In questo foglio di lavoro inizieremo a vedere i raggruppamenti più semplici che si incontrano in Calcolo Combinatorio (classificati in ***permutazioni***, ***disposizioni*** e ***combinazioni***). Le tecniche e le formule che vedremo oggi non dovrebbero costituire una grossa novità, perché derivano tutte da casi "ad albero regolare".

- ## Le permutazioni semplici

Definizione
Dati *n* oggetti distinti, si chiama **permutazione** ogni riordino degli *n* oggetti.

Abbiamo già visto esempi di permutazione quando ci siamo occupati di anagrammi. È importante sottolineare che nelle permutazioni l'ordine degli oggetti gioca un ruolo fondamentale. Questo ci permette di ragionare come abbiamo già fatto in precedenza: dato un insieme di n elementi distinti ci sono n modi per occupare la prima posizione della sequenza, dopodiché restano $n-1$ modi per occupare la seconda posizione e così via, fino all'ultima posizione che deve essere necessariamente occupata dall'unico elemento rimasto. Questo ci porta a concludere che…

Il numero di permutazioni in un insieme di *n* oggetti distinti è uguale a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$

È opportuno riscrivere il risultato appena trovato introducendo un nuovo, importantissimo simbolo:

Definizione
Per ogni intero positivo n, si chiama "n fattoriale" e si indica con $n!$ il prodotto $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Per definizione si pone $0!=1$.

Esempio 1 - Fattoriale
Calcola $1!$, $2!$, $5!$ e $6!$

Soluzione
Per definizione si ha $1!=\boxed{1}$, $2!=2\cdot 1=\boxed{2}$ e $5!=5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=\boxed{120}$. Per calcolare $6!$ osserviamo che $6!=6\cdot(5!)=6\cdot 120=\boxed{720}$.

Numero di permutazioni
Il numero di permutazioni in un insieme di n oggetti <u>distinti</u> è uguale a $n!$

Esempio 2 - Anagrammi di Amore
Quanti anagrammi della parola "Amore" esistono?

Soluzione
Si tratta di contare il numero di permutazioni di una sequenza di 5 lettere distinte. La soluzione è $5!=120$

Esempio 3 - Mischiare 40 carte
In quanti modi diversi può essere mischiato un mazzo di carte da briscola (40 carte)?

Soluzione
Si tratta di contare le possibili permutazioni del mazzo di carte. La soluzione quindi non è altro che $40!$. Notiamo che tale numero è enorme e vale suppergiù $1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$. È quindi abbastanza improbabile che due persone giochino casualmente la stessa partita due volte.

Quest'ultimo esempio fornisce una nuova chiave interpretativa: il numero di permutazioni è uguale al numero di "mischiate" di un certo insieme di oggetti (sempre che essi siano tutti diversi fra loro).

2.1) Metal Detector
5 amici devono passare, una alla volta, attraverso un metal detector. In quanti modi possono mettersi in fila?

2.2) Una lettrice accanita
Per il suo compleanno Annamaria ha ricevuto ben 4 libri diversi e ha deciso di leggerne uno la settimana per un mese. In quanti modi può scegliere l'ordine di lettura?

2.3) Numeri e lettere

- **a)** Quanti sono gli anagrammi della "parola" "ABCD1234", tali che il primo simbolo sia una lettera, il secondo un numero, il terzo una lettera e così via in senso alternato?
- **b)** Quanti anagrammi della parola "ABCD1234" hanno lettere e numeri alternati? *Nota bene: rispetto al precedente manca la condizione che il primo simbolo sia una lettera.*

2.4) Anagramma con restrizione /1
Quanti anagrammi della parola "MARCO" hanno le lettere R e C affiancate (come MA**RC**O o **CR**OMA)?

2.5) Anagramma con restrizione /2
In quanti anagrammi della parola "OSTIA" le due consonanti <u>non</u> sono affiancate (come per esempio OA**S**I**T** o **T**AIO**S**)?

