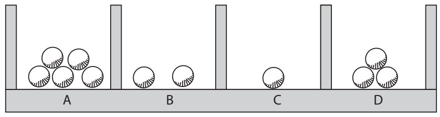
Siamo ormai arrivati quasi alla fine dei raggruppamenti classici, non manca che il seguente:

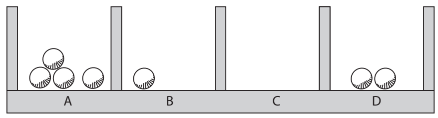
- ## Le combinazioni con ripetizione

Iniziamo subito con due esempi che, come vedremo, sono strettamente correlati. Darò in un secondo momento la definizione di "combinazione con ripetizione":

Problema introduttivo 1
Almeno una biglia per contenitore
11 biglie identiche fra loro vanno disposte in 4 contenitori A,B,C,D facendo in modo che nessun contenitore resti vuoto. In quanti modi è possibile distribuire le biglie? (a fianco → è mostrata una possibile ripartizione)



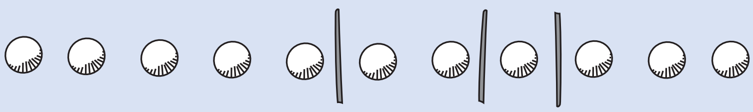
Problema introduttivo 2
Biglie e contenitori senza restrizione
7 biglie identiche fra loro vanno disposte in 4 contenitori A,B,C,D (volendo si potrebbero anche mettere tutte in A). In quanti modi è possibile distribuire le biglie? (a fianco → è mostrata una possibile ripartizione)



Affrontiamo il *Problema Introduttivo 1* e, trovata la soluzione, trattiamo il secondo caso.

Soluzione al *Problema introduttivo 1* - ***Almeno una biglia per contenitore***
Mettiamo le 11 biglie in fila, come mostrato in basso.

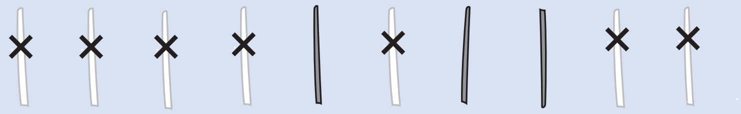
Per scegliere quante biglie mettere in A, quante in B, in C e in D, possiamo utilizzare 3 bastoncini da frapporre fra le sferette a creare 4 gruppi. In basso è mostrato come esempio la seguente distribuzione: 5 biglie in A, 2 in B, 1 in C e 3 in D.



Evidentemente qualsiasi posizionamento dei tre bastoncini rappresenta in modo univoco una diversa ripartizione e, viceversa, ogni possibile ripartizione può essere rappresentata tramite i 3 bastoncini. Il problema può quindi essere ripensato come un posizionamento di 3 "interruzioni" tra le biglie. Con 11 biglie esistono 10 interstizi, per cui il nuovo problema è…

Problema introduttivo 1bis – ***Mettere 3 bastoncini***
In quanti modi si possono scegliere 3 diverse posizioni su 10 possibili?

Soluzione 1 bis
La sequenza *bastoncino Sì* / *bastoncino No* può essere rappresentata dal disegno in basso



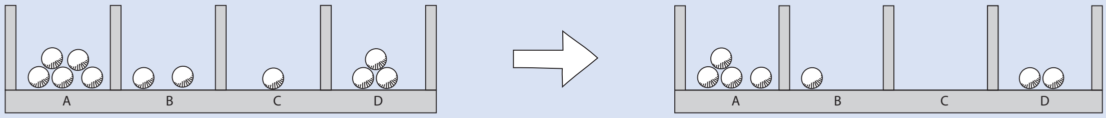
o più comodamente dalla “parola” xxxxBxBBxx. Ad ogni anagramma corrisponde un diverso posizionamento dei bastocini e quindi una diversa ripartizione di biglie, per cui, ragionando in termini di permutazioni con ripetizione, la soluzione ai problemi 1 e 1bis è $\frac{10!}{3!\cdot 7!}$. Più elegantemente, il problema di scegliere 3 caselle su 10 può essere interpretato come combinazione semplice, fornendo la soluzione (equivalente alla precedente) $\binom{10}{3}$.

