Parlando di combinazioni abbiamo incontrato i coefficienti binomiali e abbiamo citato il *Triangolo di Tartaglia*. Questo foglio di lavoro ci permetterà di indagare la natura combinatorica del Triangolo e di scoprirne alcune caratteristiche.

Definizione
Si chiama *polinomio omogeneo* di grado *n* un qualsiasi polinomio formato soltanto da monomi di grado *n*.

Esempio
$5x^3yz-4x^5$ è un polinomio omogeneo di grado 5, $5x-4y+2z$ è un polinomio omogeneo di grado 1, mentre $10x^3yz-4x^5+7$ e x^4-x non sono polinomi omogenei (*nota bene: nel primo caso a rompere l'omogeneità è il termine noto che ha grado* 0).

Osservazione
Fissate le variabili in gioco (per esempio x e y), esistono esattamente $n+1$ monomi di grado n che non siano simili fra loro: si tratta di $\alpha_0 x^n$, $\alpha_1 x^{n-1}y$, $\alpha_2 x^{n-2}y^2$, …, $\alpha_{n-1}xy^{n-1}$ e $\alpha_n y^n$ (dove $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ sono i coefficienti).

Definizione
Il polinomio omogeneo di grado n più generale possibile ha la forma $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}y+\alpha_2x^{n-2}y^2+...+\alpha_{n-1}xy^{n-1}+\alpha_ny^n$, con $\alpha_i\in\mathbb{R}$ (eventualmente qualche coefficiente può anche essere nullo). Diremo un polinomio scritto così (monomi nulli compresi), in "**forma completa**".

Esempio
La forma completa di $11x^2y-4y^3$ è $0x^3+11x^2y+0xy^2-4y^3$.

Problema
6.1) È facile convincersi che il prodotto fra un polinomio A, omogeneo di grado n e un polinomio B, omogeneo di grado m, è ancora un polinomio omogeneo C.

- **a)** Quale è il grado di C?
- **b)** Moltiplicando fra loro A e B con il procedimento classico (ogni monomio di A per ogni monomio di B) e prima ancora di sommare fra loro i monomi simili, quanti monomi si ottengono (supponendo che A e B siano scritti in forma completa)?
- **c)** Di quanto monomi è composto C?

Il problema precedente mostra come il prodotto fra polinomi omogenei generi in prima battuta un buon numero di monomi simili fra loro, il che non rende facile determinare a priori quali siano i coefficienti risultanti. La struttura letterale del polinomio è invece nota, si tratta infatti di un polinomio omogeneo di cui si conoscono il grado e le variabili.

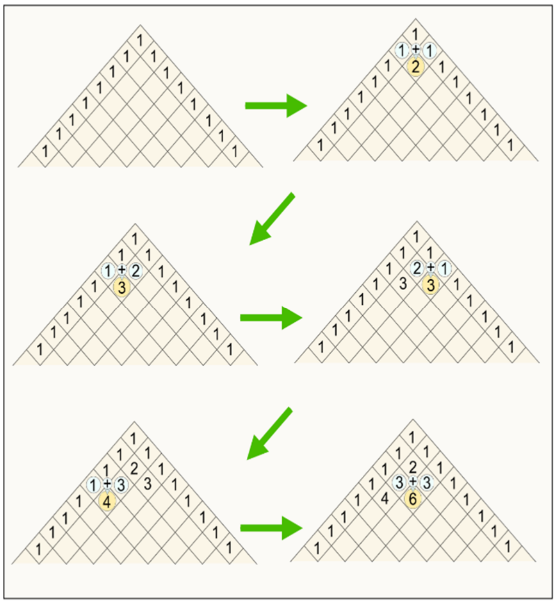
Esempio

Consideriamo il polinomio omogeneo $A = 5x^3 + 2x^2y + 1xy^2 + 3y^3$ e il prodotto $C = A\cdot(x+y)$. Sicuramente C è un polinomio nelle variabili x, y, omogeneo di grado 4 ed ha quindi la forma $C = \alpha_0 x^4 + \alpha_1 x^3 y + \alpha_2 x^2 y^2 + \alpha_3 xy^3 + \alpha_4 xy^3$. Riscriviamo $A\cdot(x+y)$ come $A\cdot x + A\cdot y$ e compiliamo la seguente tabella dei coefficienti **(6.2)**:

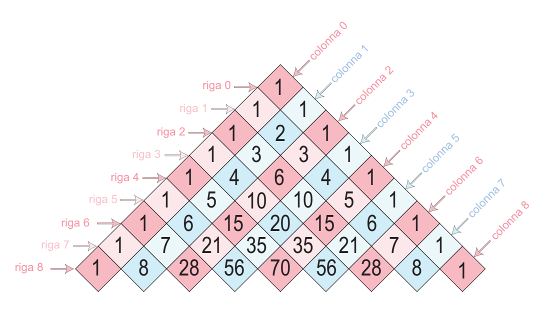
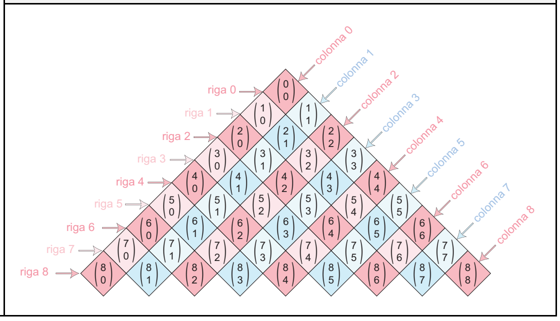
	x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$A\cdot x$	5	2	1	3	
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$A\cdot y$		5	2	1	3
$A\cdot(x+y)$					

Lo schema sovrastante svela la costruzione del *Triangolo di Tartaglia* e il suo legame con la potenza del binomio. Partiamo infatti da un polinomio omogeneo (in x, y) e moltiplichiamolo n volte per $(x+y)$: ad ogni moltiplicazione si otterrà un altro polinomio omogeneo, i cui coefficienti sono uguali alla somma dei coefficienti affiancati del precedente (supponendo per semplicità che i coefficienti oltre gli estremi siano uguali a 0). Se il polinomio di partenza è 1 si ottiene proprio $1\cdot(x+y)^n = (x+y)^n$, con i coefficienti calcolati secondo lo schema in basso:

schema di costruzione del ***Triangolo di Tartaglia***

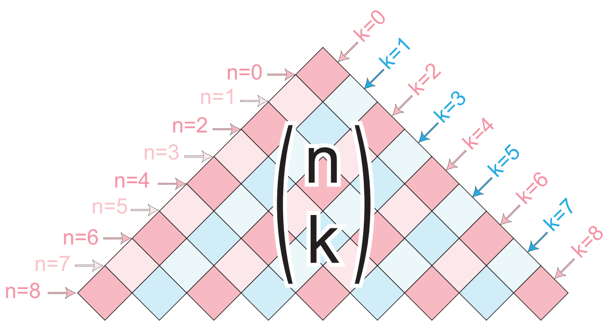


Resta aperta una questione importante: perché i coefficienti del Triangolo di Tartaglia (che si ottengono per somme successive) sono uguali ai coefficienti binomiali (che invece si calcolano con dei prodotti in frazione)? Espresso in termini più “combinatori”: perché i numeri del *Triangolo di Tartaglia* sono delle combinazioni (senza ripetizione)?

Triangolo di Tartaglia	$\Leftrightarrow$	Coefficienti binomiali
		

$$\Downarrow$$

Descrizione del Triangolo di Tartaglia con i coefficienti binomiali



Valori ai bordi:	per $n \geq 0$ vale che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
Valori “oltre” i bordi: *	per $m < 0$ e $m > n$ vale che $\binom{n}{m} = 0$
Proprietà “di Tartaglia”	per $n \geq 0$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

* Da notare che i “valori oltre i bordi” (graficamente quelli lateralmente esterni al triangolo) non hanno alcuna interpretazione combinatoria. Ponendoli però uguali a 0, resta valida la “proprietà di Tartaglia” anche esternamente al triangolo (infatti 0+0=0 e, vicino ai bordi, 0+1=1) e ciò consente di enunciare molte altre proprietà senza dover distinguere fra bordo e numeri interni.

Per rispondere alla questione dell’interpretazione combinatorica del *Triangolo di Tartaglia*, consideriamo la costruzione della potenza del binomio come prodotto iterato del binomio stesso. Supponiamo per esempio di voler sviluppare la potenza $(x+y)^3$ eseguendo la moltiplicazione $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$ e <u>senza spezzare il calcolo in prodotti intermedi</u>. Per far ciò, bisogna moltiplicare ogni monomio del primo binomio per ogni monomio del secondo per ogni monomio del terzo, come mostrato nella tabella in basso.