- ## Le permutazioni con ripetizione

Affrontiamo ora un caso particolare: in quanti modi è possibile anagrammare la parola BAAA? Applicando acriticamente la formula vista precedentemente, la risposta sembrerebbe essere 24 (cioè $4!$), mentre è evidente che gli unici anagramma di BAAA sono BAAA stesso, ABAA, AABA e AAAB. Questa apparente contraddizione deriva dal fatto che la collezione di lettere B, A, A, A **non** è composta da oggetti distinti. Abbiamo così constatato che la ripetizione di un elemento nella collezione di oggetti rende la formula delle permutazioni semplici inapplicabile.

Definizione
Data una collezione di *n* oggetti, alcuni dei quali possono essere ripetuti, si chiama **permutazione con ripetizione** ogni riordino della collezione.

Esempi di collezioni "con ripetizione": anagrammi di "MATEMATICA", le carte da gioco di due mazzi mischiati insieme, l'inventario di un negozio di abbigliamento e così via.

Per calcolare il numero di permutazioni di questo genere di collezioni, chiediamoci innanzitutto qual è la causa dell'errore nell'applicare la formula per le permutazioni semplici. Riprendiamo l'esempio della parola BAAA e aggiungiamo per comodità un pedice alle "A", in modo da poterle distinguere. Abbiamo quindi la parola $BA_1A_2A_3$ (composta ora da oggetti quattro diversi). Grazie a questa "differenziazione forzata", sappiamo, tra le altre cose, che esistono 6 diversi anagrammi che iniziamo con la "B", per la precisione $BA_1A_2A_3$, $BA_1A_3A_2$, $BA_2A_1A_3$, $BA_2A_3A_1$, $BA_3A_2A_1$, $BA_3A_1A_2$. (abbiamo contato il numero di "mischiate" delle diverse "A" tenendo fissa la "B"). Analogamente esisteranno 6 diversi anagrammi con la "B" al secondo posto, 6 anagrammi con la "B" al penultimo posto e altrettanti con la "B" alla fine.
È bene ricordare che i pedici introdotti sono posticci e che essi non esistono in originale: le "A" sono fra loro a tutti gli effetti indistinguibili. Applicando la formula classica facciamo quindi l'errore di contare per ben 6 volte BAAA e analogamente, di contare 6 volte ABAA, AABA e AAAB. Visto che ogni anagramma viene contato esattamente 6 volte, la soluzione corretta si ottiene dividendo il numero di anagrammi di $BA_1A_2A_3$ per 6. Così si ha $24/6=4$, come era già stato mostrato.
Riassumiamo il ragionamento: quando un elemento di una collezione si ripete, dobbiamo dividere il numero di permutazioni semplici per il numero delle possibili "mischiate" degli elementi ripetuti. Applicando quindi la formula già presentata possiamo concludere che…

Il numero di permutazioni in una collezione di *n* oggetti, in cui vi è un (solo) oggetto che compare *k* volte, è uguale a $\frac{n!}{k!}$.

Si tratta di un risultato soltanto parziale, perché consente di affrontare soltanto il caso in cui le ripetizioni riguardano un solo elemento della collezione.

Esempio 4 – Anagrammi di Torta
Calcolare il numero di anagrammi possibili della parola TORTA.

Soluzione
Notiamo che la parola TORTA è composta da oggetti distinti, eccezion fatta per la T che compare 2 volte. Possiamo quindi applicare la formula appena vista e concludere che la risposta è $\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$.

Esempio 5 – Anagrammi di Mamma
Calcolare il numero di anagrammi possibili della parola MAMMA.

Stavolta le ripetizioni riguardano non una, ma due lettere e la formula $\frac{n!}{k!}$ è inadeguata. Cerchiamo dunque di generalizzare il procedimento applicato prima e differenziamo le lettere uguali con dei pedici. La parola (formata ora da lettere distinte) $M_1A_1M_2M_3A_2$ ha $5!=120$ permutazioni. Mischiando fra loro le M_1, M_2 e M_3 otteniamo parole che, senza pedici, sarebbero indistinguibili. Stesso effetto scambiando fra loro A_1 e A_2. Una volta tolti i pedici abbiamo quindi $2!\cdot 3!$ versioni della stessa parola.
La soluzione del problema è allora $\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$.