E’ utile generalizzare quanto visto al caso di n biglie con k contenitori a disposizione. Procedendo come sopra dovremmo mettere $k-1$ bastoncini nei $n-1$ interstizi. La soluzione è quindi $\binom{n-1}{k-1}$ (guarda caso con $n=11$ e $k=4$ si ottiene proprio $\binom{10}{3}$). Possiamo formalizzare quanto visto:

Osservazione
Il numero di modi per disporre n biglie in k contenitori, in modo che ciascun contenitore contenga almeno una biglia, è $\binom{n-1}{k-1}$.

Passiamo ora alla soluzione del problema 2, nel quale, per evitare ambiguità, indicherò il numero di biglie con N (n continuerà a essere il numero delle biglie del problema di tipo 1).

Soluzione al *Problema introduttivo 2* – ***Biglie e contenitori senza restrizione***
Invece di iniziare daccapo, partiamo dal problema 1 appena risolto. Ciascuna delle $\binom{n-1}{k-1}$ soluzioni rappresentava una distribuzione di 11 biglie nelle quattro scatole A,B,C,D, con la condizione che in ogni scatola vi fosse almeno una biglia. Prendiamo una qualsiasi di queste configurazioni e togliamo una biglia per scatola (vedi l’esempio in basso).



Quella che si ottiene sarà ora una ripartizione compatibile con il problema 2: infatti adesso le biglie sono 7 e non si può escludere che qualche scatola sia vuota. Si può anche ragionare in maniera opposta, prendendo una distribuzione compatibile con il problema 2 e aggiungere una biglia per contenitore: le biglie tornano ad essere 11 con la certezza che nessuna scatola resterà vuota.
Questo discorso dovrebbe convincerci che i problemi 1 e 2 descrivono sostanzialmente la stessa questione e hanno necessariamente la stessa soluzione. Indicati quindi con n il numero di biglie di un problema di tipo 1 (restrizione di 1 biglia per scatola), con N il numero di biglie di un problema ad esso associato di tipo 2

(alcune scatole possono anche essere vuote) e con k il numero di contenitori, si ha la relazione $N=n-k$ (nell'esempio precedente $7=11-4$) e quindi $n=N+k$.
Possiamo allora dire che la soluzione al problema di tipo 2 con N biglie e k contenitori è $\binom{n-1}{k-1}=\binom{N+k-1}{k-1}$, che con semplici passaggi matematici, può essere riscritto come $\binom{N+k-1}{N}$.

Abbandoniamo ora per motivi estetici la lettera maiuscola N e tornando alle classiche lettere k,n, possiamo riscrivere l'ultimo risultato così:

Osservazione
Il numero di modi per disporre n biglie in k contenitori è $\binom{k+n-1}{n}$.

Nota bene: per tenere a memoria il senso delle singole lettere, potete immaginare che k rappresenti il numero di **k**ontenitori.

Definizione
Si chiama combinazione con ripetizione di n elementi di un insieme I composto da k oggetti distinti, un gruppo di n elementi di I non necessariamente distinti e disposto in un ordine qualsiasi.

Per capire bene la definizione, il nome "Combinazione con ripetizione" e la relazione che questa definizione ha con i casi risolti precedentemente, consideriamo i seguenti problemi:

Problema introduttivo 3 – ***Tre biglie dall'urna senza restituzione***
Da un'urna contenente 21 biglie etichettate con le lettere dell'alfabeto italiano, si estraggono 3 biglie mettendole in fila sul tavolo e ridisponendole infine in ordine alfabetico. Quante file di questo tipo possono essere create?

