

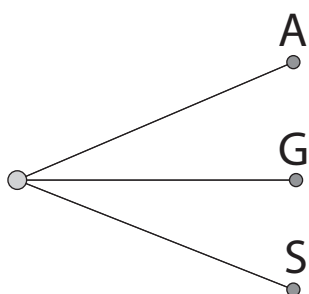


Il **calcolo combinatorio** è quella parte della Matematica che si occupa dei modi per raggruppare ed ordinare gli oggetti e del numero complessivo di tali raggruppamenti.

Supponiamo ad esempio di dover stabilire in quanti modi diversi si possa anagrammare la parola "GAS". Esempi possibili sono AGS, oppure GAS, oppure SAG, ecc. Nel contare le combinazioni dobbiamo evitare di commettere i due errori più comuni, quali non considerare tutte le possibili combinazioni e contare la stessa parola due o più volte. La prima cosa che bisogna imparare per risolvere problemi di calcolo combinatorio è proprio la capacità di elencare tutte le possibilità in modo ordinato. Una strategia molto efficace è la cosiddetta **rappresentazione ad albero**.

• La rappresentazione ad albero

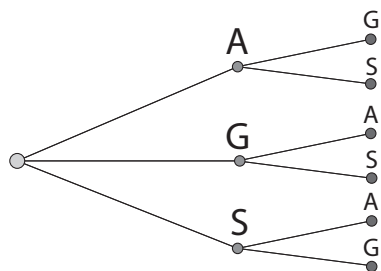
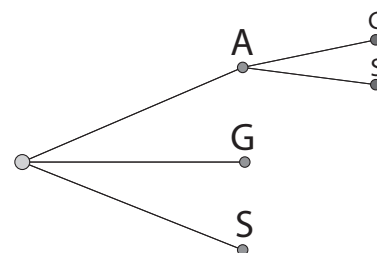
Cerchiamo di risolvere il problema esposto sopra e concentriamoci preliminarmente sulla prima lettera della tripletta: evidentemente esistono tre possibilità (A, G e S) che si escludono a vicenda.



Possiamo rappresentare questa situazione con lo schema ad albero mostrato a fianco ($\leftarrow$).

Ogni linea di questo schema è detta "ramo", i punti neri sono detti nodi e il nodo iniziale (a sinistra) è detto "radice". Quando la costruzione dell'albero è conclusa, i nodi finali (a destra) vengono anche detti "foglie".

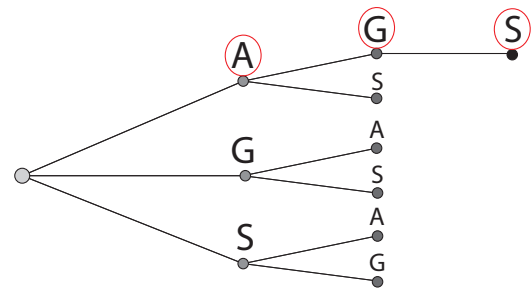
Per iniziare consideriamo il ramo in alto, cioè supponiamo di aver fissato come prima lettera la "A". A questo punto per la scelta della seconda lettera restano la "G" e la "S". Possiamo quindi "far crescere" il nostro albero come illustrato a destra ($\rightarrow$).



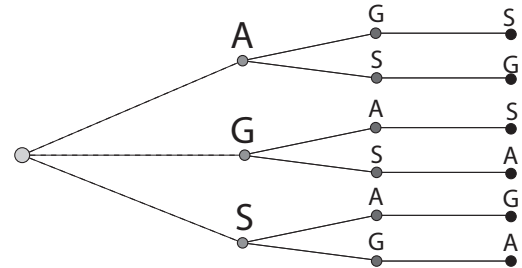
Seguendo lo stesso ragionamento anche per i rami iniziali "G" ed "S" si ottiene l'albero disegnato a fianco ($\leftarrow$).

Chiamiamo i 3 nodi attaccati alla radice "di **primo livello**", le coppie di nodi più piccole di "**secondo livello**".

Continuiamo a far crescere l'albero e iniziamo dal ramo superiore. Avendo già utilizzato due lettere, la terza non può che essere la S. Notiamo che il percorso che parte dalla radice e arriva fino al ramo ora disegnato rappresenta la parola "finita" AGS ($\rightarrow$).



Seguendo lo stesso procedimento disegniamo l'intero albero fino ad ottenere il seguente schema ($\rightarrow$). Leggendo in ordine (dalla radice alla foglia) i nomi dei nodi di ciascun percorso, si ottengono le parole cercate. In questa costruzione, le foglie sono nodi di **terzo livello**.



In questo esempio, elencando dall'alto in basso, abbiamo trovato AGS, ASG, GAS, GSA, SAG, SGA. Il numero di anagrammi della parola GAS è quindi 6 (che corrisponde al numero di foglie dell'albero).

Questo modo di procedere può essere troppo dispendioso per gruppi di oggetti molto ampi. Il vantaggio della rappresentazione ad albero risiede nella certezza che lo schema disegnato contenga effettivamente tutte le possibilità e senza ripetizioni, ma, come vedremo fra poco, l'albero delle possibilità si limita ad essere una schematizzazione ideale che spesso non deve essere veramente costruita.