La generalizzazione del procedimento visto è immediata e porta alla seguente formula, stavolta definitiva:

Numero di permutazioni con ripetizione
Il numero di permutazioni in una collezione di n oggetti, in cui un certo oggetto compare k_1 volte, un altro compare k_2 volte e così via per r oggetti, è uguale a $\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}$.

Esempio 6 – Anagrammi di Combinatorio
Calcolare il numero di anagrammi possibili della parola COMBINATORIO.

Soluzione
Nella parola di 12 lettere COMBINATORIO, la "O" compare 3 vote e la "I" 2. Il numero di anagrammi è quindi $\dfrac{12!}{3!\cdot 2!}=39.916.800$.

2.6) Anagrammi di Matematica
Calcola il numero di anagrammi della parola MATEMATICA.

2.7) Calcoli su Calcolo
Quanti anagrammi della parola CALCOLO hanno le due "c" affiancate?

2.8) Un piccolo robot
Un piccolo robot si muove percorrendo sempre e solo tratti rettilinei di 1 metro in avanti o indietro. Quanti itinerari diversi composti da 8 tratti consecutivi riportano il robot al punto di partenza?

- ## Le disposizioni semplici

Definizione
Si chiama disposizione una sequenza ordinata di k oggetti distinti estratti da una collezione di n oggetti distinti (per cui $k \le n$). Se l'unica condizione posta è quella della non–ripetibilità degli elementi all'interno della sequenza, la disposizione è detta *semplice*.

La differenza fra disposizioni semplici e permutazioni è che nelle disposizioni semplici non vengono utilizzati tutti gli oggetti dell'insieme. L'esempio *Assegnazione del podio* visto in precedenza è un caso tipico di disposizione semplice. Notiamo che anche nelle disposizioni appare il concetto di ordine e quindi il modo di procedere è analogo a quello delle permutazioni. Supponiamo di dover contare il numero di disposizioni semplici di k oggetti di un insieme di n oggetti. Per occupare la prima posizione vi sono n possibilità, dopodiché abbiamo ancora $n-1$ modi per occupare la seconda posizione (visto che l'unica condizione posta è che gli elementi siano diversi fra loro), $n-2$ per occupare la terza e così via per k volte. Questo ci porta a concludere che

Il numero di disposizioni semplici di k oggetti in un insieme di n oggetti distinti è uguale a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Nel calcolo combinatorio è consuetudine utilizzare quando possibile il simbolo di fattoriale. Un breve calcolo mostra la seguente identità:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot(n-k+1)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot(n-k+1)(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Possiamo quindi sostituire la proposizione precedente con la seguente:

Proposizione

Il numero di disposizioni semplici di k oggetti in un insieme di n oggetti distinti è uguale a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Esempio 7 - Parole senza ripetizioni

Quante "parole" di 5 lettere fra loro distinte si possono formare con l'alfabeto italiano?

Soluzione

Abbiamo 21 modi (il numero di lettere dell'alfabeto italiano) per scegliere la lettera iniziale, 20 per occupare la seconda posizione (perché la seconda lettera deve essere diversa dalla prima), 19 per la terza (perché la terza deve essere diversa dalle due precedenti) e così via. Il risultato sarà quindi $21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17=2.441.880$. Volendo utilizzare la formula $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ otterremmo di nuovo $\dfrac{21!}{(21-5)!}=\dfrac{21!}{16!}=\dfrac{51090942171709440000}{20922789888000}=2.441.880$.

Come si vede nello svolgimento dell'ultimo esempio, la formula $n!/\{(n-k)!\}$ è elegante ma poco pratica, poiché coinvolge numeri enormi, destinati comunque ad essere riassorbiti da qualche semplificazione. Il modo migliore per affrontare le disposizioni, semplici e non, è quello visto nel capitolo introduttivo: il calcolo dei casi possibili.