Soluzione
Il riordino finale assicura l'irrilevanza dell'ordine di estrazione. Si tratta banalmente di scegliere 3 oggetti su 21 (combinazione semplice) e questo si può fare in $\binom{21}{3}=1330$ modi.

Problema introduttivo 4 – ***Tre biglie dall'urna con restituzione***

Un'urna contiene 21 biglie etichettate con le lettere dell'alfabeto italiano. Per tre volte di fila, si estrae una biglia, si segna la lettera su un foglio e si rimette la biglia nell'urna. Alla fine si comunicano le 3 lettere, leggendole in ordine alfabetico. Quante triplette del genere possono essere create?

Soluzione

La differenza rispetto a prima è che la stessa biglia può essere estratta più di una volta: non è una differenza da poco! Possiamo immaginare il problema in termini di contenitori da riempire (come nel problema 2: *Biglie e contenitori senza restrizione*): le 21 scatole rappresentano le lettere dell'alfabeto e ogni qualvolta una certa lettera viene estratta si pone una biglia nel vano corrispondente. L'estrazione "F,A,F" verrebbe così rappresentata dalla ripartizione con 2 biglie in F, una biglia in A e tutte le altre scatole vuote.

Abbiamo già risolto questo tipo di problema: ponendo $k = 21$ (numero di **k**ontenitori, cioè di lettere possibili) e $n = 3$ (numero di biglie, cioè di estrazioni) si ha la soluzione $\binom{21+3-1}{3} = \binom{23}{3} = 1771$.

Il problema appena risolto rende giustizia al nome "Combinazioni con ripetizioni" e spiega il legame con il problema dei contenitori.

Teorema sulle combinazioni con ripetizione

Il numero di combinazioni con ripetizione di k elementi di un insieme I composto da n oggetti distinti è $\binom{k+n-1}{n}$.

Esempio 1 - ***Una coppetta da 3 palline***

Una gelateria offre gelati di 10 gusti diversi. Quante varianti di coppetta si possono comporre con 3 palline? Nota bene: è ammesso anche scegliere 3 volte lo stesso gusto.

Soluzione

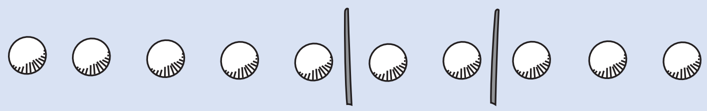
Ragionando per analogia, i gusti sono i contenitori e le biglie rappresentano le palline di gelato. Si ha quindi $k = 10$, $n = 3$ e la soluzione $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$.

Esempio 2 - ***Ottenere 10***

In quanti modi si può scrivere 10 come somma di 3 numeri naturali (0 escluso)? Bada bene, in questo problema i "modi" 4+3+3 e 3+4+3 sono considerate combinazioni diverse.

Soluzione

Stavolta la soluzione si ottiene più facilmente pensando ai "bastoncini" piuttosto che alle formule. Disponendo in fila 10 biglie e separandole con 2 bastoncini si possono creare tutte le somme desiderate (vedi sotto la "ripartizione" 5+2+3.



Gli interstizi sono 9, i bastoncini 2, la soluzione non può che essere $\binom{9}{2} = 36$.

Esempio 3 - ***Pozioni e calcolo combinatorio***

La leggenda narra che, gettando tutte in una volta 3 porzioni di spezia magica in un calderone traboccante sangue di drago, si ottenga l'elisir del Bernoccolo Matematico. Quali spezie usare? Forse 2 porzioni di ali di pipistrello e una di crine di unicorno, o magari 3 porzioni di capelli di fata, chi lo sa! Le spezie magiche sono ben 50, chissà quante combinazioni esistono!

Soluzione

Le 3 spezie (che possono anche ripetersi, come si capisce dagli esempi), vanno gettate tutte insieme, ragion per cui l'ordine della scelta è irrilevante. Possiamo come al solito immaginare i **k**ontenitori delle spezie ($k=50$) e il numero di biglie (numero di porzioni, $n=3$). Si ha $\binom{k+n-1}{n}=\binom{52}{3}=22.100$.

