



È opportuno riassumere quanto visto finora e dare gli strumenti per affrontare i problemi di Calcolo Combinatorio con ordine e metodo.

Per risolvere un problema si può operare sostanzialmente in tre modi: il primo consiste nel costruire, o anche solo immaginare, una struttura che contenga esattamente una volta tutte le configurazioni ammesse dal problema stesso. In base alla regolarità della struttura si può effettuare così il calcolo dei casi possibili. Nel caso in cui si tratti di un albero a diramazioni regolari, sarà necessario moltiplicare fra loro il numero di diramazioni di ciascun livello, nel caso in cui si vogliano collegare strutture che rappresentano scelte alternative e incompatibili fra loro, bisognerà invece sommare il numero di foglie. La struttura ad albero si presta molto bene a rappresentare i raggruppamenti che prevedano un qualche tipo di ordine (prima scelta, seconda scelta e così via).

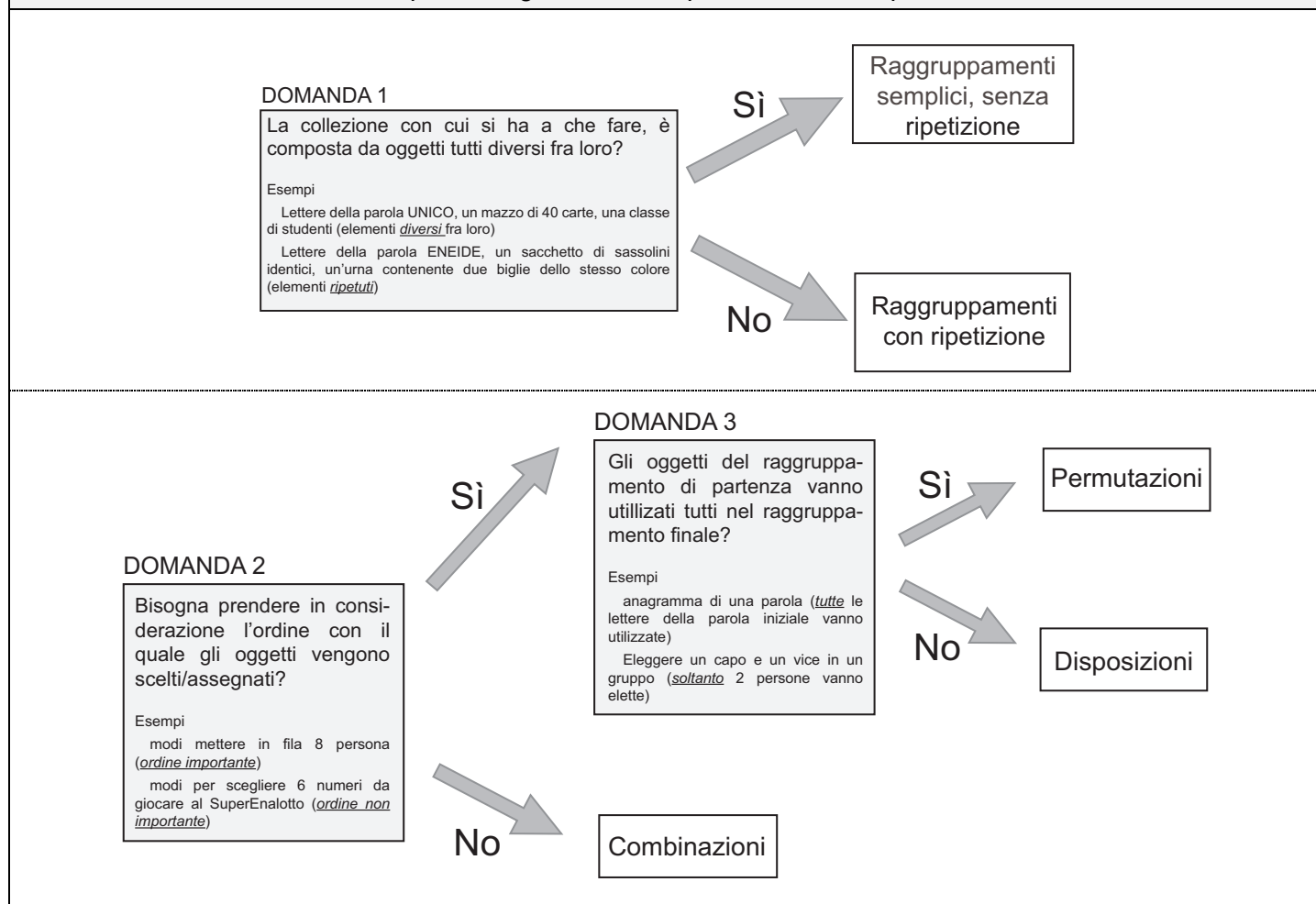
Il secondo metodo consiste nel costruire una “funzione ricorsiva semplice” o “a triangolo” capace di riprodurre le quantità che si vogliono contare. Si tratta di un procedimento che non abbiamo ancora mai incontrato e che non approfondirò qui.

