Liceo **Matematico**

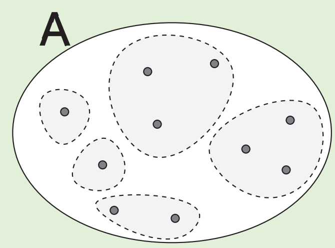
I numeri di Stirling (di seconda specie)
scheda di lavoro 7

Liceo Scientifico e Linguistico **Ettore Majorana**

L'arte del "saper contare" non si esaurisce con la conoscenza dei raggruppamenti classici (permutazioni, disposizioni e combinazioni) e anzi, non esiste alcun catalogo completo dei casi possibili: conteggi diversi avvengono infatti secondo logiche diverse e le strategie che funzionano per uno specifico caso sono spesso inefficaci se applicate altrove. A titolo di esempio vediamo oggi un problema squisitamente combinatorio ma che non può essere assimilato a nessuno dei casi classici: esso ci costringerà ad introdurre una nuova struttura numerica detta *triangolo di Stirling*. Il problema dal quale partiamo ha a che fare con le partizioni di un insieme:

Definizione

Si chiama **partizione** di un insieme A una qualsiasi suddivisione di A in sottoinsiemi non vuoti e disgiunti.



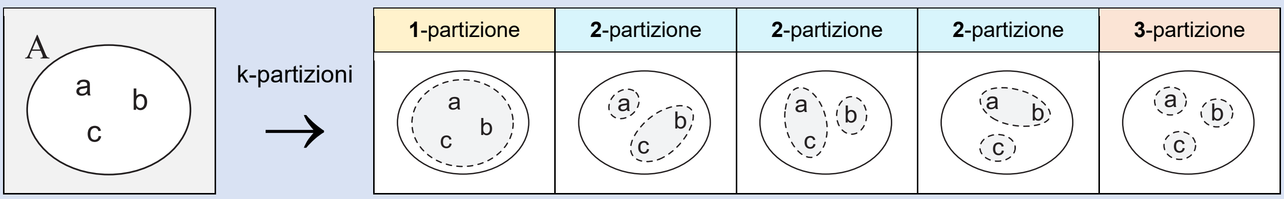
Definizione

Il numero di possibili partizioni di un insieme composto da n elementi si chiama **numero di Bell** e si indica con $\mathcal{B}_n$.

Definizioni

Si chiama **k-partizione** di un insieme A, qualsiasi partizione di A composta da k sottoinsiemi (il caso illustrato sopra è un esempio di *5-partizione* di A). Il numero di possibili k-partizioni di un insieme composto da n elementi si chiama **numero di Stirling (di seconda specie)** e si indica con $\left\{ n \atop k \right\}$ (simile al simbolo di coefficiente binomiale ma con le parentesi graffe).

Esempio: Se $A = \{a, b, c\}$ è l'insieme allora si hanno le seguenti k-partizioni $\downarrow$.



7.2) Ragionando sui casi possibili, cerca di compilare la tabella a fianco, scrivendo il valore dei numeri di Stirling $\left\{ {n \atop k} \right\}$ per tutti i valori di k con n che va da 0 a 4 (la colonna relativa a $n = 3$ è già stata compilata).

$n \rightarrow$ / $k \downarrow$	0	1	2	3	4
0				0	
1				1	
2				3	
3				1	
4				0	
Numeri di Bell $\mathcal{B}_n$				**5**	

Per definizione di k-partizione è evidente che per $m > n$ risulta $\left\{ {n \atop m} \right\} = 0$ (infatti è impossibile suddividere A in più parti dei suoi elementi). Nel caso in cui $n > 0$, anche $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ vale 0 (per partizionare un insieme <u>non vuoto</u> A ci vuole almeno un sottoinsieme). Nel caso particolare $A = \varnothing$ (per cui $n = 0$) si pone per definizione $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$

Ciò detto, e alla luce delle definizioni, è evidente che vale la seguente:

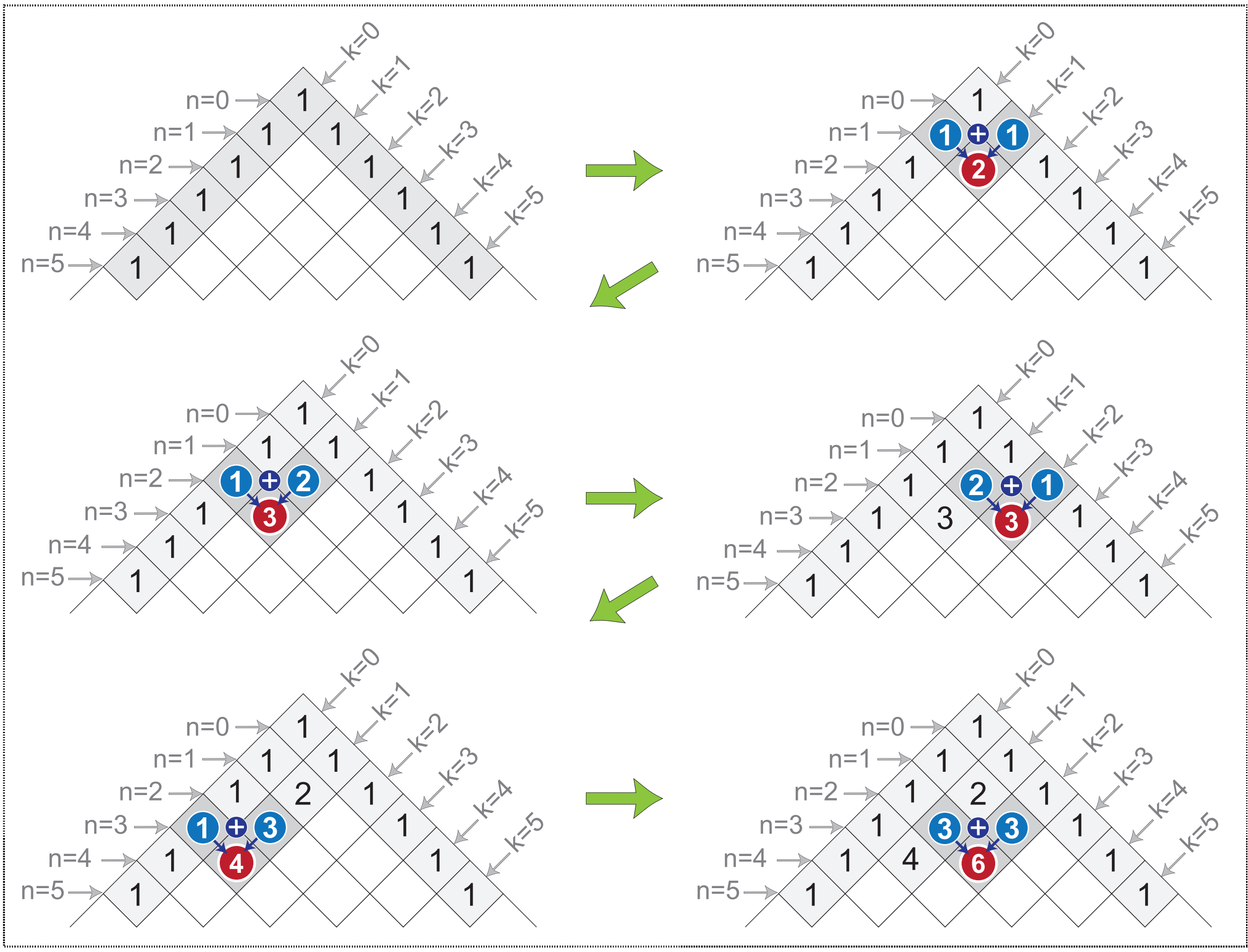
Relazione fra *numeri di Stirling* e *numeri di Bell*: $\Longrightarrow$ Per $n > 0$ vale che $\mathcal{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$

Non è un caso se la simbologia adottata per descrivere i numeri di Stirling sia tanto simile a quella dei coefficienti binomiali: come vedremo è possibile costruire un *triangolo di Stirling*, simile per struttura al *triangolo di Tartaglia*. Mettiamo a confronto le proprietà dei due tipi di coefficiente:

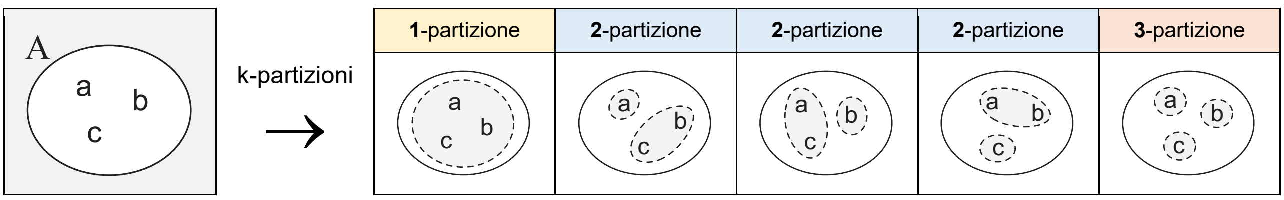
Coefficienti binomiali	**Numeri di Stirling**
Valori a bordi	Valori a bordi
per $n \geq 0$ vale che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	per $n > 0$ vale $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$
Valori oltre i bordi	Valori oltre i bordi (per $n > 0$)
per $m < 0$ e $m > n$ vale che $\binom{n}{m} = 0$	per $m \leq 0$ e $m > n$ vale che $\left\{ {n \atop m} \right\} = 0$
Proprietà ricorsiva detta "Formula di Stifel"	Proprietà ricorsiva, "Formula di Stirling"
per $n \geq 0$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$	per $n \geq 0$ $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \ldots$?

