Liceo **Matematico**

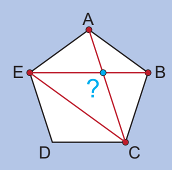
I numeri di Catalan
scheda di lavoro 8

Liceo Scientifico e Linguistico
Ettore Majorana

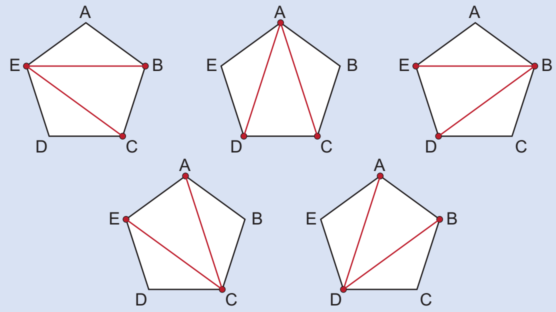
Definizione

Considera un poligono convesso *P*, non necessariamente regolare. Chiamiamo **triangolazione** di *P* una suddivisione del poligono in triangoli con vertici sui vertici di *P*.

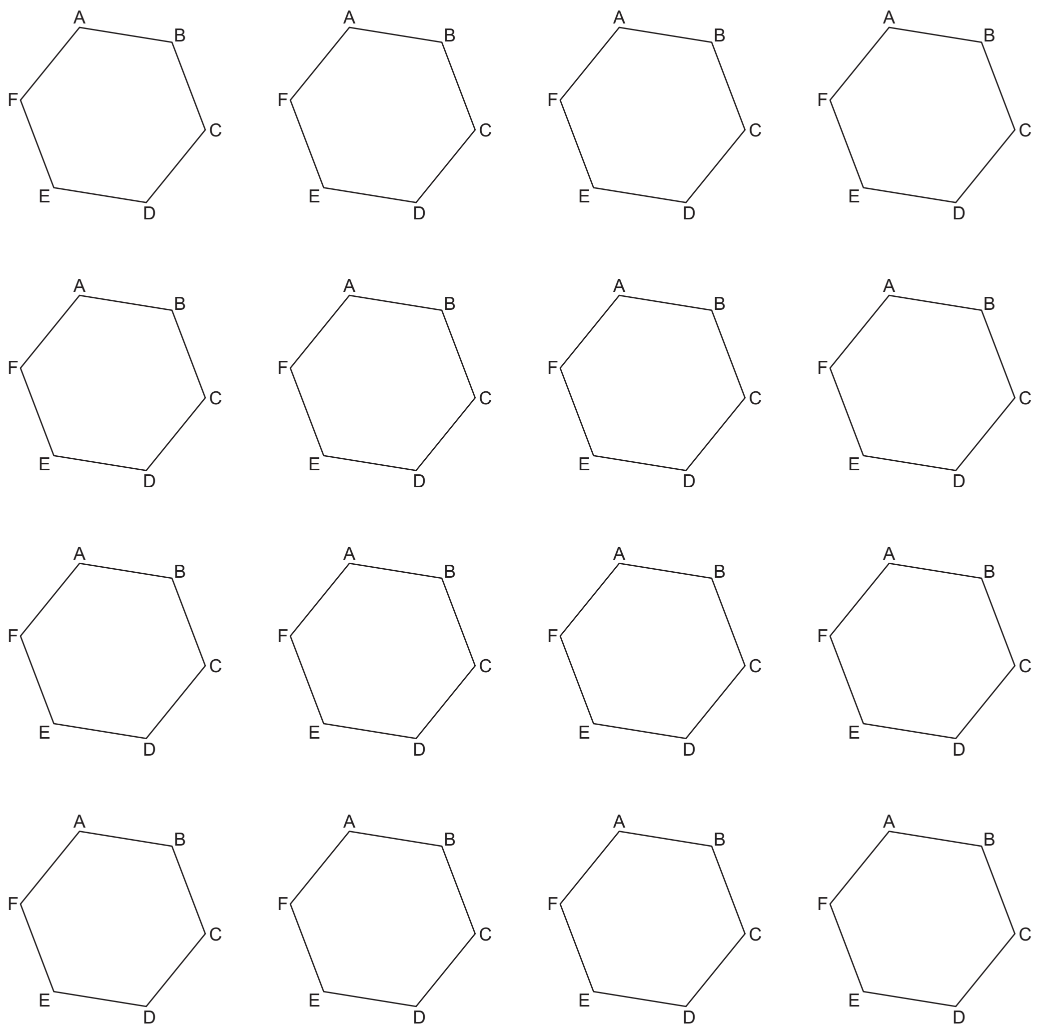
Esempio: Partendo da un pentagono *P*, si hanno esattamente 5 triangolazioni di *P* (*vedi a destra* →):