Rappresentazione della moltiplicazione tra i tre monomi	Monomio risultante
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	x^3
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	x^2y
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	x^2y
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	xy^2

$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	x^2y
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	xy^2
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	xy^2
$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	y^3

In blu sono messi in rilievo tutti i prodotti che generano il monomio x^2y. Ciò avviene in esattamente tre casi, il che spiega perché nel cubo di binomio $(x+y)^3$ il coefficiente applicato a x^2y è appunto 3. Potremmo seguire lo stesso ragionamento per $(x+y)^5$ e chiederci, ad esempio, quale sia il coefficiente applicato a x^3y^2. Scrivere tutta la tabella sarebbe troppo laborioso (32 righe), possiamo però ragionare in termini più astratti: la potenza $(x+y)^5$ rappresenta il prodotto incorniciato in basso:

$$\boxed{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)}$$

Perché una moltiplicazione generi x^3y^2 è necessario che in 3 dei 5 monomi venga usata la x e negli altri la y e ciò può essere fatto in $\binom{5}{3}$ modi. Possiamo applicare lo stesso ragionamento ad una potenza qualsiasi

$$(x+y)^n = \boxed{\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\ fattori}}$$

Per ottenere $x^k y^{n-k}$ sarà necessario scegliere k volte la x (e quindi automaticamente $n-k$ volte la y) e ciò si può fare in $\binom{n}{k}$ modi diversi. Possiamo riassumere quanto detto in una formula generale per la potenza del binomio:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Capita spesso in matematica di dover esprimere una somma usando “i puntini”: ciò rende l’espressione lunga (perché l’uso dei puntini sottintende una regolarità che deve emergere dai casi presentati) e non sempre chiara. Esiste un metodo molto più elegante per rappresentare la stessa somma:

$$\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k}$$

Definizione

Qualsiasi somma $a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_n$ può essere riscritta in forma di **sommatoria** $\sum_{k=0}^{n} a_k$. L'indice k può essere sostituito da un lettera diversa, per esempio $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_j$, senza che ciò modifichi in alcun modo il risultato (discorso diverso per la n). In modo analogo $a_1+a_2+a_3+...+a_N$ si può riscrivere come $\sum_{k=1}^{N} a_k$ e in generale $a_I+a_{I+1}+a_{I+2}+...+a_F$ come $\sum_{k=I}^{F} a_k$ (gli indici I e F stanno per "inizio" e "fine")

Per riscrivere una somma in forma di sommatoria bisogna trovare il modo di esprimere ogni addendo in funzione del suo indice. Così ad esempio la somma $1+2+3+4+...+n$ diventa banalmente $\sum_{k=1}^{n} k$, mentre la somma "casuale" $2+6,5+\pi$ non consente una riscrittura rapida, se non definendo ad hoc la successione $H_0=2$; $H_1=6,5$; $H_2=\pi$ e poi scrivendo $2+6,5+\pi=\sum_{j=0}^{2} H_j$ (si tratta di un'operazione di scarsa utilità). Prima di passare agli esercizi osserviamo che in generale una stessa somma può essere tradotta in modi diversi in termini di sommatoria facendo slittare l'indice: ad esempio $1+2+3+4+...+n$ è sia $\sum_{k=1}^{n} k$ che $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)$ (per convincersi dell'equivalenza fra le due sommatorie, basta analizzare ogni singolo addendo).

6.3) Riscrivi le seguenti somme in forma di sommatoria. A titolo di esempio i primi due casi sono già risolti:

	Somma	Sommatoria
	$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$	$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$
	$m+(m+1)+(m+2)+...+M$	$\sum_{a=m}^{M} a$
a)	$1^2+2^2+3^2+...+20^2$	
b)	$3^3+4^3+5^3...+20^3$	
c)	$2+4+6+8+...+100$	
d)	$1+3+5+7+...+99$	

e)	$3y+4y+5y+...+13y$	
f)	$2x^1+3x^2+4x^3+5x^4+...+101x^{100}$	
g)	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{20}$	
h)	$(1)+(1\cdot 2)+(1\cdot 2\cdot 3)+(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)+....+(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)$	
i)	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...+\frac{99}{100}$	
j)	$\frac{1}{1^2+1}+\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{4}{4^2+1}+...$	
k)	$-1^1+2^2-3^3+4^4-5^5+6^6-7^7+...\pm n^n$ **(difficile)**	
l)	$\underbrace{1-1+1-1+1-1\pm...\mp 1}_{n\ addendi}$ **(difficile)**	

