Liceo **Matematico**

# Le combinazioni senza ripetizione
scheda di lavoro 3

Liceo Scientifico e Linguistico
**Ettore Majorana**

## • Le combinazioni semplici

Fino ad ora abbiamo visto soltanto casi in cui l'ordine degli elementi giocava un ruolo determinante. Consideriamo adesso un problema di natura diversa:

**Esempio 1 - Vendita di biciclette**
Una persona possiede 5 biciclette diverse (indicate con A, B, C, D, E) e decide di venderne 3. In quanti modi diversi può scegliere?

Notiamo che in questo caso l'ordine è irrilevante: se la persona vendesse A,C,D oppure C,A,D farebbe la stessa identica scelta. Questo tipo di problema si riconduce a un problema relativo alle cosiddette **combinazioni**.

**Definizione**
Si chiama combinazione (semplice) di $k$ elementi di un insieme di $n$ oggetti, un gruppo di $k$ elementi distinti estratto in un ordine qualsiasi dall'insieme. Il numero di combinazioni di $k$ elementi estratti da un insieme di $n$ oggetti si indica spesso con $C_{n,k}$.

Esempio: nel SuperEnalotto si parla opportunamente di "combinazione vincente" e non di "disposizione vincente". L'estrazione dei 6 numeri vincenti, poniamo 10, 20, 30, 40, 50, 60, può infatti avvenire in un ordine qualsiasi.

Torniamo ora al problema delle biciclette e vediamo di risolvere la questione:

**Soluzione del problema *Vendita di biciclette***
Sorprendentemente possiamo ricondurre la questione al conteggio degli anagrammi (di cui oramai conosciamo tutti i segreti). Possiamo infatti descrivere ogni scelta "di vendita" in modo univoco utilizzando una sequenza di 5 simboli. La sequenza $\boxed{v}\boxed{v}\boxed{v}\boxed{x}\boxed{x}$ indicherebbe per esempio la vendita delle bici A,B,C, mentre $\boxed{v}\boxed{x}\boxed{v}\boxed{v}\boxed{x}$ la vendita di A,C,D.
Le possibili scelte di riducono quindi agli anagrammi della parola (con ripetizione) "VVVXX". La soluzione è $\frac{5!}{3!\times 2!}$, perché le uniche due lettere $\boxed{v}$ e $\boxed{x}$ si ripetono una 3 e l'altra 2 volte.

A prima vista potrebbe non risultare chiaro se la strategia da noi adottata abbia validità generale o meno. Cerchiamo quindi di risolvere un altro problema riguardante le combinazioni.

**Esempio 2 - Delegazione di lavoratori**
6 lavoratori di una azienda con 15 dipendenti devono comporre una piccola delegazione. Quante delegazioni diverse possono essere create?

**Soluzione**
Disponendo i lavoratori in ordine alfabetico, potremmo descrivere ogni possibile delegazione barrando su un foglio 6 caselle su 15. Così ad esempio la sequenza |X| | | |X|X| | |X| |X|X| | | | rappresenterebbe in modo univoco i nomi dei 6 dipendenti prescelti. Considerando per semplicità delle O al posto delle caselle rimaste vuote, si tratta di contare gli anagrammi della parola $\underbrace{XXXXXX}\underbrace{OOOOOOOOO}$ .

La soluzione è $\dfrac{15!}{6!\cdot 9!}=5005$.

Evidentemente la strategia funziona. Possiamo facilmente generalizzare il risultato a una classe composta da $n$ studenti da cui "estrarre" una delegazione di $k$ ragazzi (ovviamente deve essere $k \le n$). La parola da anagrammare avrà $n$ lettere, $k$ delle quali saranno delle $\boxed{X}$ e $n-k$ delle $\boxed{O}$. Abbiamo così trovato il seguente risultato

Per le combinazioni semplici vale la formula $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Vista l'importanza di questo risultato, esiste in matematica un simbolo che rappresenta la quantità $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, detta anche *coefficiente binomiale*: $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ e si legge "***n* su *k***". Bisogna prestare attenzione al fatto che **non c'è** il simbolo di frazione (la lineetta) nel simbolo del coefficiente binomiale $\dbinom{n}{k}$. Notiamo che, per definizione, $0!=1$ e quindi $\dbinom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$ e anche $\dbinom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!\cdot 0!}=\dfrac{n!}{n!}=1$. Ragionando sul senso combinatorio di $\dbinom{n}{k}$ possiamo senz'altro affermare che $\dbinom{n}{k}$ è definito se $0\le k\le n$. Riassumiamo…

**Definizione di *Coefficiente Binomiale***
Dati due interi $k,n$ con $0\le k\le n$, si definisce il simbolo $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ .

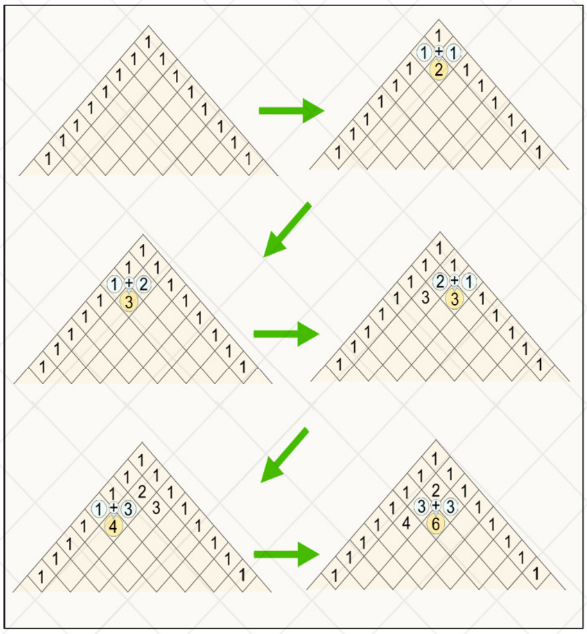
Enunciamo ora di nuovo la proposizione con la nuova simbologia:

**Teorema sulle combinazioni**
Il numero di combinazioni composte da $k$ oggetti diversi di un insieme di $n$ oggetti distinti si indica con $C_{n,k}$ ed è uguale a $\dbinom{n}{k}$.

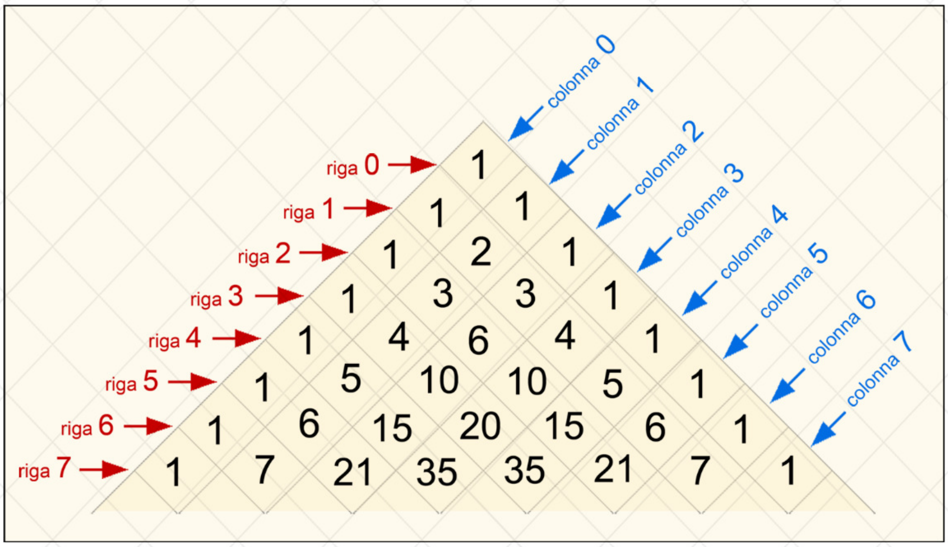
I coefficienti binomiali si ritrovano nel *triangolo di Tartaglia* e naturalmente non si tratta di una coincidenza (affronteremo tale legame tra alcune lezioni).

# IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

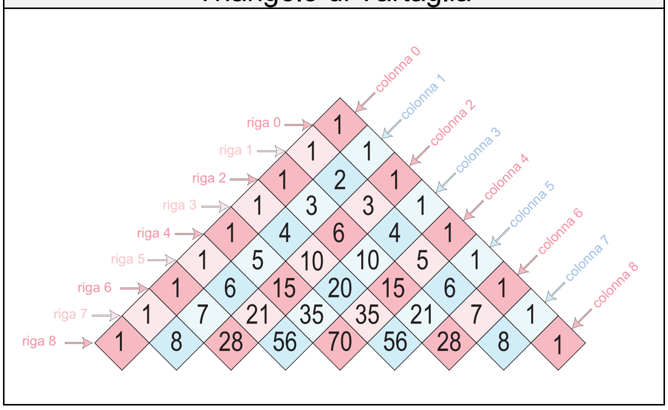
schema di costruzione

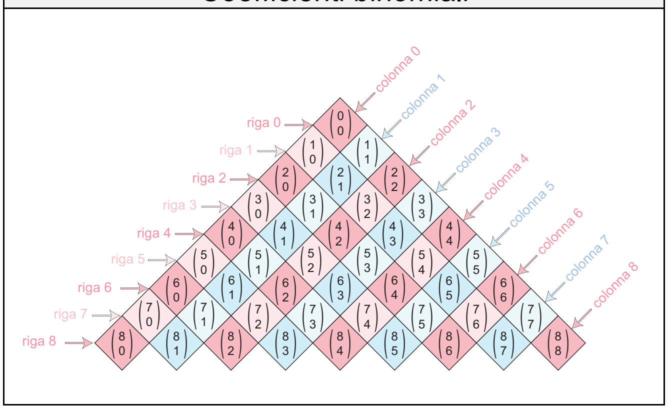


risultato finale




| Triangolo di Tartaglia | ⇔ | Coefficienti binomiali |
|---|---|---|



Per calcolare il valore dei coefficienti binomiali è sconveniente usare la formula $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$: essa genera numeri molti alti che sono destinati in gran parte a semplificarsi. Per trovare una formula più funzionale, è utile ricordare che il numero di combinazioni $C_{n,k}$ è uguale al numero di anagrammi della "parola " formata da $k$ "X" e $n-k$ "O" (vedi sotto):

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{\text{X}}\boxed{\text{X}}...\boxed{\text{X}}}^{k\ volte\ "X"}\boxed{\text{O}}\boxed{\text{O}}...\boxed{\text{O}}}_{n\ lettere\ in\ tutto}$$

Calcolando tale quantità con la tecnica delle permutazioni con ripetizione, otteniamo che…

$$\boxed{\binom{n}{k}=\dfrac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...\cdot(n-k+1)}^{k\ fattori}}{\underbrace{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)...\cdot 1}_{k\ fattori}}}$$

In pratica, per calcolare $\binom{n}{k}$ si scrive una frazione composta al numeratore dal prodotto di $k$ fattori <u>decrescenti</u> a partire da $n$, al denominatore dal prodotto di $k$ fattori <u>decrescenti</u> a partire da $k$ (arrivando quindi fino a 1). Sarà sempre possibile semplificare tutti i fattori al denominatore e ottenere così un numero intero.

Esempio: $\binom{79}{4}=\dfrac{79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{79\cdot 78\cdot 77\cdot \cancel{76}^{19}}{\cancel{4}\cdot 6\cdot 1}=\dfrac{79\cdot \cancel{78}^{13}\cdot 77\cdot 19}{\cancel{6}\cdot 1}=79\cdot 13\cdot 77\cdot 19=1.502.501$

**3.1) Coefficienti binomiali**

Calcolare con il metodo appena descritto e senza l'uso della calcolatrice i valori dei seguenti coefficienti binomiali: $\binom{10}{4}$, $\binom{12}{1}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{24}{20}$

**Esempio 3 - Due gruppi diversi**

Una classe composta da 12 alunni deve dividersi in due gruppi rispettivamente da 5 e da 7 persone. In quanti modi è possibile effettuare tale scelta?

**Soluzione**

Notiamo che ogni possibile scelta del primo gruppo (e anche del secondo) è per definizione una combinazione di 5 elementi (nel secondo di 7) di un insieme composto da 12 elementi. E' evidente che scegliendo uno dei due gruppi automaticamente sarà determinato anche l'altro. Il risultato è quindi $\binom{12}{5}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792$. E' facile verificare che anche partendo dalla scelta del secondo gruppo il risultato resta immutato: $\binom{12}{7}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{7}}=792$.

Se non ci fossimo accorti che la scelta del primo gruppo implicava la scelta dell'altro, avremmo dovuto calcolare il numero di possibili gruppi da 7 persone che si potevano formare con gli studenti rimasti liberi. Visto che gli studenti non ancora assegnati dopo la scelta del primo gruppo erano $12-5=7$, tale quantità era $\binom{7}{7}=1$. Il numero totale di combinazioni sarebbe quindi rimasto $\binom{12}{5}\cdot\binom{7}{7}=792$.