Per maggiore chiarezza, a sinistra è mostrata una suddivisione di *P* che **non** è una triangolazione (perché c'è un vertice interno)



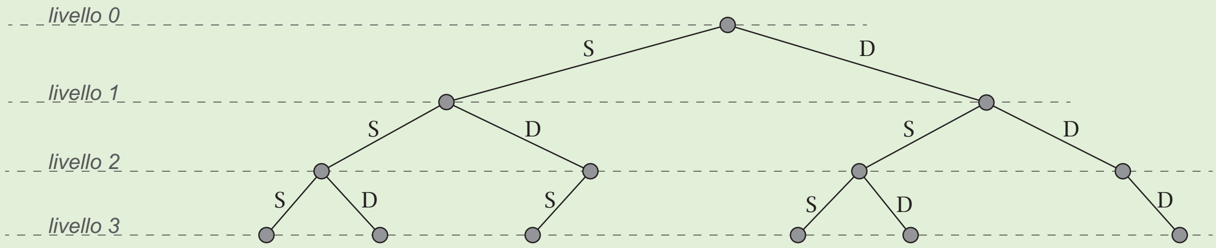
8.1) Stabilisci il numero di triangolazioni di un esagono cercando di disegnarle tutte. *Nota bene: per non offrire indizi sulla soluzione, il numero di esagoni disegnati in basso non è pari al numero cercato.*



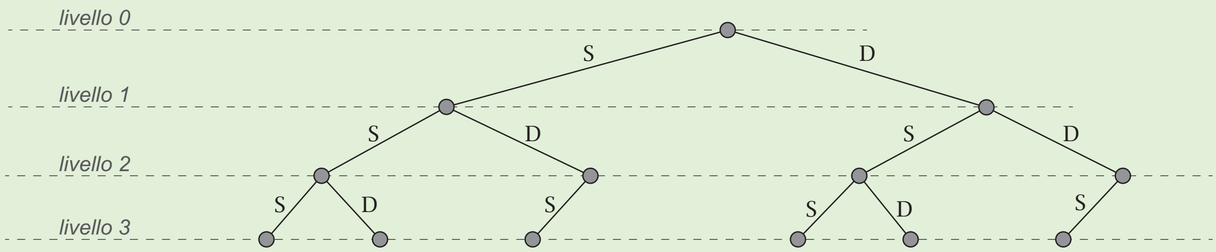
La soluzione che abbiamo trovato è un numero importante e fa parte di una famiglia detta *numeri di Catalan*, oggetto di questo foglio di lavoro. Come vedremo fra breve, esistono molti modi diversi per definire i *numeri di Catalan*, compreso il caso appena visto, cioè il numero di possibili triangolazioni di un poligono di *n* lati. Questa definizione sarebbe ragionevole da un punto di vista storico-matematico, perché relativa ad un problema proposto e risolto per la prima volta dal solito Eulero, ma poco pratica perché legata ad una questione marginale. Per trovare un ambito più adatto all'introduzione e quindi alla definizione dei *numeri di Catalan*, lavoriamo con una struttura cara agli informatici, gli alberi binari.

Definizione

Si chiama **albero binario**, una struttura divisa per livelli e composta da punti detti *nodi* e segmenti che li collegano. Al primo livello (livello 0) sta un solo punto detto *radice*. Ogni nodo diverso dalla radice è collegato ad un nodo del livello precedente e al massimo a due nodi del livello successivo, detti noto di sinistra (S) o nodo di destra (D), a seconda della posizione occupata (*vedi in basso*).