Come sappiamo, le proprietà dei coefficienti binomiali sopra elencate, permettono di costruire ricorsivamente, una riga alla volta, il *triangolo di Tartaglia* (*vedi in basso* ↓). Purtroppo non disponiamo al momento di alcuna proprietà ricorsiva che ci permetta di fare altrettanto con in numeri di Stirling.

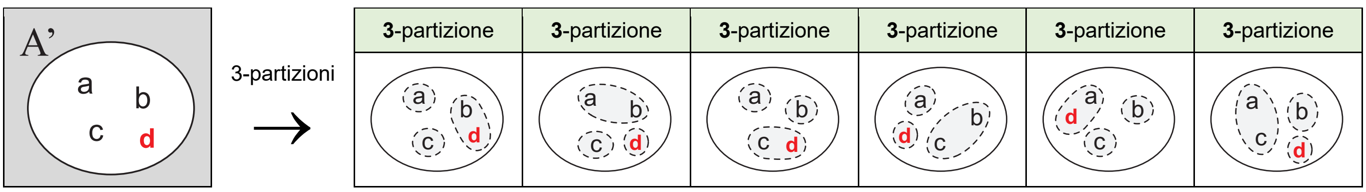
Costruzione del triangolo di Tartaglia



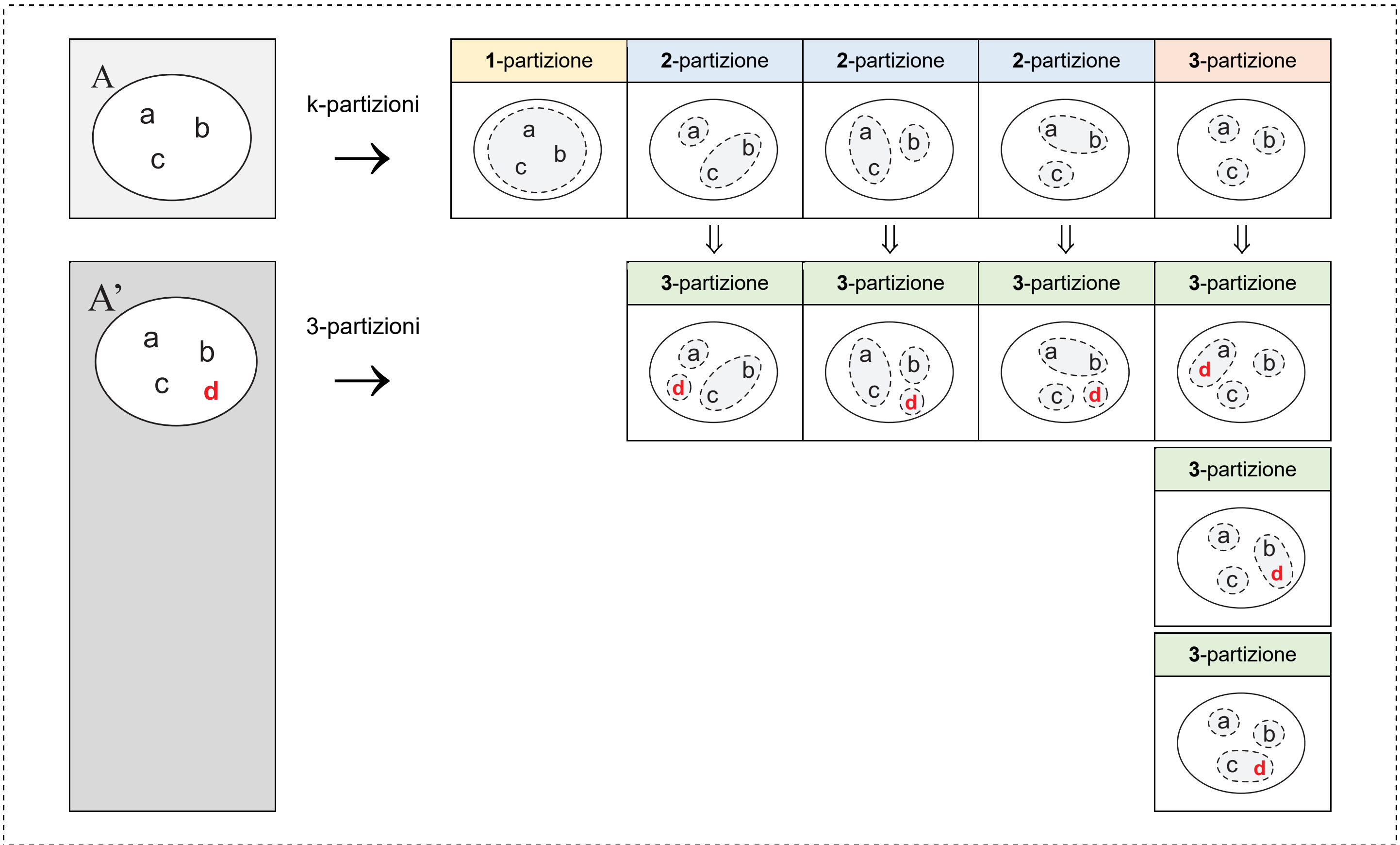
Cerchiamo di scoprire insieme un modo per esprimere la grandezza $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}$ in funzione di altri valori di "riga precedente" come $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ o $\left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}$. A questo scopo riprendiamo l'insieme $A = \{a, b, c\}$ di $n = 3$ elementi visto in precedenza:



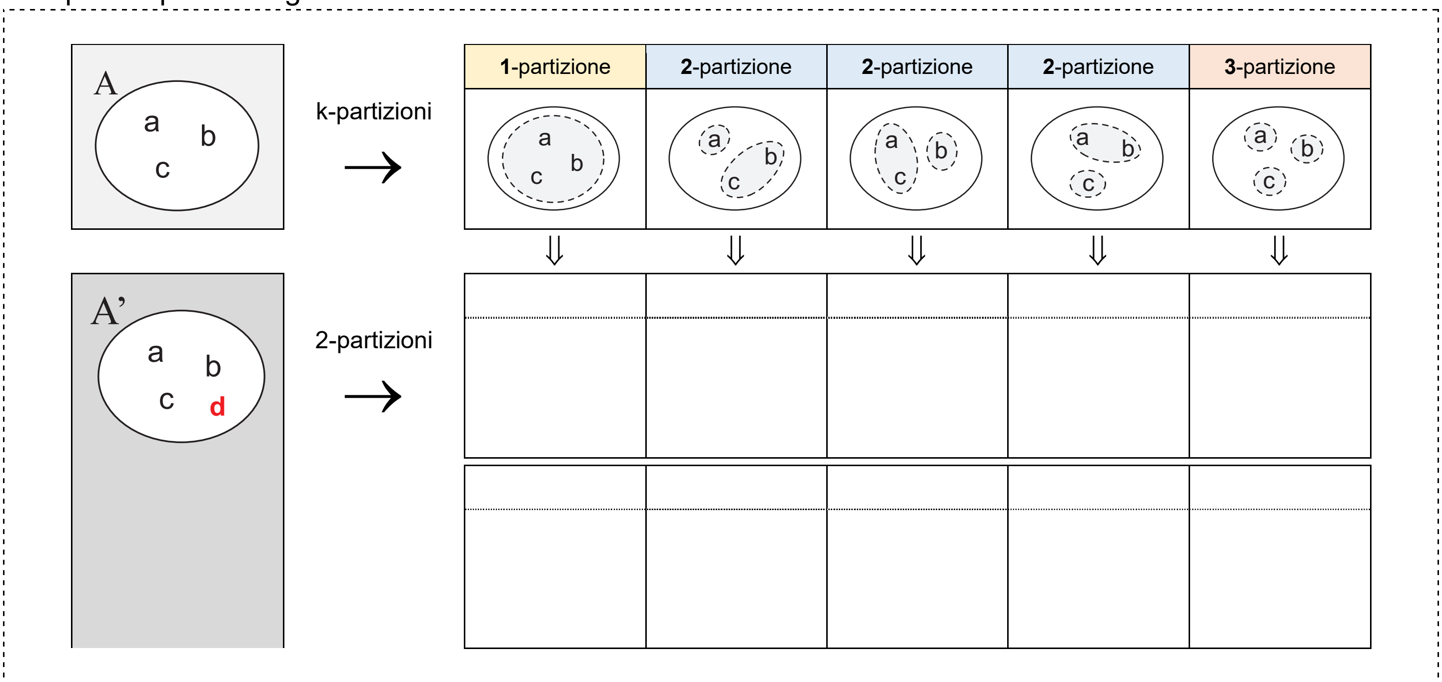
Aggiungiamo un quarto elemento $\boxed{d}$ a creare $A' = \{a, b, c, \boxed{d}\}$ ed analizziamo le sue sei 3-partizioni.