Il terzo modo di procedere è quello di riconoscere nel raggruppamento proposto una configurazione nota (tra quelle sotto elencate) e applicare la rispettiva formula. Attenzione: questo metodo si basa sull'assunzione che il raggruppamento con cui si ha a che fare sia proprio una permutazione, una disposizione o una combinazione. Se quest'assunzione non può essere fatta, si rischia di riconoscere un raggruppamento “classico” anche quando “classico” non è (cioè si riconoscono permutazioni, disposizioni e combinazioni laddove non ci sono).

- Permutazione semplice
- Permutazione con ripetizione
- Disposizione senza ripetizione
- Disposizione con ripetizione
- Combinazione semplice
- Combinazione senza ripetizione

Come vi sarete accorti, la difficoltà non consiste tanto nell'applicare le formule, quanto nel capire di volta in volta quale usare. Saper classificare i problemi è la capacità principale che bisogna sviluppare nel Calcolo Combinatorio. Esistono vari stratagemmi per imparare quest'arte, il primo dei quali si basa sullo schema in basso. Esso si compone di due domande (ed eventualmente di un quesito supplementare), che permettono di indirizzarvi verso il raggruppamento corretto (sempre che si tratti di un raggruppamento classico):

## Schema da utilizzare per distinguere fra loro permutazioni, disposizioni e combinazioni



Purtroppo la semplicità dello schema è spesso illusoria perché lascia spazio a sottigliezze interpretative. Considerate ad esempio il caso di mettere  $n$  sassolini in  $k$  scatole etichettate in maniera diversa, l'esempio che abbiamo usato per introdurre le *combinazioni senza ripetizione*. Valutate poi la domanda 2: “Bisogna prendere in considerazione l'ordine con il quale gli oggetti vengono assegnati?”. Bisogna rispondere “No” perché è irrilevante l'ordine con il quale i sassolini vengono messi in una determinata scatola o “Sì”, perché le scatole non possono essere mischiate fra loro e quindi il loro ordine è importante? Nel caso specifico è corretta la risposta “No”, è però evidente come lo schema proposto possa non essere facile da utilizzare.

Un metodo pratico è quello di ideare e tenere a memoria uno o più **problemi – prototipo** per ciascun tipo di raggruppamento. Una volta che una situazione può essere schematizzata mediante uno dei prototipi, essa è automaticamente classificata e quindi risolta.