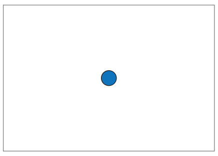
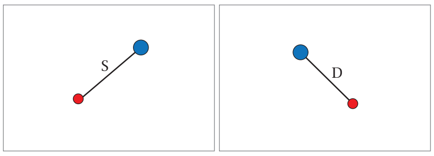
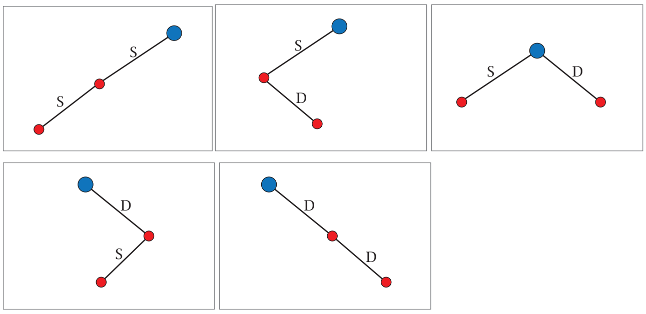
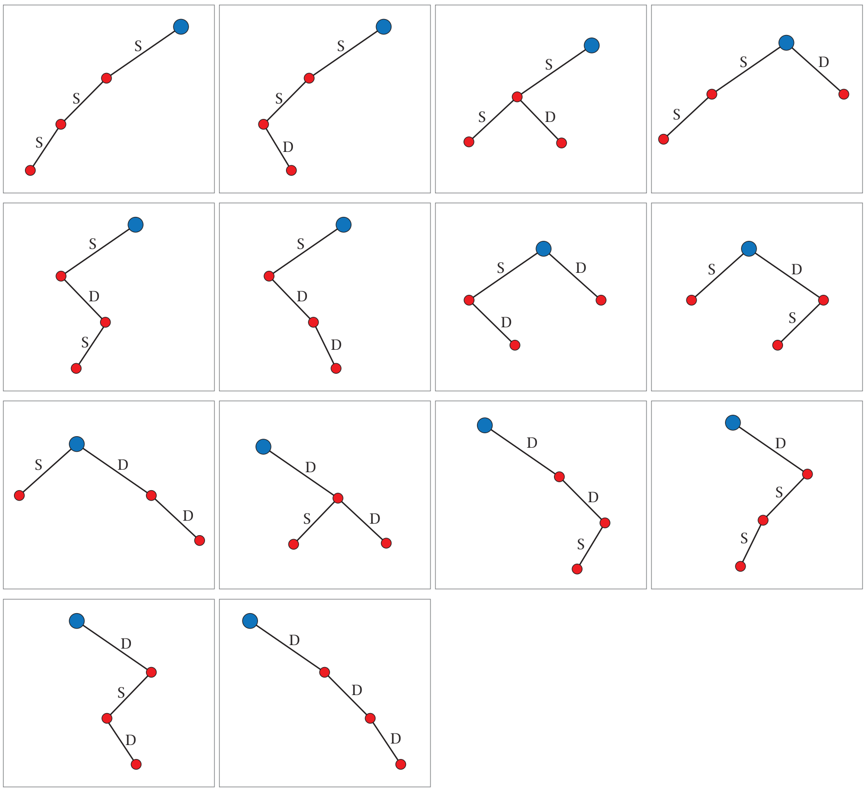


La posizione "sinistra" o "destra" di un nodo, distingue un albero da un altro anche nel caso di nodi isolati. A titolo di esempio, l'albero sottostante è diverso da quello rappresentato sopra per via del nodo in basso a destra.



Vediamo ora di conteggiare i possibili alberi binari in funzione del numero complessivo dei loro nodi (quando non è specificato diversamente, anche la radice va conteggiata come tale). Per definizione si pone uguale a 1 il numero di alberi binari privi di nodi e quindi anche della radice: si tratta dell'albero totalmente vuoto.

Numero nodi	Num. alberi binari	Rappresentazioni
0	1	

1	1	
2	2	
3	5	
4	14	

8.2) Senza effettuare un conteggio caso per caso, saresti in grado di stabilire il numero di alberi binari prima di 5 e poi di 6 nodi? Nota bene: il “trucco” consiste nel costruire l’albero utilizzando ricorsivamente i casi già trattati. Per affrontare il problema da un punto di vista simbolico, conviene introdurre il simbolo C_n per il numero di possibili alberi con n nodi.

5	?	

6	?		

La strategia appena vista ci permette finalmente di definire in termini squisitamente simbolici i numeri di Catalan.

