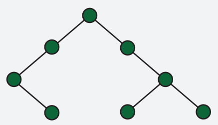
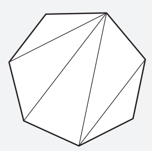
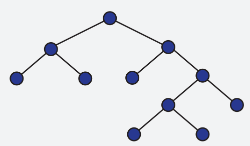
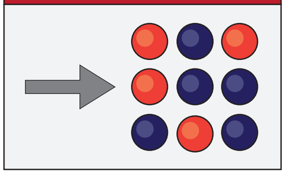
# I numeri di Catalan /2
## scheda di lavoro 9



Abbiamo visto che sussiste una corrispondenza biunivoca tra triangolazioni e alberi binari, per cui a ciascun esemplare della prima categoria ne corrisponde esattamente uno della seconda (e viceversa). Ciò permette di dire che il numero di triangolazioni (per la precisione di un poligono di $n+2$ lati) deve essere uguale al numero di alberi binari (di $n$ nodi) che a sua volta è uguale al numero di Catalan $C_n$. Esistono moltissimi problemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con il conteggio degli alberi binari o descritti dalla relazione ricorsiva $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ $(con\ C_0 = 1)$ ed è per questo motivo che tali numeri occorrono tanto frequentemente nei problemi di Calcolo Combinatorio. Vediamo quindi un catalogo (assolutamente non completo) di problemi che hanno per soluzione i numeri di Catalan, cerchiamo di dimostrarne la reciproca corrispondenza e quindi la soluzione.

| Oggetto | Descrizione | Problema |
| --- | --- | --- |
| ALBERI BINARI  | Si chiama **albero binario** di $n$ nodi una struttura formata da un nodo detto *radice* posto ad un livello base e collegato ad altri nodi di livello successivo e a loro volta connessi ad altre parti dell'albero, con l'unico vincolo che ogni nodo sia collegato al massimo a due nodi del livello successivo e, viceversa, che ogni nodo abbia un solo "padre" appartenente al livello precedente. | Quanti alberi binari di $n$ nodi esistono? $\boxed{C_n}$ |
| TRIANGOLAZIONI  | Si chiama **triangolazione** di un poligono convesso di $n$ lati, una qualsiasi suddivisione del poligono in triangoli con vertici sovrapposti a quelli del poligono stesso. | In quanti modi può essere triangolato un poligono convesso di $n$ lati? $\boxed{C_{n-2}}$ |
| ALBERI BINARI COMPLETI  | Si chiama **albero binario completo** di $n$ nodi un albero binario con $n$ nodi in cui ciascun nodo, o non ha figli, o li ha entrambi (sinistro e destro).<br>*Nota bene: l'albero nullo (con 0 nodi) è considerato un albero binario ma non un albero completo.* | Quanti alberi binari completi di $n$ nodi esistono? $\boxed{\phantom{C}}$ |
| PAROLE DI DYCK<br>X X Y X Y Y | Si chiama $\boldsymbol{n}$ **– parola di Dyck** una parola costituita da due simboli, poniamo $\boxed{X}$ e $\boxed{Y}$, ripetuti ciascuno $n$ volte, in modo che leggendo i simboli da sinistra a destra, il numero di $\boxed{Y}$ non superi in nessun momento il numero di $\boxed{X}$. | Quante diverse $n-parole$ *di Dyck* esistono? $\boxed{\phantom{C}}$ |
| SEQUENZA DI SCRUTINIO<br>+1,-1,+1,+1,-1,+1,-1-1 | Si chiama $\boldsymbol{n}$ **- sequenza di scrutino** una successione composta da $n$ volte "+1" e $n$ volte "-1" in un ordine tale per cui, interrompendo in un punto qualsiasi la sequenza, la somma dei numeri considerati fino a quel momento non è mai negativa. | Quante $n-sequenze\ di$ *scrutinio* esistono? $\boxed{\phantom{C}}$ |

**VITTORIE IN CONTROPIEDE**



In un gioco a punti con due sfidanti, partite in cui il vincitore non è <u>mai</u> stato in vantaggio durante l'intero arco della gara (esempio: una partita di calcio vinta $4-3$, con la seguente successione di reti: $0-1$, $0-2$, $1-2$, $2-2$, $2-3$, $3-3$, $4-3$)

In quanti modi può essere vinta "in contropiede" una partita con $n$ punti per il vincitore?