In matematica si incappa frequentemente in somme di infiniti termini. Il buonsenso suggerisce che una somma del genere sia infinita (perlomeno se gli addendi sono tutti positivi), ma il buonsenso sbaglia! Per ora non ci preoccupiamo di questo aspetto, accontentandoci di tradurre le somma infinte con sommatorie che utilizzino il simbolo ∞.

6.4) Riscrivi le seguenti somme in forma di sommatoria. A titolo di esempio i primi due casi sono già risolti:

	Somma	Sommatoria
	$1+2+3+4+...$	$\sum_{j=1}^{+\infty} j$
a)	$10+20+30+...$	
b)	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...$	
c)	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm...$	

d)	$\frac{\sqrt{2}}{2^2+\pi}+\frac{\sqrt{3}}{3^2+\pi}+\frac{\sqrt{4}}{4^2+\pi}+\frac{\sqrt{5}}{5^2+\pi}+\ldots$	
e)	$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$	

6.5) Riscrivi le seguenti sommatorie in forma di somma (usando i puntini). A titolo di esempio i primi due casi sono già risolti:

	Sommatoria	Somma
	$\sum_{n=1}^{20} n^n$	$1^1+2^2+3^3+4^4+\ldots+20^{20}$
	$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$	$1+x+x^2+x^3+\ldots$
a)	$\sum_{j=1}^{10} 2^j+3^j$	
b)	$\sum_{L=0}^{8} \frac{L^2+1}{L!}$	
c)	$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}$	
d)	$\sum_{k=1}^{20} \frac{k-1}{k(k+2)}$	
e)	$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n+k}$	
f)	$\sum_{j=1}^{n} 3$	
g)	$\sum_{h=1}^{12} \frac{(-1)^h}{\sqrt{h+\sqrt{h+1}}}$	
h)	$\sum_{j=1}^{50}\left[4j+(-1)^j\right]$	
i)	$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{n-k}{k}$	

j)	$\sum_{k=1}^{33} \frac{3k+1}{3k-1}$	
k)	$\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\binom{n+l}{l}$	

Quando abbiamo lavorato con i numeri di Fibonacci, non avevamo a disposizione il simbolo di sommatoria e siamo stati costretti a introdurre molti simboli, e questo soltanto per poter enunciare in modo sintetico le proposizioni che riguardavano somme. Ecco la lista dei simboli che introdotti:

Simbolo	Espressione	Spiegazione	Esempio
$S(n)$	$S(n) = F_1 + F_2 + ... + F_n$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci. Chiamiamo $S(n)$ *successione somma*.	$S(3) = F_1 + F_2 + F_3 =$ $= 1+1+2 = 4$
$D(n)$	$D(n) = F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1}$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice dispari	$D(3) = F_1 + F_3 + F_5 =$ $= 1+2+5 = 8$
$p(n)$	$p(n) = F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n}$	Somma dei primi n numeri di Fibonacci di indice pari	$P(3) = F_2 + F_4 + F_6 =$ $= 1+3+8 = 12$
$Q(n)$	$Q(n) = F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2$	Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci	$Q(3) = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 =$ $= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
$SS(n)$	$SS(n) = S(1) + S(2) + ... + S(n)$	Somma delle prime n *successioni somma* (vedi sopra)	$SS(3) = S(1) + S(2) + S(3) =$ $= \{F_1\} + \{F_1 + F_2\} + \{F_1 + F_2 + F_3\} =$ $= \{1\} + \{1+1\} + \{1+1+2\} = 7$

Come risulta evidente, il simbolo di sommatoria rende i simboli sovrastanti superflui. Il prossimo esercizio consente inoltre di verificare l'eleganza della nuova simbologia:

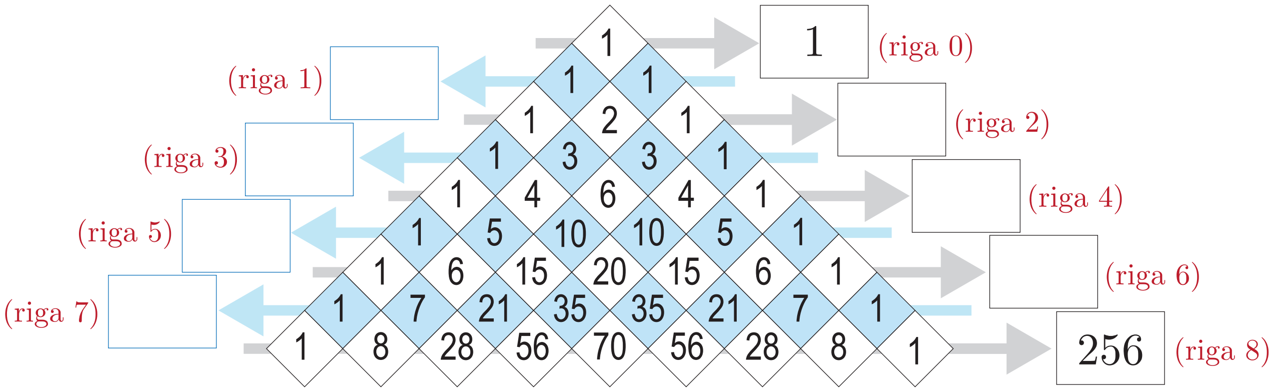
6.6) Alla luce della sovrastante tabella dei simboli, traduci le seguenti proposizioni sui numeri di Fibonacci:

	Enunciato con i simboli S, D, p, Q, SS	Enunciato senza i simboli S, D, p, Q, SS ma con il simbolo di sommatoria
a)	per ogni $n \in \mathbb{N}$ $S(n) = F_{n+2} - 1$	
b)	per ogni $n \in \mathbb{N}$ $D(n) = F_{2n}$	
c)	per ogni $n \in \mathbb{N}$ $Q(n) = F_n F_{n+1}$	
d)	$S(n+1) + F_n = 2 \cdot S(n) + 1$ per $n \in \mathbb{N}$	

e)	$p(n) = F_{2n+1} - 1$ per $n \in \mathbb{N}$	
f)	$D(n) \cdot [p(n)+1] = Q(2n)$ per $n \in \mathbb{N}$	
g)	$SS(n) = F_{n+4} - n - 3$ per $n \in \mathbb{N}$	

Fatto proprio il simbolo di sommatoria, possiamo continuare ad esplorare il *triangolo di Tartaglia*.

6.7a) Calcola la somma dei numeri delle prime 7 righe del *triangolo di Tartaglia* (scrivi i risultati nei riquadri in basso).



6.7b) Alla luce dei numeri scritti in alto, riesci a ipotizzare una formula per calcolare $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$?

6.8) Cerchiamo di dimostrare rigorosamente la formula vista sopra in 3 modi diversi:

6.8a) (DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA)

L'identità $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, quindi, in particolare, per $x = 1$ e $y = 1$. Che forma assumono i due membri dell'equazione in questo caso?

6.8b) (DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE)

Concludi la seguente dimostrazione assumendo che $\binom{n}{k}$ esista anche per $k<0$ e $n>0$ e che in questi casi valga $\binom{n}{k}=0$. In questo modo la formula $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ resta valida <u>sempre</u> (anche per i casi ai bordi).

Tesi: per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale che $P(n)$: $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}= \quad}$

$P(0)$	per un certo n vale $P(n)$		$P(n+1)$
$\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}=\binom{0}{0}=1$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=$	$\Rightarrow$	$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=$
(da verificare)	(da assumere come vera)		(da dimostrare)

Dimostrazione del passo induttivo

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n+1}\left\{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right\}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\cancel{\binom{n+1}{k}}+\cancel{\binom{n}{-1}}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\ldots$$

6.8c) (DIMOSTRAZIONE COMBINATORIA)

Considera un insieme A composto da n elementi. È richiesto di contare il numero di possibili sottoinsiemi di A (compresi $\varnothing$ e A stesso) in due modi diversi:

Conteggio 1

Ogni elemento di A può stare o può non stare in un suo sottoinsieme S. Messi in fila gli n elementi, ogni S è determinato da una scelta del tipo "fa parte" (X) o "non fa parte" (O) della "parola" scritta in basso.