A prima vista non sembra esserci nessun legame fra le partizioni dei due insiemi (né tantomeno fra il loro numero). Disponendo però le 3-partizioni di A' nel modo mostrato in basso, riconosciamo che ciascuna di esse può essere vista come “generata” (in un unico modo) da una partizione di A. Per la precisione, aggiungendo $\{\boxed{d}\}$ ad ogni 2-partizione di A si ottiene una 3-partizione di A' e aggiungendo l’elemento $\boxed{d}$ a uno qualsasi dei tre sottoinsiemi della 3-partizione di A, viene generata una diversa 3-partizione di A':



7.3) Se avete capito il procedimento, cercate di elencare e quindi contare le 2-partizioni di A' mettendole sotto le rispettive partizioni generatrici.



La cosa importante da osservare, è che il procedimento sopra descritto che permette di creare le partizioni di A' a partire dalle partizioni di A <u>genera effettivamente tutte le partizioni</u> di A' <u>una volta soltanto</u>.

Abbiamo per ora affrontato esclusivamente casi particolari $n=3$ e, per alcuni valori di k, $n=4$. Cerchiamo di generalizzare il procedimento visto, consideriamo i due insiemi A di n elementi e $A'=A\cup\{\bullet\}$ di $n+1$ elementi e supponiamo di conoscere il numero delle k-partizioni di A, in particolare $\left\{ n \atop k-1 \right\}$ e $\left\{ n \atop k \right\}$. Volendo ora determinare il numero $\left\{ n+1 \atop k \right\}$ di k-partizioni A', possiamo cercare di ricostrurile a partire dalle partizioni di A.

Per la precisione, si generano <u>tutte e sole</u> le partizioni di A' in uno dei seguenti due modi:

(1) Aggiungendo l'insieme $\{\bullet\}$ a tutte le (k-1)-partizioni di A
(2) Aggiungendo l'elemento $\bullet$ a tutti i k sottoinsiemi che compongono ciascuna delle k-partizioni di A.

Per convincerci che ciascuna nuova partizione così creata sia unica e che tutte le partizioni di A' possano essere effettivamente generate in questo modo, osserviamo che qualsiasi k-partizione di A' può essere ricondotta in modo univoco alla partizione generatrice di A (*vedi esempi in basso*) semplicemente togliendo l'elemento $\bullet$ o l'insieme $\{\bullet\}$, cosa che <u>è sempre possibile fare</u>.

Esempio

Siano $A=\{a,b,c,d\}$ e $A'=\{a,b,c,d,\bullet\}$ e consideriamo le seguenti 3-partizioni di A'. $S'=\{\{a,b\},\{c,d\},\{\bullet\}\}$ e $T'=\{\{a,b\},\{c,\bullet\},\{d\}\}$. Le funzioni generatrici di A sono rispettivamente $S=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ e $T=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$.

Riassumendo abbiamo trovato la legge fondamentale $\boxed{\left\{ n+1 \atop k \right\} = \left\{ n \atop k-1 \right\} + k\cdot\left\{ n \atop k \right\}}$ e quindi la seguente tabella che riassume le proprietà *dei numeri di Stirling* (è stato aggiunto il caso particolare del numero di partizioni dell'insieme vuoto). Siamo ora in grado di costruire il triangolo di Stirling.