Il metodo usato in quest'ultimo calcolo suggerisce che il problema dei *Due gruppi diversi* non è nient'altro che una disposizione: abbiamo infatti calcolato in ordine le possibili combinazioni prima di un gruppo e poi dell'altro moltiplicandole infine assieme. Per calcolare i singoli valori abbiamo dovuto far uso delle combinazioni (cioè delle disposizioni senz'ordine), il che fa di questo problema il primo esempio "ibrido" visto finora: una *disposizione di combinazioni*.

**Esempio 4 - Tre gruppi uguali ma non troppo**
Una classe composta da 12 alunni deve dividersi in tre gruppi da 4 elementi e ad ogni gruppo viene assegnato un lavoro diverso. In quanti modi è possibile effettuare tale scelta?

**Soluzione**
Notiamo che in questo caso, scelto un gruppo, non è più vero che gli altri gruppi sono automaticamente definiti. Per prima cosa calcoliamo in quanti modi possibili posso scegliere il primo gruppo. Si tratta di una combinazione di 4 elementi in un insieme di 12 e quindi la risposta è $\binom{12}{4}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495$. Restano a disposizione soltanto 8 alunni e quindi, per scegliere il prossimo gruppo, abbiamo $\binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=70$ possibilità. Ormai anche il terzo gruppo è implicitamente definito (infatti volendo calcolare le scelte possibili risulta che $\binom{4}{4}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1$ ) e quindi la soluzione è $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}=495\cdot70\cdot1=34.650$.

Notiamo che nell'esempio appena visto ad ogni gruppo era assegnato un lavoro diverso. Se invece i tre gruppi fossero stati fra loro indistinguibili (pensate al caso dello stesso lavoro di gruppo) la soluzione trovata sarebbe stata sbagliata. Cerchiamo brevemente di spiegare il perché e supponiamo che i tre gruppi si riuniscano in tre zone diverse dell'aula, a sinistra, in centro e a destra. Chiamiamo $A$, $B$ e $C$ i tre diversi gruppi di lavoro. E' evidente che una diversa disposizione dei tre gruppi all'interno dell'aula non può essere considerata come una suddivisione realmente diversa. In altre parole, calcolando la disposizione di combinazioni di studenti, $A,B,C$ e $B,A,C$ vengono per esempio contati entrambi. E' chiaro che ogni disposizione di gruppi viene contata 6 volte (le possibili "mischiate" all'interno dell'aula) e che quindi il risultato corretto in questo caso sarebbe $\frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{3!}=\frac{34.650}{6}=5775$.

Vediamo un altro esempio che ci permetterà di vedere sia disposizioni che combinazioni:

**Esempio 5 - Due ragazze e due ragazzi**

Un gruppo di amici è formato da due ragazze (Alice e Beatrice) e due ragazzi (Claudio e Davide).

**a)** Quante coppie maschio-femmina possono essere costituite?

**b)** Quante coppie generiche (cioè composte da due persone) possono essere formate?

**c)** In quanti modi il gruppo può dividersi in coppie maschio-femmina?

**d)** In quanti modi il gruppo può dividersi in coppie generiche?

**Soluzione**

**a)** Formiamo ogni coppia scegliendo prima la ragazza e poi il ragazzo. Per il primo caso si hanno 2 possibilità, così anche per il secondo. Riassumendo esistono $2 \cdot 2 = 4$ coppie femmina-maschio (precisamente $(A,C)$, $(A,D)$, $(B,C)$, $(B,D)$).

**b)** Si tratta di trovare il numeri di modi per scegliere due elementi in un insieme di 4. La risposta è $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Le possibili coppie sono $(A,B)$, $(A,C)$, $(A,D)$, $(B,C)$, $(B,D)$, $(C,D)$.

**c)** Rispetto al primo problema il numero sarà sicuramente minore, perché il gruppo non può suddividersi in tutte le coppie possibili. Per esempio la suddivisione del gruppo in $(A,C)$ e $(B,C)$ non è valida, perché Claudio compare in entrambe le coppie. Per risolvere il problema ragioniamo cercando di dare un ordine alle scelte e per cavalleria facciamo scegliere le ragazze. Alice ha due alternative; fatta la scelta a Beatrice non resta che accontentarsi del ragazzo rimasto libero. Le suddivisioni possibili sono quindi $2 \cdot 1 = 2$ (precisamente $\{(A,C);(B,D)\}$ e $\{(A,D);(B,C)\}$).

