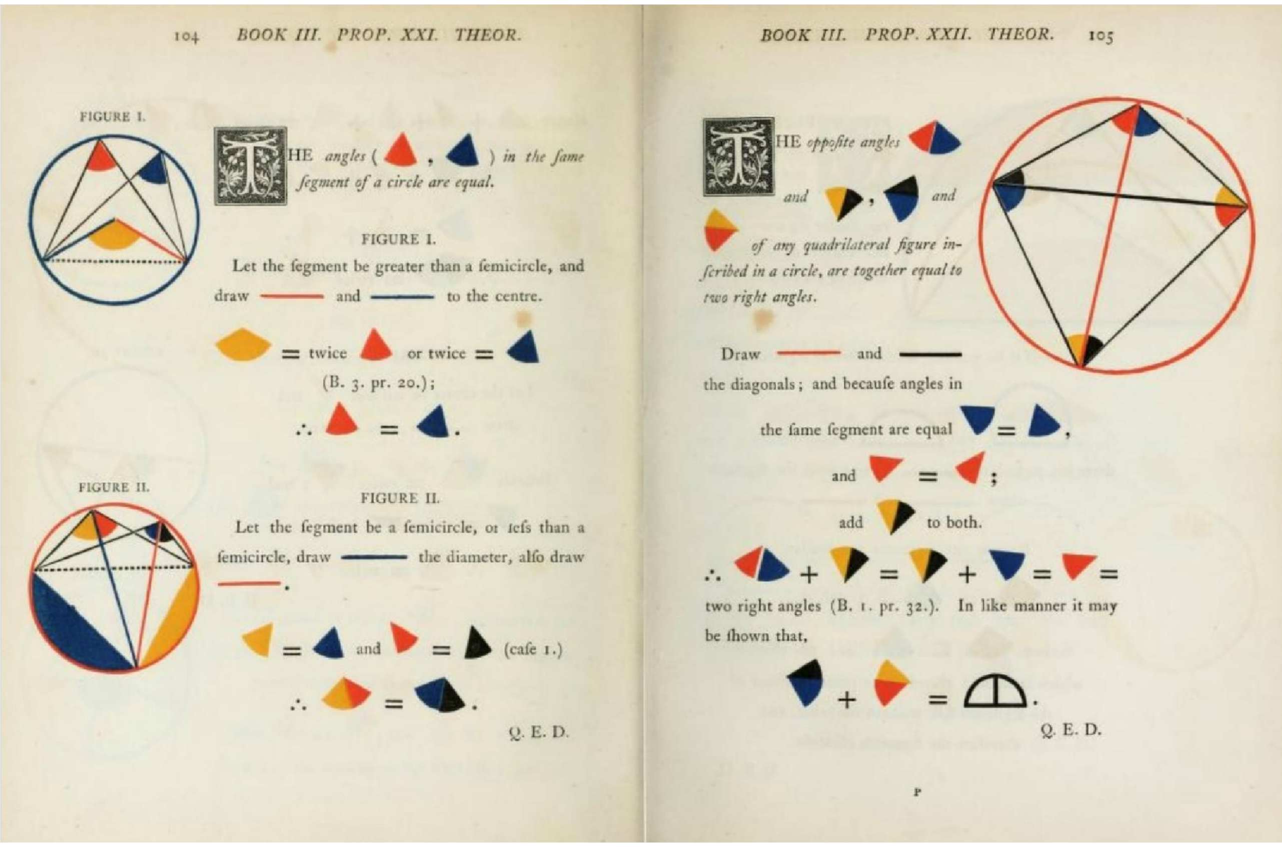
∴ = twice .

Q. E. D.

Dopo aver nominato i punti traduci il Teorema riportando in dettaglio ipotesi, tesi e dimostrazione. Cerca di individuare i teoremi richiamati per la dimostrazione.

Confronta poi la dimostrazione con quella svolta a lezione. Cosa osservi?