Esempio 8 - Numeri senza ripetizioni

Quanti numeri naturali composti da 5 cifre diverse fra loro e diverse da 0 esistono?

Soluzione

Come al solito, avendo a che fare con una sequenza ordinata, conviene fissare un simbolo per volta, partendo dalla cifra più a sinistra.

Per la prima cifra si hanno 9 possibili scelte: "1","2","3",…,"9". Qualsiasi sia la cifra prescelta, essa non potrà più essere usata. Per la seconda cifra restano quindi 8 possibilità. Ragionando in questo modo, arriviamo subito alla soluzione $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=15.120$.

• Le disposizioni generiche senza ripetizione

Ripercorriamo il modo di procedere nel calcolo delle disposizioni: per effettuare la prima scelta (generalmente l'elemento in prima posizione) abbiamo un certo numero m_1 di possibili opzioni, per effettuare la seconda scelta abbiamo m_2 alternative e così via per k volte. In generale il numero totale di disposizioni sarà dato dal prodotto di questi numeri, cioè $D=m_1\cdot m_2\cdot...\cdot m_k$. Il calcolo nei vari m_i modi non sempre è riconducibile a quello delle disposizioni semplici, cioè non possiamo porre sempre $m_1=n$, $m_2=n-1$, ecc. Vediamo a questo proposito un esempio:

Esempio 9 - Il podio multinazionale
Tre corridori spagnoli (S_1, S_2, S_3), tre tedeschi (T_1, T_2, T_3) e tre francesi (F_1, F_2, F_3) partecipano a una gara. Quanti possibili "podi" vedono tutte e tre le nazioni rappresentate?

Soluzione
Gli atleti in gara sono 9 e quindi esistono 9 modi per assegnare la medaglia d'oro. Fissato il vincitore esistono 6 possibili secondi (perché dobbiamo escludere i connazionali del vincitore) e, seguendo lo stesso procedimento, tre possibili terzi (uno qualunque della nazione non ancora premiata). Possiamo quindi concludere che la risposta è $9 \cdot 6 \cdot 3 = 162$.

In generale, qualsiasi problema risolto con il metodo sopra descritto, cioè quello di considerare il numero delle possibili scelte secondo un preciso ordine (normalmente è un ordine che il problema stesso suggerisce) e di moltiplicare tali valori fra loro, è una disposizione.

- ## Le disposizioni semplici con ripetizione

In tutti i casi visti finora, se un elemento occupava una certa posizione non poteva occuparne altre: in senso figurato, ogni oggetto poteva essere "usato" una sola volta. In molti problemi questa esclusività non esiste, come si evince dal seguente esempio (molto simile ad un problema visto in precedenza):

Esempio 10 - Numeri con ripetizioni
Quanti numeri naturali composti da 5 cifre non nulle esistono (come 16.378 o 22.525) ?

Soluzione
Abbiamo a che fare con una sequenza ordinata e questo ci permette di fissare una cifra alla volta. Per la prima posizione si hanno 9 possibili scelte: "1","2","3",…,"9". Il problema non pone alcuna condizione circa la ripetibilità delle cifre, per cui si hanno 9 possibilità anche per la seconda, la terza, la quarta e l'ultima cifra. La soluzione è quindi $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = 59.049$.

In generale, se ogni elemento può essere riusato, la soluzione sarà uguale al prodotto ripetuto di una certa costante per se stessa (infatti ad ogni passo si ha lo stesso numero di scelte). In altre parole, il numero di permutazioni con ripetizioni è una potenza.

Esempio 11 - Parole di tre lettere
Usando soltanto lettere dell'alfabeto italiano, quante parole (anche senza significato) di tre lettere possono essere composte?

Soluzione
L'alfabeto italiano consta di 21 lettere. Ciascuna posizione può quindi essere occupata in 21 modi diversi e la soluzione è $21 \cdot 21 \cdot 21 = 21^3 = 9261$.