---

**PARENTESI BEN FORMATE**

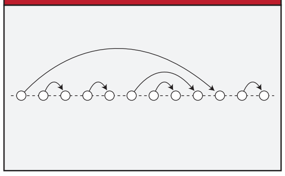
(())((())())

Si chiama *successione ben formata di parentesi*, una sequenza di parentesi aperte e chiuse disposte in modo da formare un'espressione senza errori (in pratica nessuna parentesi si chiude senza essere stata aperta). Si chiama inoltre *coppia massima*, una coppia di parentesi che racchiude l'intera espressione (del tipo "(…)" )

Quante successioni ben formate, prive di *coppia massima* e composte da $n$ parentesi aperte e $n$ chiuse esistono?

---

**CONNESSIONI RETTILINEE**

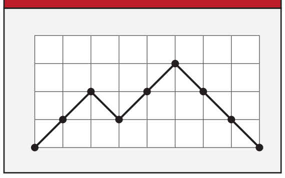


Dati $2n$ punti disposti in fila, si chiama connessione planare rettilinea, un insieme di collegamenti tra coppie di punti (effettuati nello stesso semipiano), tale che tutti i punti risultino collegati e le connessioni non formino incroci.

Quante connessioni rettilinee si possono fare con $2n$ punti in cerchio?

---

**CAMMINI DI DYCK**

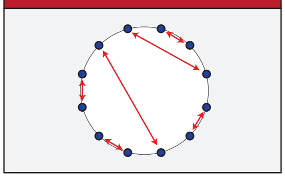


Si chiama $\boldsymbol{n}$ **– cammino di Dyck** un percorso composto da $2n$ segmenti fra loro congruenti e inclinati di 45°, metà dei quali disposti verso l'alto ( ↗ ) e metà verso il basso ( ↘ ), in modo che la loro giustapposizione produca cammini che si mantengano sempre al di sopra della linea base (← *vedi a fianco*).

Quanti diversi $n -$ *cammini di Dyck* esistono?

---

**CONNESSIONI CIRCOLARI**



Dati $2n$ punti disposti in circolo, si chiama connessione planare circolare, un insieme di collegamenti tra coppie di punti (effettuati tutti all'interno del cerchio), tale che tutti i punti risultino collegati e le connessioni non formino incroci.

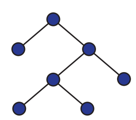
Quante connessioni circolari si possono fare con $2n$ punti in cerchio?

---

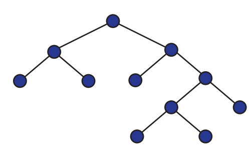
Iniziamo con gli **alberi binari completi** e vediamo alcuni esempi:

$A.B.^{completo}$ di 1 nodo
(detto *albero completo minimo*)

Esempio di $A.B.^{completo}$ di 7 nodi



Esempio di $A.B.^{completo}$ di 11 nodi



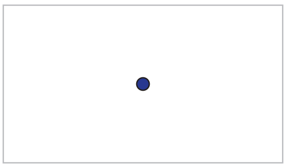
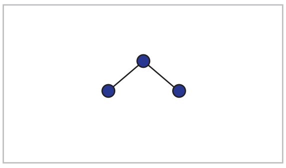
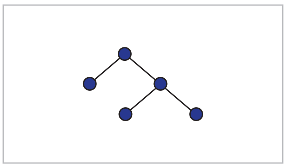
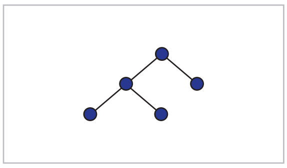
**9.1)** Disegna in ciascun caso un albero binario completo con il numero di nodi richiesto:

| Esempio di $A.B.^{completo}$ di 5 nodi | Esempio di $A.B.^{completo}$ di 9 nodi | Esempio di $A.B.^{completo}$ di 6 nodi |
|---|---|---|
| | | |

L'ultimo problema (6 nodi) non si può risolvere, perché non esistono alberi binari completi formati da un numero pari di nodi. Pensando di costruirli aggiungendo “un pezzo alla volta” all'*albero completo minimo*, cerca di spiegare perché tutti gli alberi binari completi hanno un numero dispari di nodi (**9.2**).