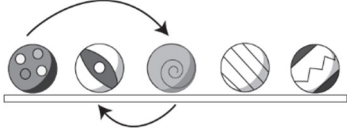
Consideriamo ad esempio come problema prototipo quello di annerire  $k$  caselle su una fila composta da  $n$  caselle bianche. Esso è un esempio di *combinazione*, il cui numero complessivo è  $\binom{n}{k}$ . Il problema di contare le diverse estrazioni del Superenalotto (una pesca di 6 numeri su 90) può essere riformulata immaginando una persona che annerisca i numeri estratti su una schedina che contiene i numeri da 1 a 90: abbiamo così ridotto l'estrazione del Superenalotto al problema di annerire le caselle (di cui conosciamo la soluzione); le possibili estrazioni sono  $\binom{90}{6} = 622.616.630$ .

Si tratta ora di ideare per ogni tipo di raggruppamento un problema possibilmente semplice, chiaro e trasferibile a situazioni diverse: è un'operazione molto personale che riflette i gusti e la mentalità di chi la fa. A seguire un possibile catalogo:

## PERMUTAZIONI SENZA RIPETIZIONI

Dati  $n$  oggetti distinti, si chiama **permutazione senza ripetizioni** ogni riordino degli  $n$  oggetti.

### Rappresentazione



### Esempi

Contare gli anagrammi di una parola composta da  $n$  lettere diverse.

Contare i modi per mischiare un mazzo di  $n$  carte diverse.

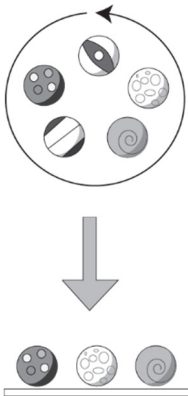
### Metodo di calcolo o formula

$$n!$$

## DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONI

Si chiama **disposizione senza ripetizioni** una sequenza ordinata di  $k$  oggetti estratti (senza reimmissione) da una collezione di  $n$  oggetti ( $k \leq n$ ) distinti.

### Rappresentazione



### Esempi

Da un mazzo di carte, numeri di modi ordinati per estrarre  $k$  carte con qualche criterio (p.e. semi diversi)

Numeri di modi di estrarre  $k$  biglie da un'urna contenente  $n$  biglie diverse, mettendole in fila nell'ordine di estrazione.

### Metodo di calcolo o formula

$$N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$$

dove  $k$  è il numero di estrazioni e  $N_k$  è il numero di modi di effettuare la  $k$ -esima scelta

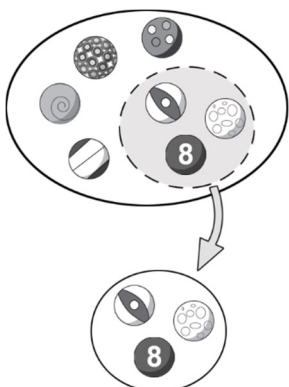
Nel caso in cui le estrazioni non debbano rispettare alcuna particolare condizione, la disposizione si dice *semplice*, valgono le relazioni  $N_1 = n$  e  $N_{j+1} = N_{j-1}$  e quindi la formula

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

## COMBINAZIONI SENZA RIPETIZIONI

Si chiama **combinazione senza ripetizioni**, una collezione di  $k$  elementi estratti senza reimmissione e senza tenere traccia dell'ordine di estrazione da un insieme di  $n$  elementi distinti.

### Rappresentazione



### Esempi

Modi di annerire  $k$  caselle su  $n$ .

Modi per estrarre un gruppo di  $k$  persone da un insieme di  $n$  persone.

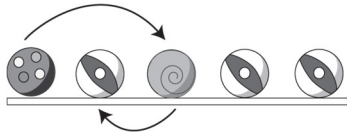
### Metodo di calcolo o formula

$$\binom{n}{k}$$

## PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONI

Dati  $n$  oggetti non necessariamente distinti, si chiama **permutazione con ripetizioni** ogni riordino degli  $n$  oggetti.

### Rappresentazione



### Esempi

Contare gli anagrammi di una parola composta da lettere che si ripetono (per esempio AAABBC).

Ripartire un gruppo di persone in sottogruppi.