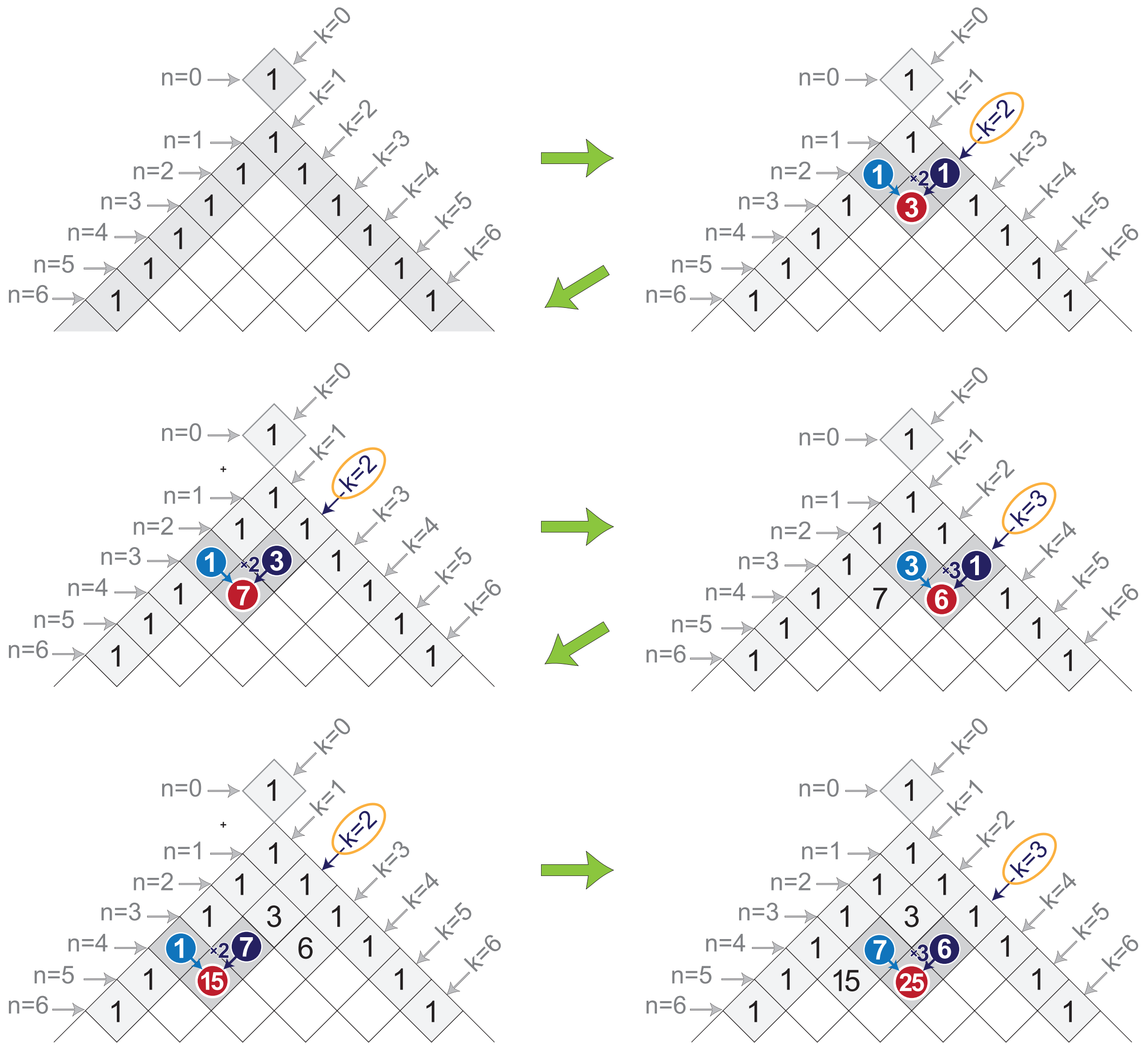
Numeri di Stirling

Caso particolare	Valori a bordi
$\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$	per $n>0$ vale $\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = 1$

Valori oltre i bordi (è escluso il *Caso particolare*)
per $m\le 0$ e $m>n$ vale che $\left\{ n \atop m \right\} = 0$

Proprietà ricorsiva
per $n\ge 0$ vale che $\left\{ n+1 \atop k \right\} = \left\{ n \atop k-1 \right\} + k\cdot\left\{ n \atop k \right\}$

Costruzione del triangolo di Stirling



Ora tocca a te: **7.4)** Costruisci il seguente *triangolo di Stirling*:

Triangolo di Stirling

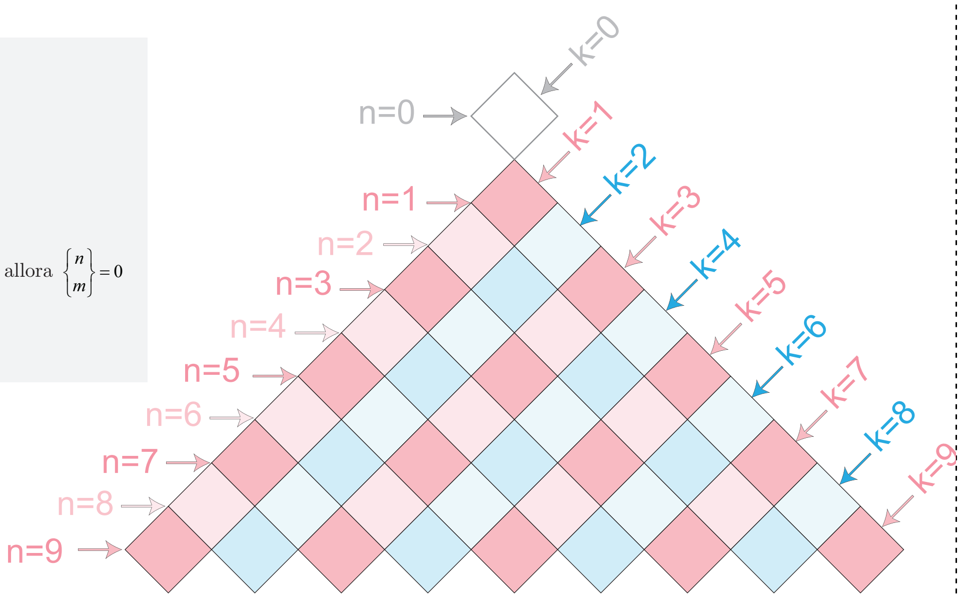
Proprietà

Valori ai bordi: per $n>0$ vale che $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{1}=\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{n}=1$

Valori per $n=0$: $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{0}{0}=1$ e per $k\neq 0$ $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{0}{k}=0$

Valori “oltre i bordi”: per $n>0$, se $m\leq 0 \ \vee \ m>n$ allora $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{m}=0$

Legge ricorsiva: $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n+1}{k}=\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k-1}+k\cdot\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}$



7.5) Calcola i seguenti *numeri di Bell*:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{B}_n$	**1**						

Ci siamo dati un gran daffare a determinare i *numeri di Stirling*, sebbene il loro utilizzo pare ridursi al problema (apparentemente di scarsa utilità) di contare il numero di k-partizioni. I prossimi esempi (specialmente il primo) dovrebbero convincerci del contrario:

7.6a) Considera i cinque simboli A, B, C, D, E. Quante diverse parole da 10 lettere di possono creare, in modo che in ogni parola ciascun simbolo occorra almeno una volta?

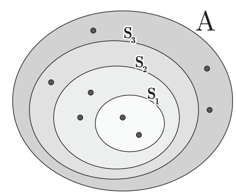
7.6b) Generalizziamo il problema precedente: dati *k* simboli diversi, quante diverse parole da *n* lettere di possono creare, tali che ognuna contenga almeno una volta ciascuno dei *k* simboli?

7.7) Problemi che si risolvono ricorrendo ai *numeri di Stirling* (ti conviene utilizzare i numeri che hai calcolato precedentemente).

a) In quanti modi è possibile suddividere una comitiva di 7 persone in 4 gruppi?

b) Il cinema Odeon ha quattro sale dove vengono proiettati 4 film diversi. Un gruppo di 7 persone decide di andare a cinema e di separarsi, in modo da commentare i quattro i film all'uscita. In quanto modi è possibile eseguire la scelta? Valuta bene in che cosa questo problema differisce dal precedente.

c) Considera un insieme A formato da 8 elementi. In quanti modi si può creare una "catena" di 3 sottoinsiemi S_1, S_2, S_3 tale che $\varnothing \subset S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset A$? Nota bene: i simboli di inclusione sono tutti stretti, per cui non è ammesso che due sottoinsiemi siano uguali, che S_1 sia l'insieme vuoto, né che S_3 sia A stesso.



d) Il problema è quasi identico al problema precedente, stavolta però S_1 può anche essere l'insieme vuoto.

e) Il problema è quasi identico al problema precedente, stavolta però non solo S_1 può essere l'insieme vuoto, ma S_3 può anche coincidere con l'insieme A.

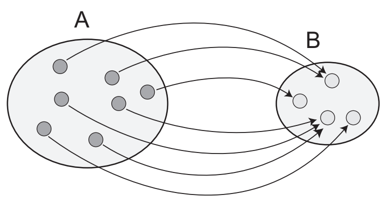
f) Il numero 9.699.690 è il prodotto dei primi 8 numeri primi (da 2 a 19). Quante catene formate da 3 numeri naturali diversi N_1, N_2, N_3 hanno la caratteristica che N_1 è un divisore di N_2, N_2 è un divisore di N_3 e N_3 è un divisore di 9.699.690? Nota bene: sono consentiti anche i divisori banali.

g) In quanti modi è possibile partizionare l'insieme $\{1,2,3...,10\}$ in modo che <u>non vi siano sottoinsiemi</u> che contengano sia numeri pari che numeri dispari? Esempio: $\{\{1\},\{3,5,7\},\{9\},\{2,4\},\{6,8,10\}\}$ è accettabile, mentre $\{\{1,3,5,7\},\{2,4\},\{6,8,9,10\}\}$ no, visto che $\{6,8,9,10\}$ contiene sia numeri pari che dispari.