X	X	O	X	…	O	O

n caselle

Si tratta del calcolo di possibili disposizioni con ripetizione. La soluzione è …

Conteggio 2

Ragioniamo come prima e calcoliamo le possibili "parole" di *n* lettere composte da X e O. Stavolta però fissiamo il numero *k* di X presenti nella parola: da $k=0$ (nessun elemento, per cui si tratta dell'insieme vuoto) a $k=n$ (tutti gli elementi, si tratta di A stesso).

X	X	O	X	…	O	O

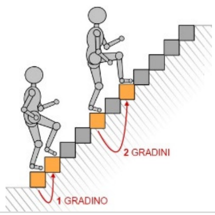
n caselle con k *"X"*

L'insieme di possibili parole è ovviamente la somma di tutte combinazioni calcolate. Tale somma è …

$\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

Per trovare una nuova proprietà del *Triangolo di Tartaglia*, utilizziamo nuovamente la strategia combinatoria del "doppio conteggio" applicata ad un problema che forse qualcuno si ricorderà:

Un bambino vuole salire una rampa composta da 10 gradini. La sua altezza gli permette di salire ad ogni passo di uno o al massimo due gradini. Potrebbe quindi compiere 10 passi da un gradino o magari 5 da due, oppure scegliere un'andatura irregolare come 2-1-2-1-1-2-1. Quante diverse scelte può effettuare?



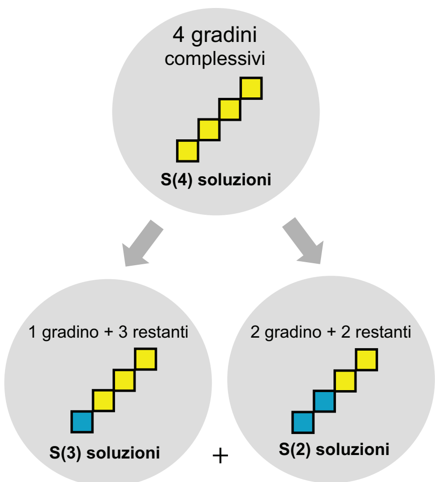
6.9) Dopo aver letto il **Conteggio 1**, compila la tabella del **Conteggio 2**

Conteggio 1

Il modo migliore per risolvere la questione è quello di complicare il problema un gradino alla volta. Chiamiamo per semplicità $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$ il numero di soluzioni con 1,2,3… gradini. Il nostro scopo è quello di calcolare $S(10)$

Numero gradini complessivi	Soluzioni S(n)	Spiegazione
1	1	(1)
2	2	(1+1) oppure (2)
3	3	(1+1+1) oppure (2+1) oppure (1+2)
….	…	…

Supponiamo ora di trovarci davanti una scala composta da 4 gradini, e concentriamo l'attenzione soltanto sul primo passo. Esso può essere di 1 gradino oppure di due. Nel primo caso si avranno ancora $S(3)$ modi per arrivare in fondo alla scalinata, nel secondo caso $S(2)$ (*vedi figura in basso* $\downarrow$). Si ha allora la relazione $S(4)=S(3)+S(2)$ cioè $S(4)=3+2=5$.



Conteggio 2

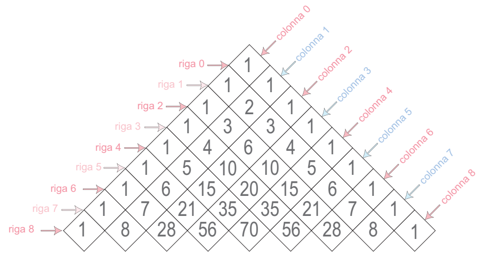
Suddividiamo il problema in una scelta che avviene in due tempi: in primo luogo scegliamo in numero di "passi lunghi" da effettuare e poi calcoliamo il numero di "camminate possibili" (distribuendo i passi lunghi sul numero di passi complessivi):

Passi lunghi **L** (da due gradini)	Passi corti **C** (da un gradino)	Passi complessivi (**L**+**C**)	Camminate possibili (per salire 10 gradini)
0			
1			
2			
3			
4			
5			
	TOTALE		

Abbiamo così ottenuto che l'undicesimo numero di Fibonacci (89) si può scrivere come somma di coefficienti binomiali.