Cerchiamo ora di contare gli alberi binari completi, iniziano con una semplice elencazione caso per caso (possibile per un numero piccolo di nodi).

**9.3)** Elenca tutti gli alberi binari completi con 7 nodi stabilendo il loro numero complessivo:

| Numero nodi | Esemplari | Numero alberi possibili |
|---|---|---|
| 1 |  | 1 |
| 3 |  | 1 |
| 5 |   | 2 |
| 7 | | |

**9.4)** Alla luce dei numeri che hai trovato (e del fatto che il legame con in numeri di Catalan è già stato svelato), ipotizza la formula generale relativa al numero di alberi binari completi:

Siamo arrivati al nocciolo della questione: trovare una corrispondenza biunivoca fra gli alberi binari (semplici) di $n$ nodi e gli alberi binari completi di $2n+1$ nodi. Per capirci, quello che stiamo cercando è un procedimento meccanico e che funzioni per qualsiasi valore di $n$, che permetta di "trasformare" univocamente un albero di un tipo a uno dell'altro tipo.

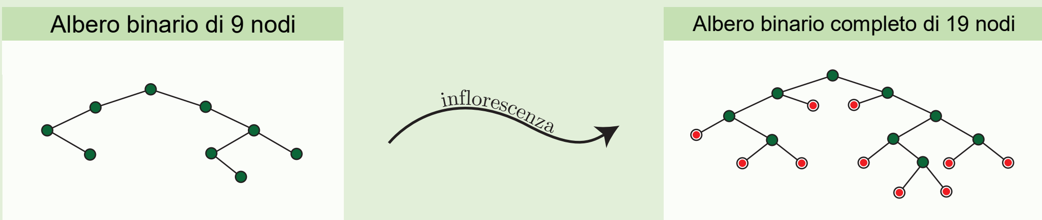
Partiamo dalla seguente trasformazione: $Alberi\ binari\ (di\ n\ nodi) \rightarrow Alberi\ binari\ completi\ (di\ 2n+1\ nodi)$.

**9.5)** Hai qualche un'idea su come trasformare un albero binario di $n$ nodi in uno completo di $2n+1$ (in modo da poter anche "fare marcia indietro" e ricavare dall'albero completo l'albero binario generatore)?

Esistono vari modi per realizzare questa trasformazione, la più semplice delle quali è detta inflorescenza (nel solco della tradizione botanica del lessico adottato per queste strutture: albero, radice, nodo, ramo…).

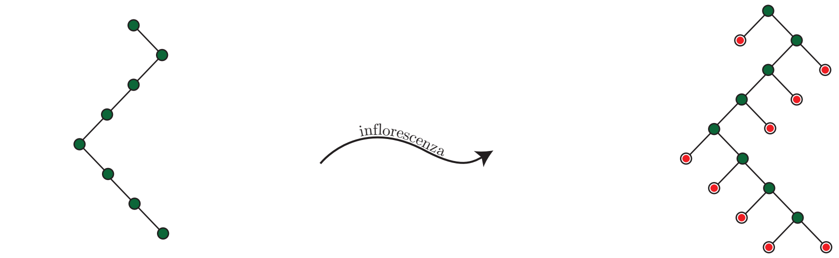
**Definizione**

Dato un albero binario si dice **inflorescenza**, l'albero ottenuto completando ogni nodo con entrambi i nodi-figli.