Definizione

Si chiama successione di Catalan la successione che soddisfa la seguente legge ricorsiva:

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \end{cases}$ …oppure… Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \end{cases}$

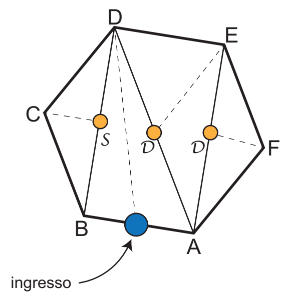
8.3) Utilizzando la definizione e gli esempi già calcolati, completa la seguente tabella fin dove dice l'insegnante:

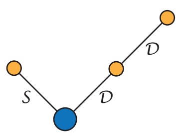
n	$\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}}$ $\Leftarrow$ somma estesa al prodotto di coppie di numeri di Catalan che abbiano per somma di pedici il valore n-1	C_n
0		**1**
1	$C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$	**1**
2	$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$	**2**

3	$C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$	**5**
4	$C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$	**14**
5		
6		
7		

Abbiamo così trovato un metodo veloce per risolvere il problema degli alberi binari. Resta aperta la questione legata al numero di triangolazioni di un poligono di *n* lati: non abbiamo infatti ancora stabilito alcun legame fra i due quesiti. Per farlo prendiamo un esagono diviso in qualche modo in triangoli ed immaginiamo tale figura come un labirinto formato da stanze triangolari: l'ingresso viene fissato per convenzione sul lato AB.

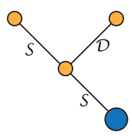
Entriamo nella prima stanza e immaginiamo di tracciare una linea a congiungere porta di entrata e vertice opposto. Questo definisce una "parte sinistra" e una "parte destra" della stanza e quindi una parete di sinistra e una di destra. Su ogni parete che non sta sul perimetro esterno dell'esagono, si affaccia necessariamente una porta. Attraversando queste porte si può nuovamente procedere a definire una sinistra e una destra e così via, fino a giungere a stanze cieche prive di uscite.



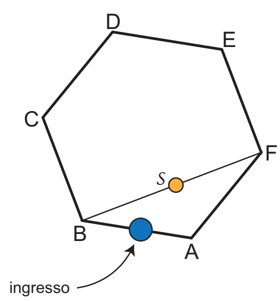


Questo modo di definire per ogni stanza una porta di sinistra e/o di destra, permette di schematizzare la struttura del labirinto mediante l'albero binario a 4 nodi disegnato a sinistra.

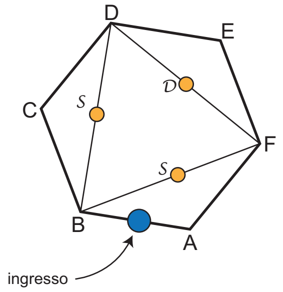
Cerchiamo ora di procedere in modo contrario e di ricostruire la triangolazione dell'esagono a partire da un albero binario qualsiasi.



La struttura dell'albero ci dice che il triangolo "di ingresso" ha una parete sulla sua sinistra e nessuna sulla sua destra: la parete di destra è quindi perimetrale. Perché ciò sia possibile, la prima stanza triangolare deve essere disposta così $(\rightarrow)$



Siamo ora arrivati al nodo di secondo livello. Guardando l'albero si vede che la prossima stanza deve avere una porta su entrambe le pareti, nessuna nella quali può quindi essere sul perimetro esterno. Ciò può essere realizzato in un solo modo, mostrato a qui $(\searrow)$.



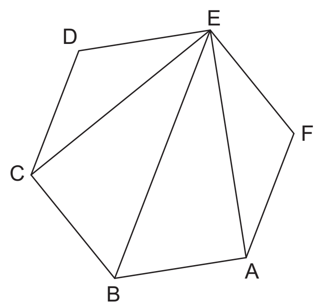
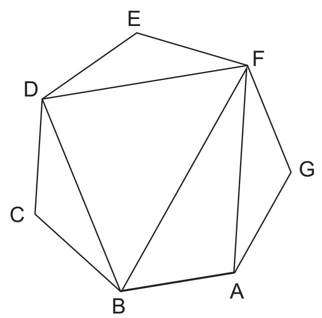
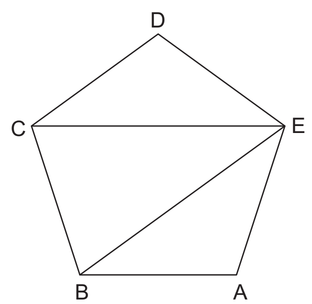
Non è difficile riconoscere che abbiamo ricostruito la triangolazione dell'esagono.