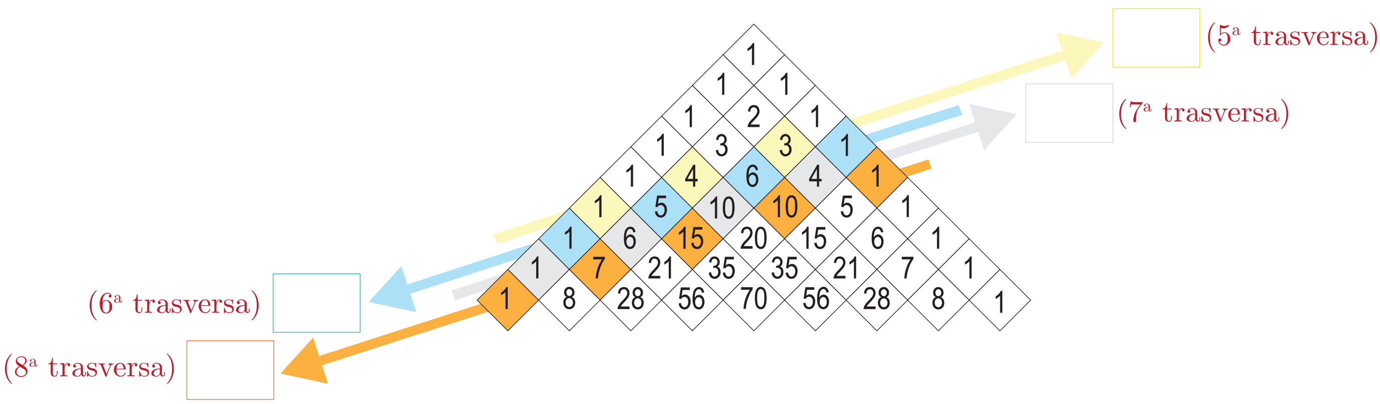
6.8b) Annerisci i numeri del *Triangolo di Tartaglia* sottostante, corrispondenti ai coefficienti binomiali scritti sopra:

Il ragionamento per calcolare $S(5)$ è identico al precedente: risulterà $S(5)=S(4)+S(3)$ cioè $S(4)=5+3=8$. Visto che $S(1)=1$ e $S(2)=2$ e che, per costruzione, i numeri $S(n)$ sono la somma dei due predecessori, abbiamo a che fare con numeri di Fibonacci, per la precisione $S(n)=F_{n+1}$. Ma allora $S(10)=F_{11}=89$.



Immaginando un problema composto da 11 gradini (anziché 10) avremmo ottenuto con il **conteggio 1** il numero F_{12}, con il **conteggio 2** la somma di altri coefficienti binomiali. Il seguente problema mette in luce "geometricamente" dove pescare i coefficienti binomiali per ottenere nella somma i numeri di Fibonacci:

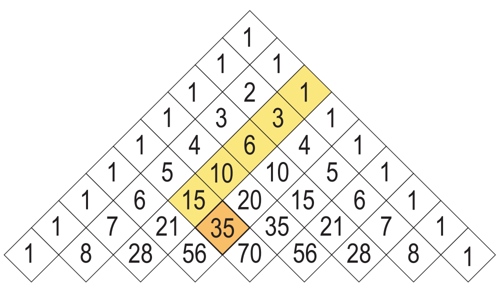
6.10a) Calcola le somme dei numeri "sulle frecce" nel seguente *triangolo di Tartaglia*.



6.10b) Ipotizzando come al solito che per $k<0$ e $k>n$ si abbia $\binom{n}{k}=0$, cerca di scrivere la relazione appena trovata tra coefficienti binomiali e numeri di Fibonacci utilizzando il simbolo di sommatoria:

$$F_{n+1} = \boxed{}$$

6.11) Nel triangolo di Tartaglia a fianco sono messi in rilievo numeri appartenenti ad una stessa colonna $(1,3,6,10,15)$ e la cella posta in basso a destra di tale fila (35). È facile verificare che il numero di quest'ultima cella è uguale alla somma dei numeri precedenti $(1+3+6+10+15=35)$.



a) Il fenomeno appena osservato è accidentale o vale per qualsiasi fila in colonna?

....

....

b) Esprimi la legge in forma compatta utilzzando il simbolo di sommatoria.

c) Nelle figure in basso sono rappresentate alcune immagini che suggeriscono il meccaniscmo alla base della legge scritta sopra . Riusciresti a descrivere a parole perché vale la legge che hai scritto?