### Metodo di calcolo o formula

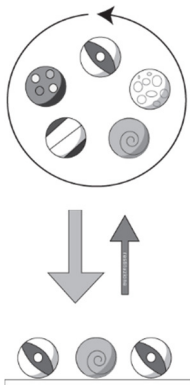
$$\frac{n!}{(m_1!)(m_2!)\dots(m_r!)}$$

dove  $m_j$  indica il numero di esemplari identici del  $j$ -esimo oggetto. Conteggiando anche i casi con  $m_j=1$ , si ha che  $m_1+m_2+\dots+m_r=n$

## DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI

Si chiama **disposizione con ripetizioni** una sequenza ordinata di  $k$  oggetti estratti con reimmissione da una collezione di  $n$  oggetti distinti.

### Rappresentazione



### Esempi

Da un'urna contenente  $n$  biglie diverse, ripetere per  $k$  volte la seguente operazione: estrarre una biglia, segnare il risultato, rimettere la biglia nell'urna. Contare gli esiti possibili.

Numero di stringhe formate da  $k$  simboli (anche ripetuti) scelti da un alfabeto composto da  $n$  simboli diversi.

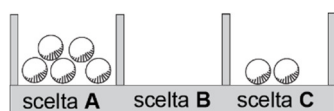
### Metodo di calcolo o formula

$$n^k$$

## COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI

Si chiama **combinazione con ripetizione**, una collezione di  $n$  elementi scelti in un ordine qualsiasi, ciascuno anche più di una volta, da un campionario di  $k$  oggetti distinti.

### Rappresentazione



### Esempi

Dati  $n$  sassolini uguali fra loro e  $k$  scatole etichettate, numero di modi di riporre i sassolini nei contenitori.

Modi diversi (ordine compreso) di rappresentare un numero naturale  $n$  come somma ordinata di  $k$  numeri naturali (0 compreso).

### Metodo di calcolo o formula

$$\binom{k+n-1}{n}$$

## Problemi di riepilogo

### 5.1) Impostare i canali

Considerando soltanto le 7 emittenti televisive più importanti, in quanti modi possibili si possono sintonizzare i primi 7 canali della *TV* (in modo che su ogni canale vi sia esattamente una delle 7 reti)?

### 5.2) Il popolo cariato

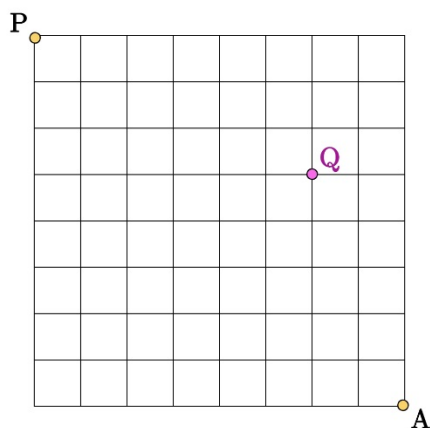
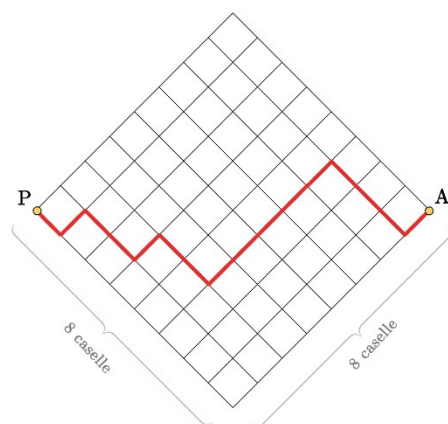
Per una strana malattia, in una nazione ogni cittadino ha almeno un dente cariato e nessun cittadino ha esattamente gli stessi denti cariati di un altro. Ogni individuo è quindi univocamente identificato dalla posizione delle sue carie. Quanti cittadini può avere al massimo questo Stato?