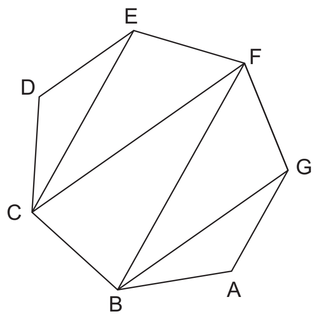
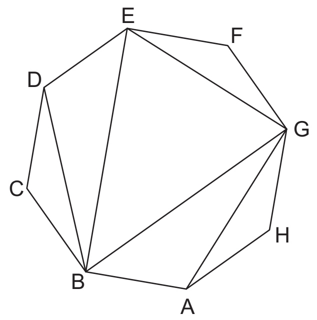
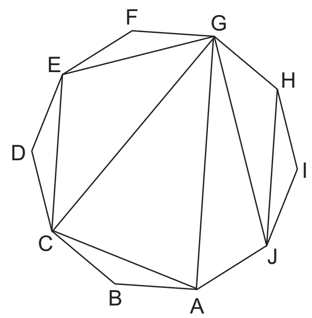
I due esempi proposti suggeriscono che ogni albero binario di *n* nodi sia collegato ad una triangolazione di un poligono di *n+2* lati e, viceversa, ogni triangolazione di un poligono di *n+2* lati dia luogo in modo univoco ad un albero binario di *n* nodi (vedremo successivamente un procedimento che garantisce tale corrispondenza). Questo permette di concludere che…

Il numero di triangolazioni di un poligono di n lati è uguale a C_{n-2}

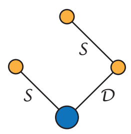
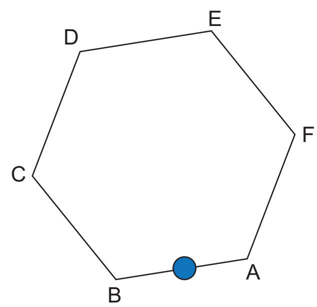
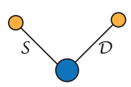
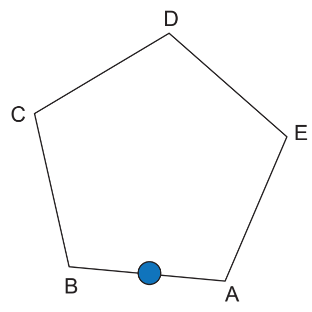
Per approfondire la relazione che lega triangolazioni ed alberi binari, risolvi i seguenti esercizi:

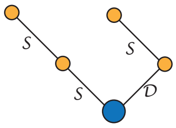
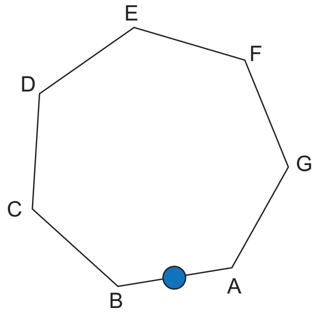
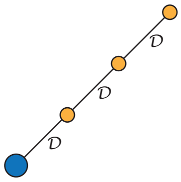
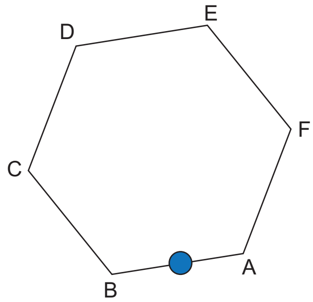
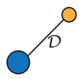
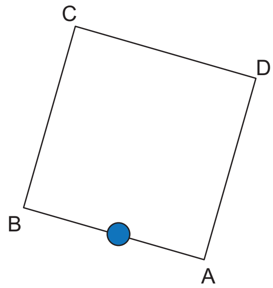
8.3) Disegna l'albero binario associato a ciascuna delle seguenti triangolazioni:

	Triangolazione	Albero binario
a)		
b)		
c)		

d)		
e)		
f)		