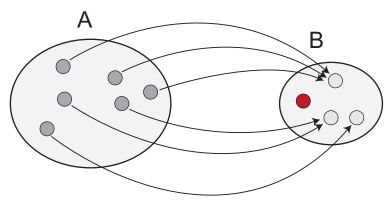
h) In quanti modi è possibile partizionare l'insieme $\{1,2,3...,10\}$ in modo che <u>ogni sottoinsieme</u> contenga almeno un numero pari e un numero dispari? Esempio: $\{\{1,10\},\{2,3\},\{4,7,9\},\{5,6,8\}\}$ è accettabile, mentre $\{\{1,2,10\},\{3,7,9\},\{4,5,6,8\}\}$ no, visto che $\{3,7,9\}$ contiene solo numeri dispari.

i) Si chiama **funzione**, una legge che associa <u>in modo univoco</u> ad <u>ogni elemento</u> di un insieme A un elemento di un insieme B. Per esempio la legge "fare il quadrato" associa ad ogni elemento a di $\mathbb{Z}$ un elemento b di $\mathbb{N}_0$, detto **immagine di k** (attraverso la funzione). Con la legge del quadrato, l'immagine di 3 è 9, l'immagine di -3 è di nuovo 9 mentre l'immagine di 10 è 100.

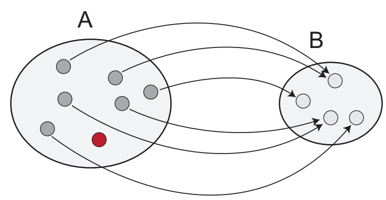
Una funzione si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è l'immagine di almeno un elemento di A. Per capire meglio il concetto considera i diagrammi sottostanti: le frecce rappresentano le coppie definite dalla rispettiva funzione.



Il diagramma descrive effettivamente una funzione suriettiva.



Il diagramma <u>non</u> descrive una funzione suriettiva perché c'è un elemento di B che non è collegato da nessuna freccia.



Il diagramma <u>non</u> descrive una funzione (tantomeno suriettiva), perché c'è un elemento di A dal quale non "parte" nessuna freccia.

La domanda è: dato un insieme A composto da n elementi e un insieme B composto da m elementi, quante sono le funzioni suriettive da A a B?

j) Cerca di spiegare perché vale la seguente circostanza: (tratto dal sito di *Mauro Fiorentini*, http://www.bitman.name/home/)

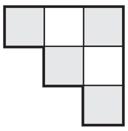
> Il numero di sequenze di *n* interi da 1 a *k*, tali che ogni intero compaia almeno una volta e la sua prima occorrenza preceda la prima occorrenza del numero superiore, è uguale a $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k}$

Esempio: con $n=4$ e $k=3$ le sequenze sono: $\{1;1;2;3\}$, $\{1;2;1;3\}$, $\{1;2;3;1\}$, $\{1;2;2;3\}$, $\{1;2;3;2\}$, $\{1;2;3;3\}$.

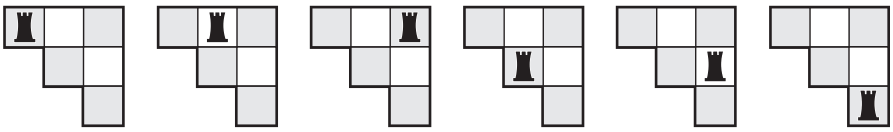
k) Cerca di spiegare perché vale la seguente circostanza (ti conviene ragionare sulla legge ricorsiva che permette di contare il numero di posizioni permesse aggiungendo una riga per volta): (tratto dal sito di *Mauro Fiorentini*, http://www.bitman.name/home/)

> Su una scacchiera triangolare di lato n, le diverse collocazioni di k torri tali per cui nessun pezzo possa mangiarne un altro è uguale a $\genfrac\{\}{0pt}{}{n+1}{n+1-k}$ (nota bene: le torri si possono muovere lungo una colonna o una riga).

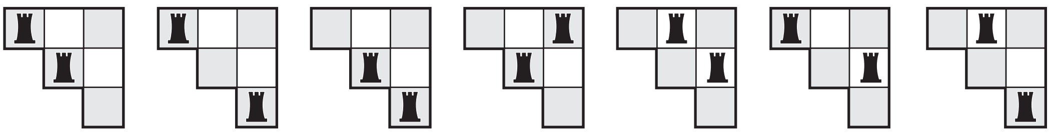
Nessuna torre
$\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{4}=1$



Una torre
$\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{3}=6$



Due torri
$\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{2}=7$



Tre torri
$\genfrac\{\}{0pt}{}{4}{1}=1$