### 5.3) Annerire le caselle

- In quanti modi possono essere annerite  $k$  caselle in una tabella con  $n$  caselle bianche?
- In quanti modi si possono annerire un numero arbitrario di caselle (eventualmente anche nessuna o tutte) in una tabella con  $n$  caselle bianche?

### 5.4) Percorsi $P \rightarrow A$

Il reticolo  $8 \times 8$  disegnato a fianco rappresenta un insieme di strade. Per arrivare da  $P$  ad  $A$  bisogna procedere tassativamente verso destra, scegliendo ad ogni incrocio una delle due biforcazioni (sempre che non si sia già arrivati al bordo destro, nel qual caso la scelta è obbligata). Quanti percorsi  $P \rightarrow A$  esistono? (nel disegno a fianco è mostrato un possibile itinerario  $\rightarrow$  )



### 5.5) Percorsi $P \rightarrow Q \rightarrow A$

In quanti modi è possibile partire da  $P$  e arrivare ad  $A$ , percorrendo 16 segmenti del reticolo  $8 \times 8$  raffigurato a fianco e passando tassativamente per  $Q$ ? (da notare che percorrendo 16 segmenti si effettua un "percorso minimo", si tratta infatti di andare complessivamente di 8 segmenti a destra e di 8 in basso).

### 5.6) 4 pedoni bianchi e 4 pedoni neri

Avendo a disposizione 4 pedoni bianchi e 4 pedoni neri quanti modi esistono per disporli a casaccio su una scacchiera (che ha 64 caselle numerate)?

### 5.7) Numeri di 9 cifre

- Quanti numeri di 9 cifre esistono (nel sistema decimale)?
- Quanti di questi numeri sono composti da 9 cifre diverse?

### 5.8) I numeri con il "3"

Considerando tutti i numeri fra 1 e 9999...

- Quanti numeri contengono almeno una volta la cifra 3?
- Quanti numeri contengono esattamente due volte la cifra 3?

### 5.9) Sette con 3 dadi

In quanti modi diversi si può fare 7 lanciando 3 dadi?

### 5.10) 22 giocatori

22 ragazzi vogliono dividersi in due squadre per disputare una partita. In quanti modi si può realizzare la suddivisione in due gruppi (ovviamente A contro B equivale a B contro A)?

### 5.11) Torneo di tennis con 4 giocatori

4 giocatori di tennis vogliono organizzare un torneo di doppio (cioè con partite con 2 giocatori per parte) in modo tale che ogni giocatore giochi almeno una volta contro ogni altro. Quante partite devono essere disputate?

### 5.12) Torneo di tennis con 7 giocatori

7 giocatori di tennis vogliono organizzare un torneo di doppio in modo tale che ogni giocatore giochi almeno una volta contro ogni altro. Quante partite devono essere disputate?

### 5.13) Suddivisione 4,4 e 5

Un classe di 13 alunni si divide in 3 gruppi di cui due da 4 e uno da 5 studenti. In quanti modi è possibile effettuare la suddivisione se...?

- a) I gruppi hanno mansioni diverse
- b) I gruppi hanno tutti lo stesso compito

### 5.14) Schedine del totocalcio con una colonna

Una schedina del totocalcio contiene una lista di 13 partite, ognuna delle quali può concludersi in tre modi possibili  $(1, X, 2)$

- a) Quante schedine diverse esistono (considerando solo le schedine con un segno a partita)?
- b) Quante di queste schedine contengono esattamente 8 1, 3 X e 2 2?
- c) Quante schedine contengono 8 segni di un tipo, 3 di un altro e 2 di un altro ancora?

### 5.15) Parole con una ripetizione

Quante parole da 5 lettere (dell'alfabeto italiano) si possono creare considerando ammissibili soltanto le parole formate da esattamente 4 lettere diverse (una quindi si deve ripetere)?