ES 4: Utilizzando gli angoli al centro e gli angoli alla circonferenza si può trovare una condizione da verificare per i quadrilateri inscritti in una circonferenza:



104 *BOOK III. PROP. XXI. THEOR.*

FIGURE I.

THE *angles* (,) *in the fame fegment of a circle are equal.*

FIGURE I.

Let the fegment be greater than a femicircle, and draw and to the centre.

= twice or twice =

(B. 3. pr. 20.);

∴ = .

FIGURE II.

FIGURE II.

Let the fegment be a femicircle, or lefs than a femicircle, draw the diameter, alfo draw .

= and = (cafe 1.)

∴ = .

Q. E. D.

BOOK III. PROP. XXII. THEOR. 105

THE *oppofite angles* *and* , *and* *of any quadrilateral figure infcribed in a circle, are together equal to two right angles.*

Draw and the diagonals; and becaufe angles in the fame fegment are equal = ,

and = ;

add to both.

∴ + = + = =

two right angles (B. 1. pr. 32.). In like manner it may be fhown that,

+ = .

Q. E. D.

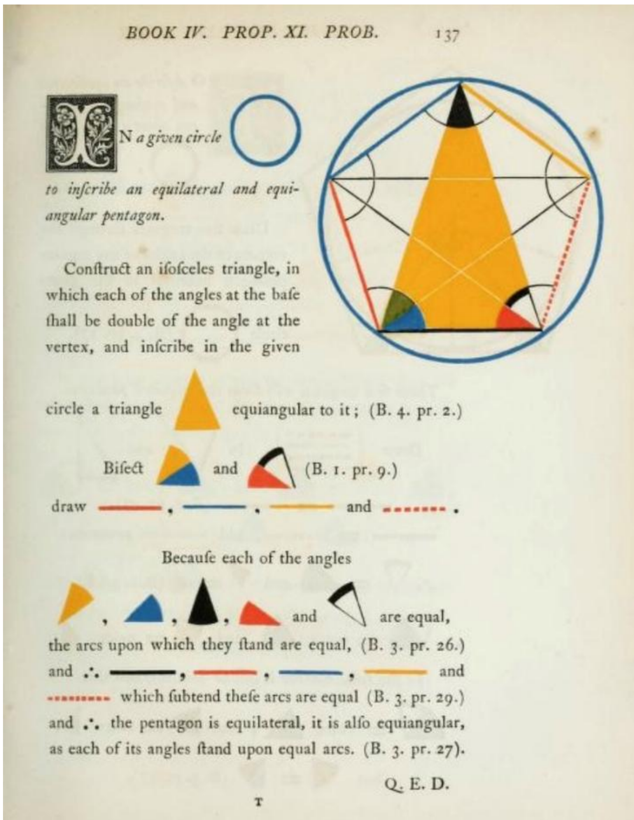
P

Quale relazione viene dimostrata?

Quando un poligono è inscrivibile in una circonferenza?

Deduci quando un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza dal Teorema precedente.

ES 5: Leggi il seguente Teorema


BOOK IV. PROP. XI. PROB. 137

IN *a given circle to inſcribe an equilateral and equiangular pentagon.*

Conſtruct an iſoſceles triangle, in which each of the angles at the baſe ſhall be double of the angle at the vertex, and inſcribe in the given circle a triangle equiangular to it; (B. 4. pr. 2.)

Biſect and (B. 1. pr. 9.)

draw , , and .

Becauſe each of the angles , , , and are equal, the arcs upon which they ſtand are equal, (B. 3. pr. 26.) and ∴ , , , and which ſubtend theſe arcs are equal (B. 3. pr. 29.) and ∴ the pentagon is equilateral, it is alſo equiangular, as each of its angles ſtand upon equal arcs. (B. 3. pr. 27).

Q. E. D.

T

Ti ricorda qualche costruzione legata ad una costante matematica molto importante?