8.4) Disegna le triangolazioni associate a ciascuno dei seguenti alberi binari

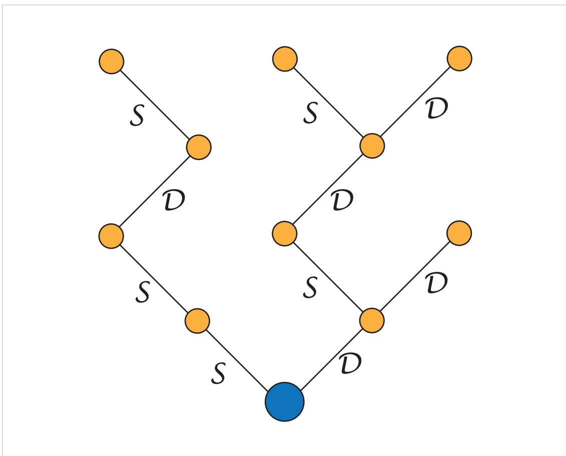
	Albero binario	Triangolazione
a)		
b)		

c)		
d)		
e)		

Fino ad ora abbiamo visto casi che potevano essere facilmente risolti con un po' di intuizione. Alberi più vasti creano però situazioni che vanno gestite con un metodo "a colpo sicuro". Il seguente esempio illustra tale procedimento.

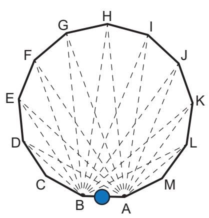
Esempio

Trova la triangolazione del poligono descritta dall'albero rappresentato a fianco $(\rightarrow)$:



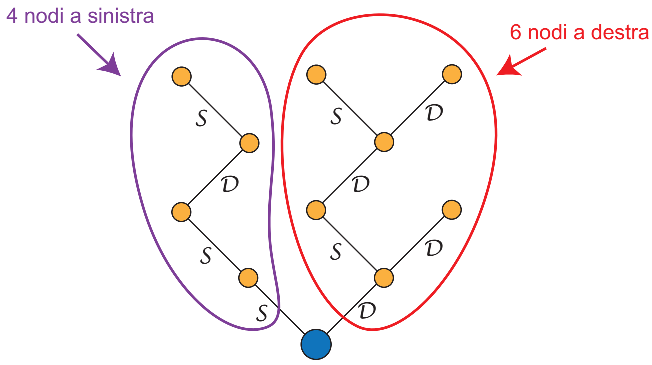
Soluzione

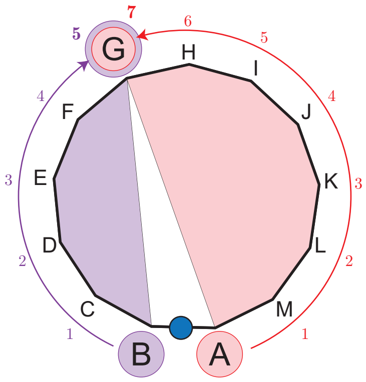
Il numero di nodi è 11, per cui l'albero corrisponde alla triangolazione di un poligono di $11 + 2 = 13$ lati.



"Entrando" come di consueto dal lato AB, la prima stanza triangolare in cui ci si imbatte deve avere una porta sia a sinistra che a destra. Esistono però fin troppe scelte possibili, come è mostrato a fianco $(\leftarrow)$.