### 5.16) Parole con alcune ripetizioni

Quante parole da 6 lettere (dell'alfabeto italiano) si possono formare considerando ammissibili soltanto le parole formate da esattamente 3 lettere diverse?

### 5.17) Estrazioni particolari

Un'estrazione del Lotto consiste in un pesca di 5 numeri da 1 a 90, nella quale l'ordine di estrazione è irrilevante (per esempio le pesche 5,4,1,88,79 e 1,4,5,79,88 rappresentano la stessa estrazione ed è per questo motivo che le estrazioni vengono normalmente citate in ordine crescente, cioè dal numero più piccolo al più grande).

- a) Quante diverse estrazioni prevedono 3 numeri sotto il 50 e 2 numeri dal 50 in su?
- b) Quante estrazioni prevedono 5 numeri composti da 2 cifre e minori di 90 (quindi dal 10 al 89 inclusi) appartenenti a decine diverse? (come 32, 41, 61, 73, 89 mentre 13, 34, 35, 69, 79 non andrebbe bene perché 34 e 35 appartengono entrambi alla decina del 30)

### 5.18) Anagramma di se stesso

Quanti anagrammi della parola "ANAGRAMMA" esistono?

### 5.19) Sassolini crescenti

Bisogna disporre 20 sassolini identici fra loro in 4 scatole contrassegnate con le lettere A,B,C,D, in modo che nella scatola A vi sia almeno un sassolino, in B almeno 2, in C almeno 3 e in D almeno 4. In quanti modi è possibile farlo?

### 5.20) Somma di numeri pari

In quanti modi diversi si può rappresentare il numero 10 come somma di 3 numeri pari? Nota bene: in questo esercizio lo 0 va considerato un numero pari. Rappresentazioni come  $0+2+8$  e  $2+8+0$  sono considerate diverse (e concorrono entrambe al conteggio).

### 5.21) La stanza arcobaleno

Le quattro pareti di una stanza rettangolare vanno dipinte con due colori diversi, in modo che pareti opposte abbiano lo stesso colore. Avendo a disposizione 7 tinte diverse in quanti modi è possibile pittare la stanza?

### 5.22) Due taxi per nove

9 amici chiamano due taxi per andare in aeroporto. Il taxi A può trasportare 5 persone, il taxi B soltanto 4. Quanti modi esistono per dividersi fra i due mezzi?

### 5.23) Numeri disciplinati

Quanti sono i numeri naturali tali che ciascuna delle cifre "1", "2", ..., "8", "9" (quindi senza lo "0") compaia esattamente una volta (come ad esempio 952.137.648)?

### 5.24) Un comitato studentesco

Un certo Liceo ospita 3 sezioni A,B,C per un totale di 15 classi e ciascuna classe è composta da 20 alunni. In quanti modi è possibile formare un comitato di 15 studenti in modo che ciascuna classe sia rappresentata? Riporta il risultato in forma "semicalcolata" come ad esempio  $20! \times 15$  o  $3^{15} - 20$ .

### 5.25) Zii ma non solo

Conta il numero di terne ordinate formate da 3 lettere (dell'alfabeto italiano) nelle quali una lettera compare 2 volte (come  $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{B}$ ).

### 5.26) Delitto in scena

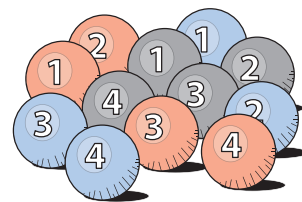
Una piccola compagnia formata da otto attori decide di inscenare un giallo. Bisogna assegnare i ruoli e il copione prevede 1 ispettore, 3 poliziotti, 1 capobanda e 3 scassinatori. In quanti modi può essere effettuata la scelta?

### 5.27) libri sullo scaffale

In una libreria ci sono 10 libri d'arte, 7 libri di biologia e 6 libri di chimica. Volendo allinearli su un unico scaffale in modo che i libri di una stessa materia siano tutti vicini fra loro, in quanti modi possono essere disposti i 23 libri?