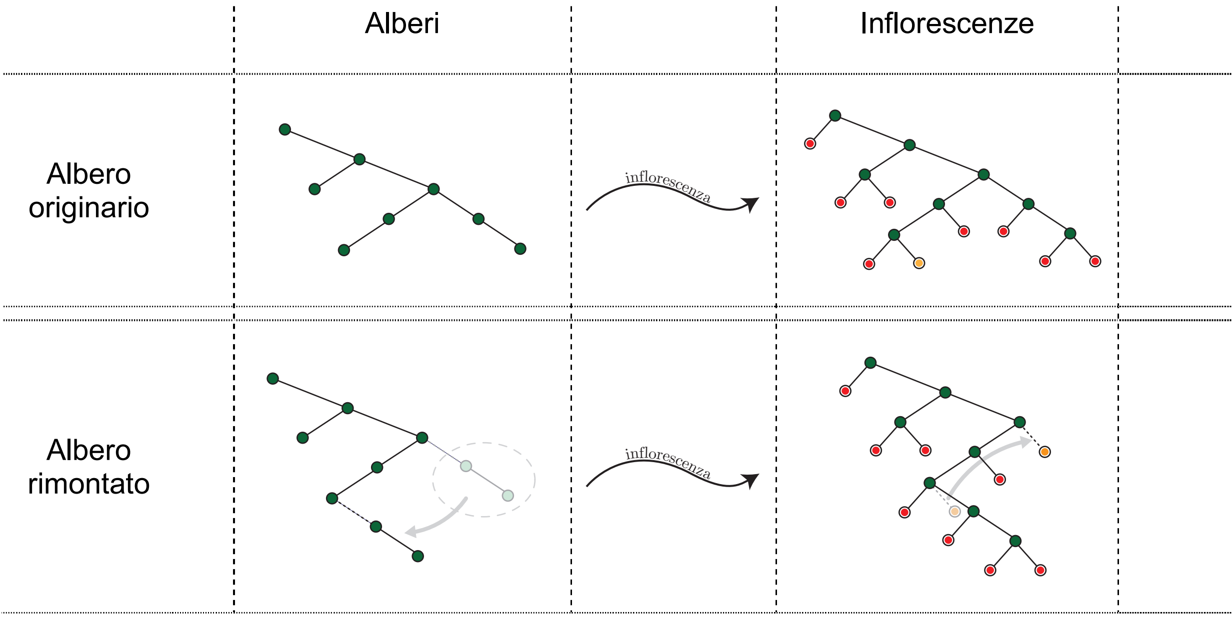

È del tutto evidente che un albero così ottenuto sarà un albero completo. Non sembra però esserci nessuna garanzia che un albero binario di $n$ nodi venga trasformato in un $A.B.^{completo}$ con un numero di nodi pari proprio a $2n+1$. Facciamo una prova con in seguenti alberi da 8 nodi (scelti in modo da avere una struttura diversa l'uno dall'altro):

**9.6)** Disegna le infiorescenze degli alberi binari di 8 nodi proposti in basso (il primo caso è già risolto) e determina così il numero di nodi dell'albero binario completo.

| | Albero binario di 8 nodi → $A.B.^{completo}$ | Numero nodi ($A.B.^{completo}$) |
|---|---|---|
| **a)** |   | 17 |
| **b)** |   | |
| **c)** |   | |
| **d)** |   | |

Il risultato di 17 nodi del caso **9.6a)** non rappresenta certo una sorpresa. Questo tipo di albero binario a diramazione singola è detto "tronco": nei tronchi, da ogni nodo (tranne l'ultimo), diparte un solo ramo e quindi l'infiorescenza aggiunge esattamente un fiore per nodo, mentre il nodo terminale è l'unico a generarne due. Tutto sommato, partendo da un tronco di $n$ nodi, si hanno dunque $n + (n - 1) + 2 = 2n + 1$ nodi dell'infiorescenza. La regolarità degli altri casi non è tanto semplice da ricavare in termini generali. Osserviamo però che "smontando" un pezzo di un albero binario e rimontandolo altrove, il numero di fiori resti immutato. Ciò deriva dal fatto che nel punto di cesura si aggiunge un fiore mentre nel punto di rinnesto viene tolto un fiore (*vedi illustrazione sottostante*).

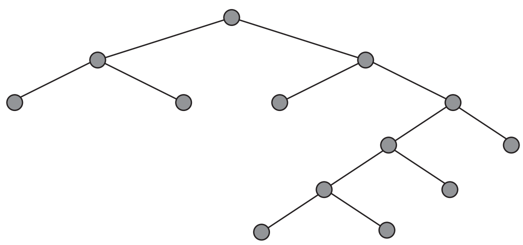
“Smontaggio” e “rimontaggio” di un albero ed effetti sull’infiorescenza




A questo punto diventa tutto più chiaro: è infatti facile smontare e rimontare un albero fino a farlo diventare un tronco e, come abbiamo appena visto, questa operazione non modifica il numero di nodi dell’infiorescenza. Del resto sappiamo che l’infiorescenza del tronco finale deve essere proprio di $2n+1$ nodi, il che conclude il ragionamento. Abbiamo così dimostrato che ad ogni albero binario di $n$ nodi è associato (tramite l’infiorescenza) esattamente un albero binario completo di $2n+1$ nodi.