Scheda di lavoro 6

Fare matematica con i testi storici:
Geometrie non-euclidee

Le geometrie non euclidee partono da postulati opposti a quello di Euclide sulla rette parallele, in particolare dalle due negazioni possibili del V postulato. Posidonio (I sec. a.C.) e Tolomeo (II sec. d.C.) tentarono di dimostrare il quinto postulato (delle parallele); si è dovuto attendere però fino al 1700 (ricordiamo il matematico italiano Gerolamo Saccheri) e al 1800 (con il grande matematico tedesco Karl Friedrich Gauss, l'ungherese JánosBolyai ed il russo Nikolaj Ivanovic Lobacevskij (1792-1856)) perché ci fosse un chiarimento:

il quinto postulato è indipendente dagli altri, cioè non può essere dimostrato partendo da essi.

Molti matematici avevano affrontato la questione. Ricordiamo i tentativi dell'italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733) che sostituì al quinto postulato di Euclide altre proposizioni e da esse ricavò dei teoremi. Ottenne però che questi teoremi non rispecchiavano più quella che per lui era la 'vera' geometria, quella studiata a scuola! L'intento di Saccheri era quello di "emendare Euclide da ogni macchia"; era convinto della verità del quinto postulato e negandolo voleva ricavare delle contraddizioni: dal suo punto di vista, riuscì nell'intento. Va invece riconosciuta agli altri tre matematici il merito della formulazione di una geometria non-euclidea: senza pensare se i postulati descrivano una realtà davvero esistente al di fuori di noi, si può costruire una geometria che parta appunto da postulati scelti semplicemente come ipotesi di ragionamento. Con la logica, da essi si ricavano teoremi che sono comunque 'rispettabili', anche se non descrivono la realtà che abbiamo sotto gli occhi ma, ad esempio, come ci si è resi conto successivamente, descrivono la realtà messa in luce da Einstein con la sua teoria della relatività...

ES 1:
1.1 Leggi ed interpreta i testi storici seguenti di Giovanni Gerolamo Sacchieri e Nikolaj Ivanovic Lobacevskij:

(B) Nessun cultore delle scienze matematiche può ignorare quanto sia il pregio e l'eccellenza degli Elementi di Euclide; ne fanno fede Archimede, Apollonio, Teodosio ed altri innumerabili matematici fino ai nostri giorni, i quali si servono degli Elementi come di dottrina da lungo tempo e su basi sicure stabilita. Ciò peraltro non impedì che molti tra gli antichi ed i moderni celebrati cultori della geometria non vi trovassero qualche cosa a ridire; e infatti si notano tre nèi.

Il primo riguarda la definizione delle parallele e con essa il postulato V del libro I «due rette segate da una terza, se formano con questa angoli interni da una medesima parte la cui somma è minore di due retti, si incontrano da questa parte». Nessuno per certo vi è che dubiti della verità di questo postulato, ma la sola accusa che si muove ad Euclide è di averlo chiamato con il nome di assioma, come se al solo enunciarlo esso riuscisse evidente. Gli è perciò che in seguito non pochi, pur accettando la definizione euclidea delle parallele, ne tentarono la dimostrazione, servendosi di quelle sole proposizioni del libro I che precedono la 29a, per la quale incomincia ad essere indispensabile l'uso del contro-verso postulato.

Giovanni Gerolamo Saccheri, Euclides ab omni nævo vindicatus.

La principale conclusione alla quale io pervenni [...] è l'ammissione dell'esistenza della Geometria in un senso più largo di quello nel quale Euclide per primo ce la presentò. In questa estesa accezione io diedi alla *scienza il nome di «Geometria immaginaria», nella quale rientra la «Geometria ordinaria» come caso particolare, corrispondente a quelle limitazioni nelle ipotesi generali che le misure effettive esigono.*

Nikolaj Ivanovic Lobacevskij, Nuovi principi di geometria.

1.2 Discuti con i compagni di gruppo gli argomenti letti nei due testi.

ES: Per interpretare i documenti:

Utilizzando l'introduzione ai due ultimi documenti, stabilisci fra di essi un confronto che metta in evidenza soprattutto gli elementi di diversità fra l'orientamento di Saccheri e quello di Lobacevskij.