La semplicità delle disposizioni con ripetizione è evidente. Presento quindi subito definizione e metodo di calcolo:

Definizione
Si chiama disposizione con ripetizione una sequenza ordinata di k oggetti scelti da una collezione di n oggetti distinti.

Numero di disposizioni con ripetizione.
Il numero di disposizioni con ripetizione di k oggetti scelti da una collezione di n oggetti è k^n.

Concludiamo la parte relativa alle *disposizioni semplici con ripetizione* con un esempio di disposizione con ripetizione che però esula dalla definizione data sopra (e infatti, a rigore, non si tratta di una disposizione "semplice")

Esempio 12 - Un "TOT"
Usando l'alfabeto italiano, quante parole di tre lettere si possono formare, tali che la prima e l'ultima lettera siano consonanti e la centrale sia una vocale (come "TOT" o "PER")?

Soluzione
Il modo di ragionare è sempre quello delle *disposizioni semplici con ripetizione*, cambia soltanto la collezione "di pesca": per la prima lettera vi sono 16 possibilità (numero di consonanti dell'alfabeto italiano), per la seconda posizione si hanno 5 scelte (vocali possibili) e per scegliere l'ultima consonante vi sono nuovamente 16 opzioni. La soluzione è quindi $16 \times 5 \times 16 = 1280$.

2.9) Lucchetto a combinazione
Un certo lucchetto a combinazione è composto da 4 rotelle, ciascuna delle quali può esser fatta scorrere a indicare una delle 10 cifre 0,1,2,…9. Ovviamente il lucchetto si apre solo se tutte e quattro le rotelle sono nella posizione corretta. Andando a caso, quale è il numero massimo di tentativi necessari per trovare la combinazione corretta?

2.10) Targhe italiane

- **a)** Le targhe delle automobili in Italia hanno la forma $\boxed{\text{L}}\boxed{\text{L}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{L}}\boxed{\text{L}}$, dove le $\boxed{\text{L}}$ sono le lettere di un alfabeto anglo-italiano a 22 lettere e $\boxed{\text{N}}$ sono cifre del sistema decimale. Quante possibili targhe possono essere create con questo sistema?
- **b)** Per evitare fraintendimenti, nessuna targa italiana comincia con la coppie di lettere "EE" (in pratica si è passati da ED999ZZ a EF000AA). Considerando questa limitazione, quante possibili targhe automobilistiche italiane possono essere creare?

2.11) Invito per 7
7 persone, indicate con A, B, C, D, E, F, G, ricevono un invito a cena. Potrebbero andare tutti, potrebbe non andare nessuno, potrebbero andare soltanto A e G o soltanto D, F e G e così via. Quante possibilità ci sono?

- ## Soluzione dei problemi 2.1 – 2.11

2.1) Metal Detector

Si tratta di contare le permutazioni di una collezione composta da 5 elementi distinti. La soluzione è $5! = 120$.

2.2) Una lettrice accanita

Indicati con A, B, C, D i titoli dei libri, bisogna mettere in un qualche ordine le 4 lettere, bisogna cioè anagrammare la parola "ABCD". Il numero di possibili anagrammi è $4! = 24$.

2.3) Numeri e lettere

a) Per risolvere questo esercizio bisogna essere già abbastanza bravi. L'idea più semplice è quella di anagrammare separatamente le 4 lettere e i 4 numeri per poi ricomporre "a pettine" gli otto simboli. La soluzione è quindi $4! \ (\text{anagrammi di ABCD}) \times 4! \ (\text{anagrammi di } 1234)$, perché ciascun anagramma letterale si lega a ciascun anagramma numerico (dando luogo a parole finali diverse). Risulta quindi $4! \times 4! = 24 \cdot 24 = 576$.

b) Questa situazione è quasi identica alla precedente, consente però una scelta in più: ricomponendo "a pettine" la parola finale si può iniziare da una lettera o da un numero. Visto che precedentemente avevamo 576 scelte, la soluzione ora è $2 \cdot 576 = 1152$.