Vediamo ora se vale l’opposto, se cioè è possibile “fare marcia indietro” e ricavare da ogni albero binario completo di $2n+1$ nodi un albero binario di $n$ nodi.

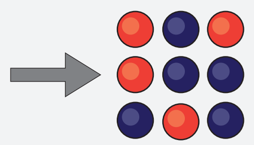
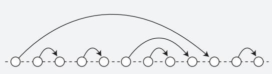
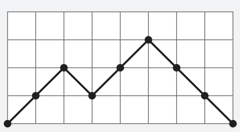
**9.7)** È possibile rendere reversibile l’infiorescenza? Rispondi accompagnando il ragionamento un esempio illustrato.



Il tuo ragionamento dovrebbe averti portato a concludere che ad ogni albero binario completo di $2n+1$ nodi è associato esattamente un albero binario di $n$ nodi. Ciò conclude quanto ci riproponevamo di dimostrare:

Esiste una corrispondenza biunivoca fra alberi binari di $n$ nodi e alberi binari completi di $2n+1$ nodi.

**9.8)** Cerca di dimostrare le seguenti corrispondenze biunivoche legate alle strutture indicate:

| | Strutture da mettere in corrispondenza | | | Spiegazione |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | PAROLE DI DYCK<br>X X Y X Y Y | $\Leftrightarrow$ | SEQUENZA DI SCRUTINIO<br>+1,-1,+1,+1,-1,+1,-1-1 | |
| **b)** | SEQUENZA DI SCRUTINIO<br>+1,-1,+1,+1,-1,+1,-1-1 | $\Leftrightarrow$ | VITTORIE IN CONTROPIEDE<br> | |
| **c)** | PAROLE DI DYCK<br>X X Y X Y Y | $\Leftrightarrow$ | PARENTESI BEN FORMATE<br>( ( ) ) ( ( ( ) ) ( ) ) | |
| **d)** | PARENTESI BEN FORMATE<br>( ( ) ) ( ( ( ) ) ( ) ) | $\Leftrightarrow$ | CONNESSIONI RETTILINEE<br> | |
| **e)** | SEQUENZA DI SCRUTINIO<br>+1,-1,+1,+1,-1,+1,-1-1 | $\Leftrightarrow$ | CAMMINI DI DYCK<br> | |

La prossima è leggermente più impegnativa.

| Strutture da mettere in corrispondenza | Spiegazione |
|---|---|

**9.9)**

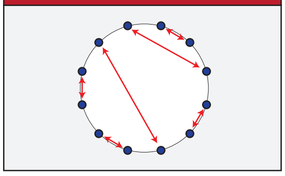
PARENTESI BEN FORMATE

(())((())())

(con $n$ parentesi aperte e $n$ chiuse)