Esempio 4 - ***Numeri in salita***

Escludendo sempre la cifra 0, quanti numeri di 5 cifre esistono, tali che le loro cifre siano disposte in ordine "uguale o crescente"? ("uguale o crescente" significa che una cifra può ripetersi, ma non può mai essere seguita da una minore. Casi accettabili sono quindi 23.678 , 35.558 o addirittura 77.777 mentre 35.823 o 12.324 non andrebbero bene).

Soluzione

Il problema è complesso e per essere risolto necessita di un po' di fantasia. Immaginiamo di scegliere 5 cifre qualsiasi da 1 a 9 (le cifre possono anche ripetersi) e di metterle in fila in ordine crescente. Si ottengono così proprio i numeri "in salita" descritti dal problema. L'estrazione con restituzione da un'urna contenente 9 cifre e la successiva "messa in ordine" (la quale rende irrilevante l'ordine di estrazione), mostra che il problema è assimilabile al *Problema introduttivo 4*, cioè a una combinazione con ripetizione. La soluzione è $\binom{k+n-1}{n}=\binom{9+5-1}{5}=\binom{13}{5}=1287$

Osservazione

Ragionando in modo simmetrico, i numeri "in discesa" saranno anch'essi 1287 . I numeri "monocifra" 11.111, 22.222 , … (9 in tutto) sono gli unici a far parte di entrambi i conteggi. Ricordando che i numeri composti da 5 cifre (senza mai usare lo 0) sono $9^5=59.049$ (disposizione con ripetizione), possiamo concludere che i numeri "Sali e Scendi" sono i più frequenti ($9^5-2\cdot 1287+9=56484$), più del 95% del totale.

4.1) *Elezione*

In una classe di 20 alunni bisogna svolgere le votazioni per eleggere il rappresentante di classe, carica per la quale si sono candidati in 4. Se ogni alunno può esprimere una sola preferenza e allo spoglio tutte le schede risultano valide, in quanti modi diversi può concludersi la conta dei voti? Esempio: una "conta" dei voti potrebbe essere la seguente: al candidato A 10 voti, al candidato B 0 voti, a C 5 voti e a D 5 voti.

4.2) *La confezione sorpresa*

Un'azienda produce 3 tipi di vino e per l'anniversario della sua fondazione ha deciso di mettere in commercio la *confezione sorpresa*: essa è composta da ben 7 bottiglie variegate e l'unica certezza è che vi sia almeno una bottiglia per tipo. Quante *confezioni sorpresa* diverse posso esistere?

- ## Soluzione dei problemi 4.1 – 4.2

4.1) ***Elezione***

Ogni somma composta da 4 addendi naturali il cui risultato è 20, descrive uno spoglio diverso. Così per esempio il caso A 10 voti, B 0 voti, C 5 voti e D 5 voti può essere rappresentato dalla somma 10+0+5+5. Abbiamo già affrontato e risolto il problema di scrivere un numero come somma (0 di pag. 4) . La soluzione è $\binom{k+n-1}{n} = \binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = 1771$

4.2) ***La confezione sorpresa***

Ciascuna confezione può essere associata ad una somma di 3 numeri naturali maggiori di 0: così ad esempio la somma 2+3+2 rappresenterebbe una confezione contenente 2 bottiglie del vino A, 3 bottiglie del vino B e 2 del vino C. Questo tipo di problema è del tutto simile al

di pag. 1 e può essere assimilato a una combinazione con ripetizione mediante la seguente riformulazione: Quante confezioni composte da $7-3=4$ bottiglie esistono, <u>senza</u> che vi sia la certezza che ogni tipo sia presente? Abbiamo ora una classica *combinazione con ripetizioni* con $n=4$ e $k=3$. La soluzione è $\binom{k+n-1}{n} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$

.