### 5.28) Dodici biglie colorate e numerate

In un sacchetto stanno 4 biglie rosse numerate da 1 a 4, quattro biglie blu numerate allo stesso modo e quattro biglie grigie, sempre dello stesso tipo (vedi figura). Estruendo una biglia per volta (per tre volte) e mettendole in fila sul tavolo, quante "file" esistono per cui...



- a) le biglie siano tutte di colore e numero diverso
- b) le biglie siano di colore uguale
- c) le biglie siano di colore diverso
- d) Supponendo di mettere le biglie poste sul tavolo in un altro sacchetto, quanti "sacchetti" diversi esistono per gli esercizi a), b) e c)?

### 5.29) Scuole medie e superiori

Una rappresentanza di docenti è composta da 11 insegnanti delle scuole medie e 9 insegnanti delle superiori. Bisogna eleggere il portavoce del gruppo e il suo vice, tenendo presente che le due cariche devono essere esercitate da insegnanti provenienti da ordini scolastici diversi (se il rappresentante è delle medie il vice deve essere delle superiori e viceversa). In quanti modi può essere effettuata la scelta?

### 5.30) Parole con due lettere uguali

Considerando l'alfabeto italiano (21 lettere), quante parole di 5 lettere esistono, tali che una ed una sola di esse si ripete esattamente due volte (come **AAGTR**) o (**ENSER**)?

## Problemi difficili

Concludiamo questa foglio di lavoro con tre problemi dedicati ai solutori più abili. Avverto che questi problemi sono veramente difficili (per chiunque) e non possono essere risolti se non dopo lunga riflessione, magari in modi diversi da quelli proposti qui.

### 5.31) Sequenza ripide

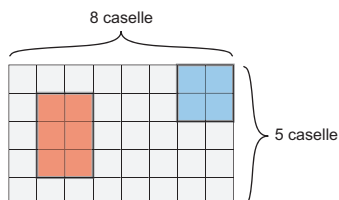
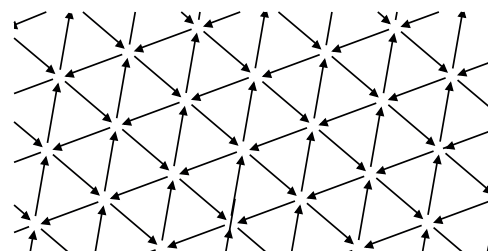
Chiamiamo "sequenza ripida" una successione numerica composta da numeri naturali crescenti e diversi fra loro. Sono sequenze ripide 0,4,5,10 o 4,9,100, mentre non fanno parte della categoria 4,4,8,9 (numeri uguali), né tantomeno 5,2,8 (sequenza non crescente). La domanda è: quante sono le sequenze ripide composte da 5 elementi che iniziano con lo 0 e finiscono con il 30?

### 5.32) Somme di numeri dispari

In quanti modi diversi si può ottenere 21 sommando fra loro 5 numeri dispari? Attenzione, somme composte dagli stessi elementi elencati in ordine diverso (come  $1+3+5+3+9$  e  $5+9+1+3+3$ ) vanno conteggiate separatamente.

### 5.33) Campo di frecce

Nello schema virtualmente infinito illustrato a destra ( $\rightarrow$ ), in ogni punto convergono tre frecce entranti e tre uscenti. Immagina di partire da un certo punto, percorrere complessivamente 9 frecce (rispettando sempre la direzione indicata dalla freccia stessa) e finire esattamente al punto di partenza. Quanti itinerari diversi hanno questa caratteristica?



### 5.34) Rettangoli in gabbia

Data una griglia rettangolare suddivisa in 5 righe e 8 colonne, stabilisci il numero di rettangoli che si possono creare usando per lati le linee della griglia stessa (a fianco sono messi in rilievo due di questi rettangoli). Da notare che ogni quadrato è anche un rettangolo).