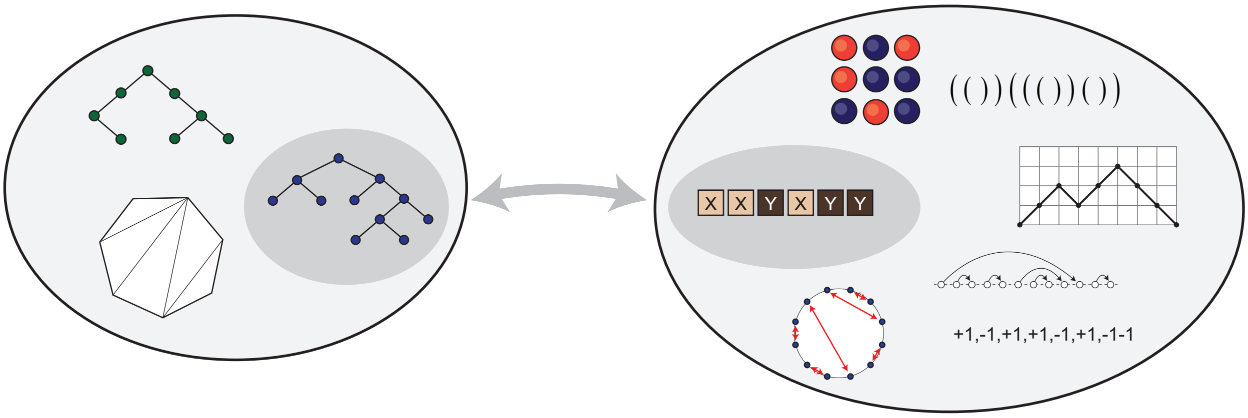
$\Leftrightarrow$

CONNESSIONI CIRCOLARI



(con $2n$ punti disposti in circolo)

Abbiamo ora due famiglie distinte di problemi: la prima è composta da *triangolazioni*, *alberi binari* e *alberi binari completi*: di questo primo gruppo conosciamo il legame con i numeri di Catalan. La seconda famiglia è composta da *parole* e *cammini di Dyck*, dalle *sequenze di scrutinio*, dalle *vittorie in contropiede*, dalle *parentesi ben formate* e dalle *connessioni planari rettilinee* e *circolari*. I due problemi appartenenti a gruppi diversi più facili da mettere in corrispondenza, sono gli *alberi binari completi* e le *parole di Dyck* (*vedi illustrazione in basso)*




**9.10)** È richiesto di trovare un procedimento meccanico (cioè un algoritmo) che permetta di associare in modo univoco ad ogni *albero binario completo* di $2n + 1$ nodi una $n$-*parola di Dyck*, in modo che il processo di attribuzione sia reversibile (data la *parola di Dyck* deve essere possibile risalire all'albero che l'ha generata). Hai quale idea?

Se non sei arrivato a nessuna strategia efficace, considera i seguenti approfondimenti sugli *alberi binari* (che ci porteranno proprio alla corrispondenza fra *alberi binari completi* e *parole di Dyck*).

In molti casi è importante numerare (etichettare con numeri crescenti) i nodi di un albero binario secondo una strategia facile da implementare su un calcolatore. Il metodo più semplice è quello di programmare un "algoritmo di esplorazione" che permetta di visitare tutti i nodi dell'albero: l'ordine di visita sarà poi utilizzato come etichetta del nodo stesso (il nodo di partenza avrà il numero 0, il primo nodo visitato il numero 1, il secondo il numero 2 e così via)

**Definizione dell'algoritmo di esplorazione**

Si parte dalla radice (che è sempre etichettata con il numero zero) e poi si percorre l'albero seguendo ad ogni diramazione le seguenti regole:

**A)** se esiste e non è ancora stato visitato, si va al nodo-figlio di sinistra

se non è possibile

**B)** se esiste e non è ancora stato visitato, si va al nodo-figlio di destra

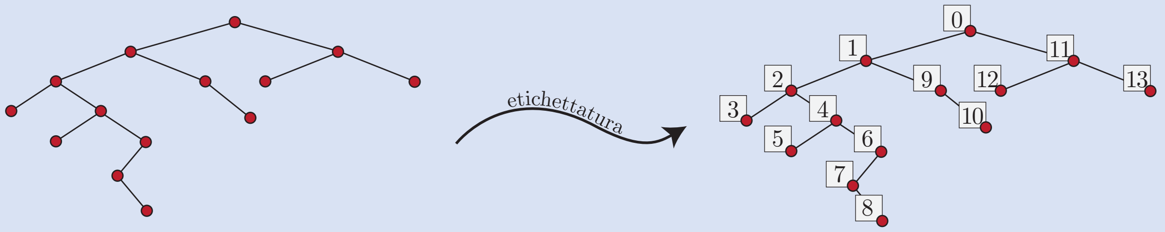
se non è possibile

**C)** se possibile si sale al nodo-padre

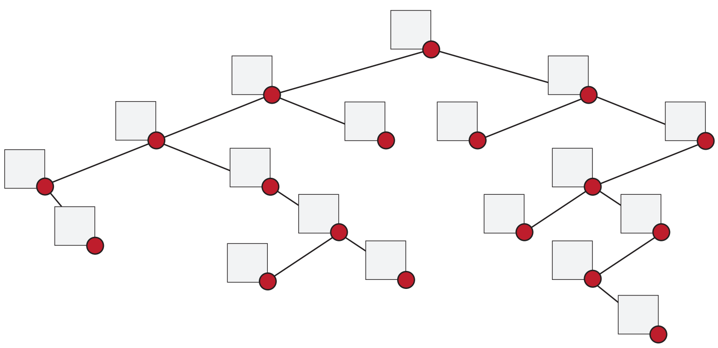
se non è possibile

**D)** L'algoritmo ha termine perché tutti i nodi sono stati visitati

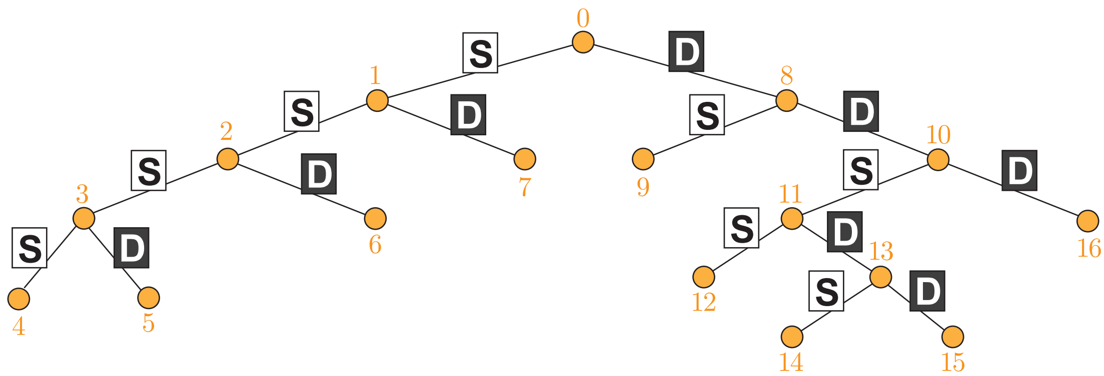
**Esempio**




**9.11)** Etichetta i nodi del seguente albero secondo l'algoritmo riportato sopra



Proviamo ora ad analizzare un **albero binario completo**, nel quale i nodi siano stati etichettati con il metodo descritto sopra e i rami siano stati denotati con le lettere "S" o "D" (a seconda della loro direzione, sinistra o destra).

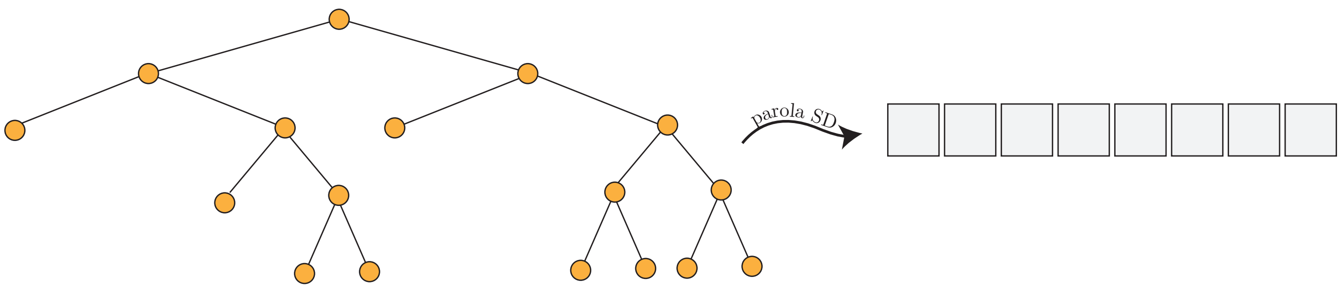



Partiamo dal nodo 1 (tralasciamo quindi la radice) ed elenchiamo in ordine di etichetta il tipo di ramo (S o D) al quale è attaccato il rispettivo nodo: otteniamo in questo modo la seguente sequenza di lettere:

S S S S D D D D S D S S D S D D

È facile riconoscere che si tratta di una $8$-parola di Dyck: essa è infatti costituita da due simboli ripetuti 8 volte ciascuno e disposti in modo che comunque si interrompa la sequenza di lettere, il numero di “S” è sempre maggiore o uguale al numero di “D”.