**d)** Ragioniamo come sopra: la prima coppia di individui può essere scelta in $\binom{4}{2}$ modi diversi. Fatta la scelta il secondo gruppo è implicitamente definito (infatti volendo calcolare il numero di possibili combinazioni rimaste otterremmo $\binom{2}{2} = 1$). In verità il calcolo non è ancora finito, perché abbiamo contato troppi elementi, come mostreremo fra breve. Questo è accaduto perché per contare i casi possibili abbiamo diviso il calcolo in “primo gruppo da due” e “secondo gruppo da due”, sebbene le due coppie siano fra loro interscambiabili. Abbiamo quindi contato per esempio le suddivisioni $\{(A,C);(B,D)\}$ e $\{(B,D);(A,C)\}$ separatamente, anche se essi rappresentino lo stesso caso. Il risultato è quindi $\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$ (precisamente $\{(A,B);(C,D)\}$, $\{(A,C);(B,D)\}$ e $\{(A,D);(B,C)\}$). Quest’ultimo caso è un esempio di combinazione di combinazioni.

**3.2) Cono con 2 gusti**

Una gelateria offre gelati di 10 gusti differenti. Volendo prendere un cono con 2 gusti diversi, in quanti modi si può scegliere?

**3.3) Picnic**

Dieci escursionisti devono spartirsi 10 panini (un panino a testa). Sapendo che 5 panini sono al formaggio, 3 con il prosciutto e 2 con il tonno, in quanti modi diversi può avvenire la suddivisione del cibo?

**3.4) Alzare due dita**

In quanti modi si possono tenere alzate due dita di una mano?

**3.5) Comitato equilibrato**

In una classe di 20 alunni bisogna formare un comitato formato da 3 ragazzi e 3 ragazze. Sapendo che in classe ci sono 7 maschi, in quanti modi si può effettuare la scelta?

**3.6) Essere ittita**

Usando l’alfabeto italiano, quante parole di 6 lettere esistono, tali che una lettera si ripete esattamente 3 volte e un’altra 2?

- **Soluzione dei problemi 3.1 – 3.6**

**3.1) Coefficienti binomiali**

$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$, $\binom{12}{1} = \frac{12}{1} = 12$, $\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7 \cdot 3 = 21$,

$\binom{24}{20} = \binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10.626$

**3.2) Cono con 2 gusti**

Si tratta di scegliere 2 elementi (in un ordine qualsiasi) da un insieme di 10 elementi distinti. È evidentemente una combinazione semplice. La soluzione è $\binom{10}{2} = 45$.

**3.3) Picnic**

Distribuire i 5 panini al formaggio a 10 persone si può fare in $\binom{10}{5}$ modi diversi. Bisogna ora decidere a chi dare i 3 panini al prosciutto alle 5 persone rimaste. Questo può essere fatto in $\binom{5}{3}$ modi. I due escursionisti rimanenti sono automaticamente destinatari dei panini al tonno. Riassumendo, la soluzione al problema è $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} = 252 \cdot 10 = 2520$.

**3.4) Alzare due dita**

Stavolta si tratta di scegliere 2 elementi (in un ordine qualsiasi) da un insieme di 5 elementi distinti. La soluzione è $\binom{5}{2} = 10$.

**3.5) Comitato equilibrato**

Una classe di 20 alunni con 7 maschi ha 13 femmine. La scelta della componente maschile può essere fatta in $\binom{7}{3}$ modi, quella della componente femminile in $\binom{13}{3}$. La soluzione finale è $\binom{7}{3} \cdot \binom{13}{3} = 35 \cdot 286 = 10.010$

**3.6) Essere ittita**

Prima di tutto scegliamo le lettere diverse fra loro: per designare quella che compare 3 volte esistono 21 modi, 20 per quella ripetuta e 19 per la solitaria. A questo punto tocca posizionarle: la lettera ripetuta tre volte può essere disposta su sei posti liberi in $\binom{6}{3} = 20$ modi. Nelle 3 caselle ancora libere va ora posizionata la lettera solitaria (3 scelte) mentre gli ultimi due posti a disposizione vanno occupati con la lettera (ripetuta) rimasta. Complessivamente le scelte sono $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 1 = 478.800$.