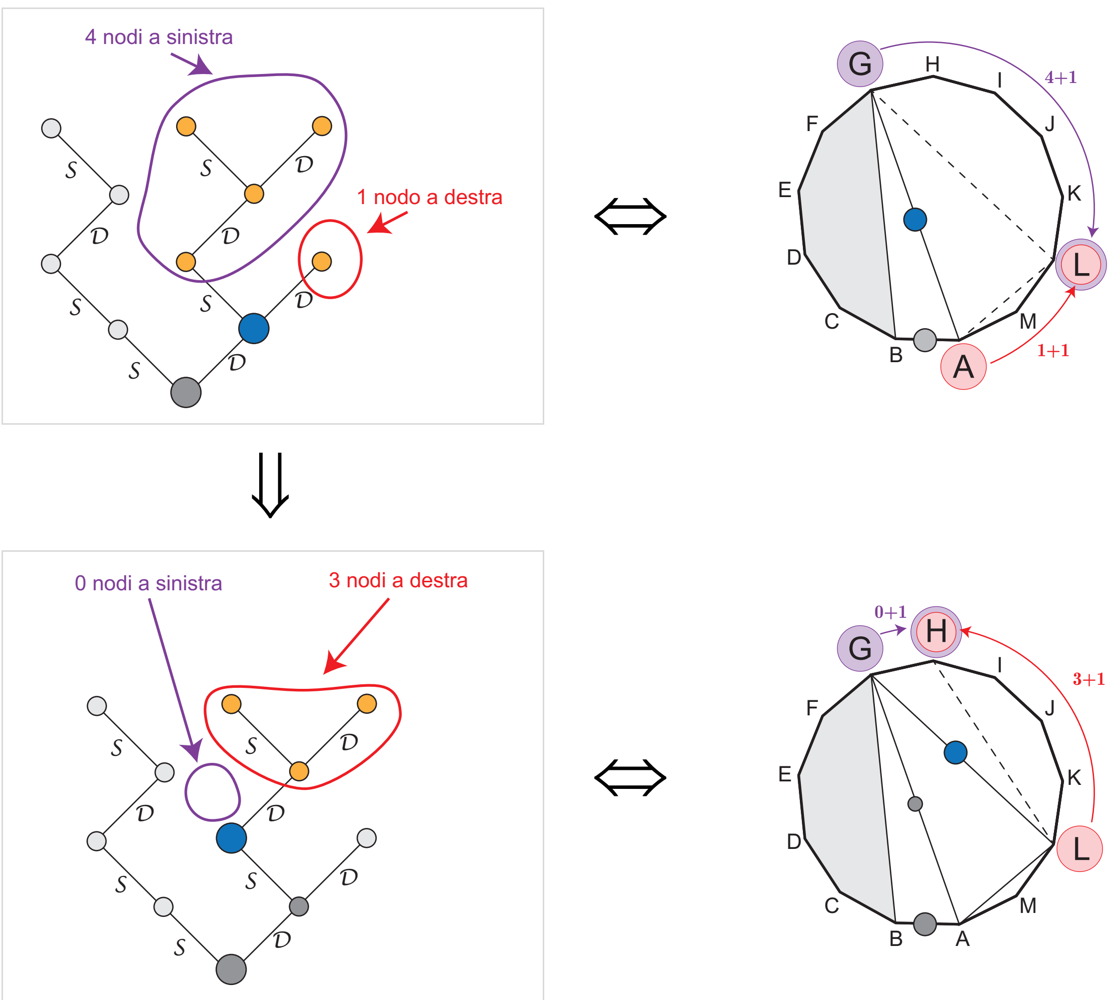
Per scegliere quale sia quella corretta, analizziamo l'albero binario più dettagliatamente. Dalla sinistra della radice si diparte un albero di 4 nodi (corrispondente alla triangolazione di un esagono), dalla parte di destra un albero di 6 nodi (che può essere associato alla triangolazione di un ottagono).



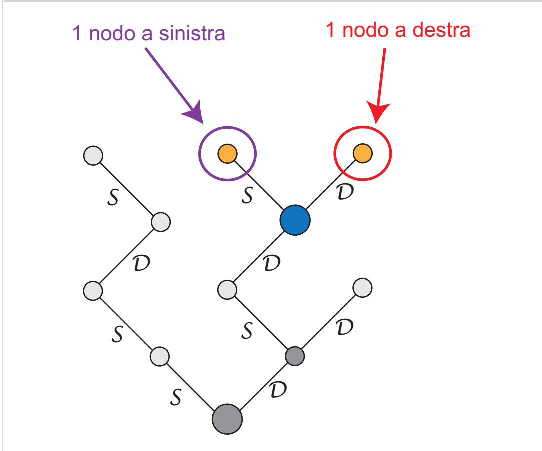


Contiamo ora 6 vertici partendo da B in senso antiorario e/o 8 vertici partendo da A in senso orario (← *a fianco si è preferito contare 5 vertici dal punto successivo a B e 7 dal vertice successivo ad A*). In entrambi i casi si giunge al vertice G. Il triangolo BGA divide ora il poligono in tre: a sinistra un poligono di 6 lati (perché di 6 vertici) , in mezzo la stanza triangolare, a destra un poligono di 8 lati (perché di 8 vertici).