**9.12)** Il fenomeno appena osservato potrebbe essere frutto di una fortunata coincidenza. Prova quindi a creare una parola formata dalle lettere S e D a partire dal seguente **albero binario completo** e verifica poi che si tratta di una parola di Dyck:




**9.13)** Sapresti argomentare in modo convincente perché con questo tipo di procedimento, gli alberi binari completi di $2n+1$ nodi producano sempre $n$-parole di Dyck?

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

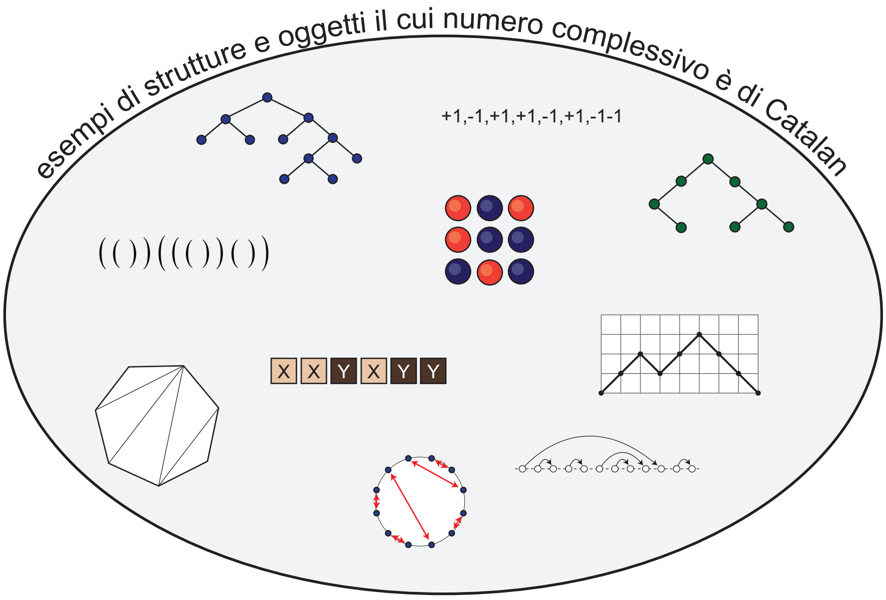
______________________________

**9.14)** Verifichiamo ora che il procedimento sia reversibile, partiamo cioè da una *parola di Dyck* e ricaviamo l'*albero binario completo* che l'ha generata (vedrai che, soprattutto all'inizio, non sarà un'operazione banale)

| | Parola di Dyck | albero binario completo |
|---|---|---|
| **a)** | S S S D S D S D S D D D<br>albero binario completo associato | |
| **b)** | S D S D S D S D<br>albero binario completo associato | |
| **c)** | S D S S S D S D D D<br>albero binario completo associato | |
| **d)** | S S D D S D S S D S D D<br>albero binario completo associato | |

| | Parola di Dyck | albero binario completo |
| --- | --- | --- |
| **e)** | S S D S S D S D D D<br>$\xrightarrow{\text{albero binario completo associato}}$ | |
| **f)** | S S D S S S D D S D D D<br>$\xrightarrow{\text{albero binario completo associato}}$ | |
| **g)** | S S S D D S D D<br>$\xrightarrow{\text{albero binario completo associato}}$ | |
| **h)** | S S D S D D S S D S D D<br>$\xrightarrow{\text{albero binario completo associato}}$ | |

Siamo così finalmente riusciti a trovare una corrispondenza biunivoca tra *alberi binari completi* di $2n + 1$ nodi e $n$-*parole di Dyck*. Le due famiglie di problemi si sono quindi riunite in una sola, a raccogliere strutture il cui numero sono i numeri di Catalan.




Il grande numero di oggetti matematici (molto più ampio del campionario rappresentato sopra) appartenenti ad ambiti diversi ma collegati dal loro numero complessivo, giustifica l'interesse che i matematici dimostrano per i numeri di Catalan.