2.4) Anagramma con restrizione /1

I due esempi proposti (MA**RC**O o **CR**OMA) ci fanno capire che esistono due modi per affiancare la R e la C. Concentriamoci inizialmente soltanto su "RC" e consideriamo la coppia come fosse un'unica lettera inscindibile. Avremo così da anagrammare la nuova parola di 4 lettere distinte $\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{RC}}\boxed{\text{O}}$. I modi per farlo sono $4! = 24$. Stesso discorso per $\boxed{\text{M}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{CR}}\boxed{\text{O}}$, con la nuova "lettera" "CR". Complessivamente gli anagrammi permessi dal problema sono $4! + 4! = 24 + 24 = 48$.

2.5) Anagramma con restrizione /2

Le configurazioni che prevedono le due lettere separate sono più difficili da elencare di quelle che prevedono le lettere appaiate. Dal problema precedente (che prevede una collezione con una struttura equivalente a quella considerata qui), sappiamo che esistono 48 anagrammi di "OSTIA" con la S e la T vicine. Del resto di "OSTIA" esistono complessivamente $5! = 120$ anagrammi, per cui, operando la sottrazione $120 - 48$, otteniamo proprio il numero che ci interessa. La soluzione è $120 - 48 = 72$.

2.6) Anagrammi di Matematica

La parola "MATEMATICA" è composta da 20 lettere. La "M" e la "T" si ripetono ciascuna due volte, la "A" tre. Applicando la formula si ottiene $\dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \dfrac{3.628.800}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 151.200$.

2.7) Calcoli su Calcolo

Consideriamo la coppia CC come un'unica lettera. La nuova parola $\boxed{\text{CC}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{L}}\boxed{\text{O}}\boxed{\text{L}}\boxed{\text{O}}$ ha 6 lettere: la L e la O si ripetono due volte, per cui, applicando la formula, si ottiene $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{120}{2 \cdot 2} = 30$

2.8) Un piccolo robot

Affinché il robot, dopo 8 movimenti, si riporti al punto di partenza, è necessario che si muova 4 volte in avanti e altrettante indietro, in un ordine qualsiasi (per esempio 3 volte avanti, 2 indietro, 1 avanti e 2 indietro). Indicando con le lettere A e I le due possibilità, si tratta di contare gli anagrammi della parola di 8 lettere $\underbrace{AAAA}_{4\,volte}\underbrace{IIII}_{4\,volte}$.

Essi sono $\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}=70$.

2.9) Lucchetto a combinazione

Ogni rotella può trovarsi in 10 posizioni e ciascuna posizione di una singola rotella è compatibile con ogni configurazione assunta dalle altre. Si tratta di una disposizione con ripetizione, il risultato è $10^4=10.000$.

2.10) Targhe italiane

a) I "valori" assunti da ogni lettera e numero sono indipendenti gli uni dagli altri. Possiamo quindi banalmente moltiplicare fra loro le possibilità per ogni posizione. Il risultato è $22\times 22\times 10\times 10\times 10\times 22\times 22=22^4\times 10^3=234.256.000$.

b) Contiamo il numero delle targhe "mancanti": le prime due lettere sono fisse su EE, gli altri simboli possono assumere qualsiasi "valore". Si tratta quindi di calcolare il numero di targhe del tipo $\boxed{\text{N}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{N}}\boxed{\text{L}}\boxed{\text{L}}$. Esse sono $10\times 10\times 10\times 22\times 22=10^3\times 22^2=484.000$ e quindi, la soluzione al problema è $234.256.000-484.000=233.772.000$.

2.11) Invito per 7

Ciascun invitato ha due opzioni: accettare l'invito o declinarlo. Scorrendo quindi le 7 persone possiamo dire che esistono $\underbrace{2\times 2\times \ldots\times 2}_{7\,volte}=2^7=128$ possibilità.