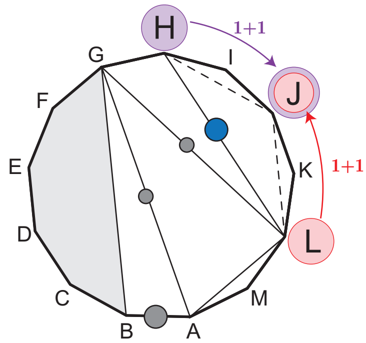
Possiamo iterare questo modo di triangolare il poligono percorrendo una ad una tutte le diramazioni dell'albero binario. A titolo di esempio vediamo il procedimento relativo alla parte destra dell'albero (nelle illustrazioni in basso, la parte sinistra è velata di grigio perché non viene sviluppata).



$\Downarrow$

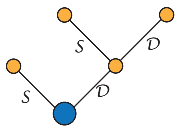
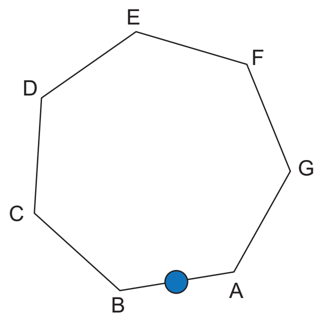
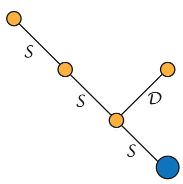
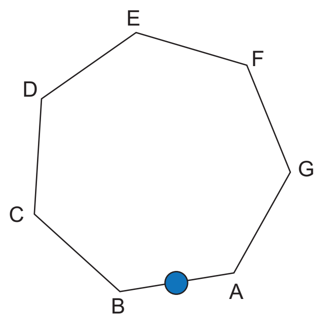
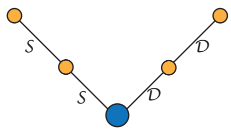
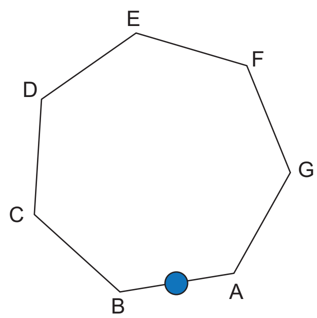


$\Leftrightarrow$

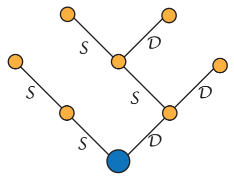


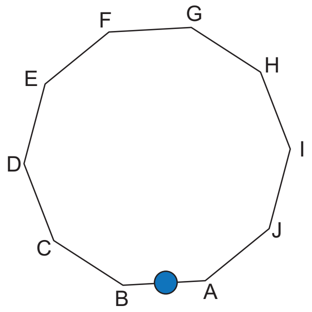
È facile convincersi che il metodo appena descritto permette di mettere in corrispondenza ogni albero binario con la corretta triangolazione di un poligono, senza nessun intervento dell'intuizione, né ricorrendo a tentativi.

8.5) Disegna le triangolazioni associate a ciascuno dei seguenti alberi binari

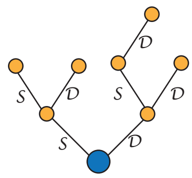
a)		
b)		
c)		

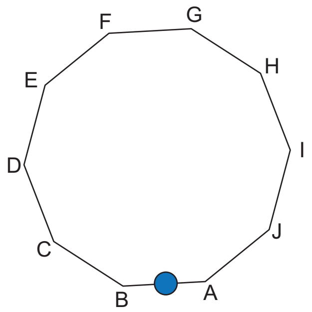
d)


S
D
S
D
S
D

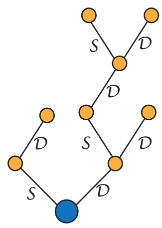

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

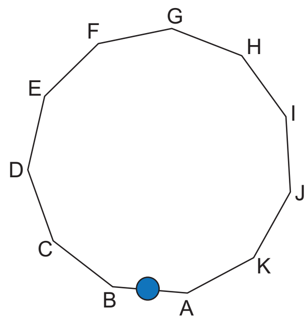
e)


D
S
D
S
D
S
D


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

f)


S
D
D
D
S
D
S
D


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K