Vediamo una serie di esempi, ciascuno dei quali aggiunge un elemento di riflessione sulla rappresentazione appena presentata.

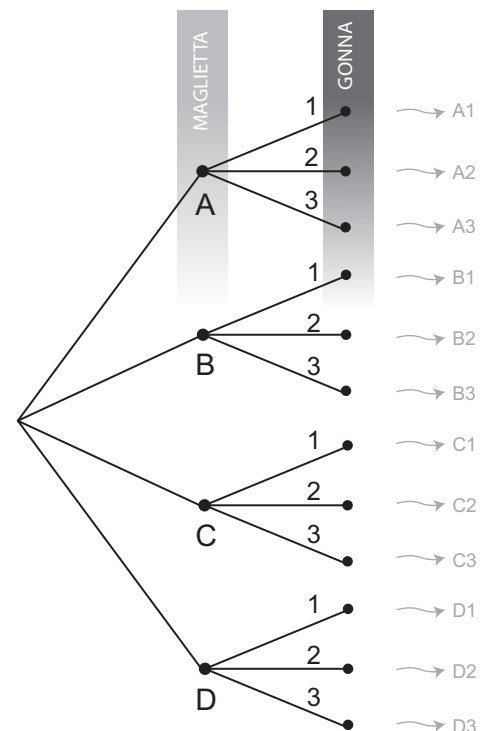
Esempio 1 – Gonne e magliette

Una signora ha nell'armadio quattro magliette e tre gonne. Quanti sono gli abbinamenti possibili?

Soluzione

Possiamo rappresentare gli abbinamenti con una struttura ad albero (vedi a fianco ($\rightarrow$)), immaginando di effettuare prima la scelta relativa alle magliette e poi quella delle gonne. Si tratta naturalmente di una schematizzazione del tutto arbitraria, ciò che conta è che essa permette di contare tutti gli abbinamenti possibili senza rischio di contarne uno due volte.

Nell'illustrazione a fianco sono indicate con A,B,C,D le quattro magliette e con 1,2,3 le tre gonne. La soluzione del quesito è evidentemente $4 \times 3 = 12$, perché a ciascuno dei 4 rami iniziali sono collegati gli stessi identici rami (cioè 1,2,3). Ciò suggerisce che, da un punto di vista combinatorio, le scelte di gonna e di maglietta sono **indipendenti** l'una dall'altra.



Il prossimo esempio è leggermente più complesso ma può essere risolto in maniera simile.

Esempio 2 – Capo e Vice

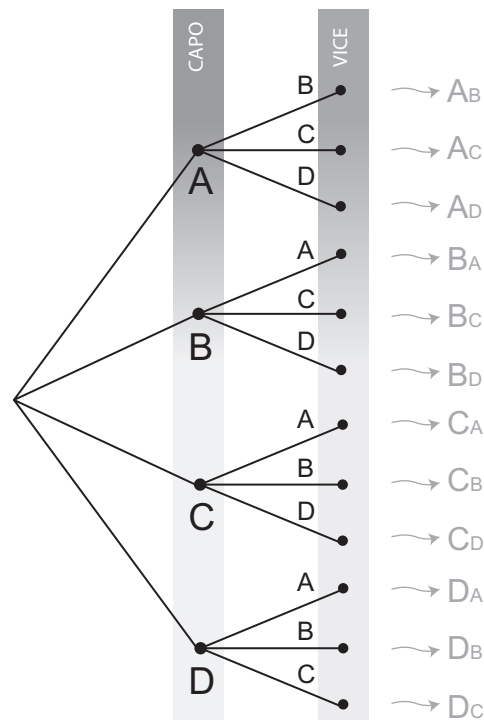
Un gruppo di 4 ragazzi deve scegliere due rappresentanti, il capo e il suo vice. In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

Soluzione

Ragionando come prima immaginiamo che la scelta venga effettuata in due tempi: prima viene nominato il *capo* e poi il *vice* (la scelta opposta sarebbe stata altrettanto corretta).

Stavolta la prima nomina influenza la seconda, come si vede dall'albero a fianco: i tre rami superiori (di secondo livello) contengono le lettere B,C,D mentre i tre rami sottostanti le lettere A,C,D. Si tratta quindi di un problema più complesso del precedente (simile al problema "GAS"). A restare costante è però il **numero** di rami di secondo livello (che è **indipendente** dal percorso, cioè dalla scelta del *capo*), per cui, di nuovo, si può ridurre il calcolo al prodotto $4 \times 3 = 12$.

Ciò che conta è quindi l'indipendenza del numero delle scelte, non delle scelte in quanto tali.



Per concludere questo tema vediamo un terzo esempio e due rappresentazioni ad esso abbinate.

Esempio 3 – Il ragazzo fortunato

Un ragazzo trova per terra 3 biglietti validi per il cinema, relativi a film diversi che verranno proiettati in giorni diversi. Il ragazzo può quindi scegliere di vedere tutti e tre i film, di non vederne nessuno o soltanto qualcuno. Quante scelte ha? *Nota bene: andare a vedere un film rispetto ad un altro è ovviamente una scelta diversa.*

Soluzione 1

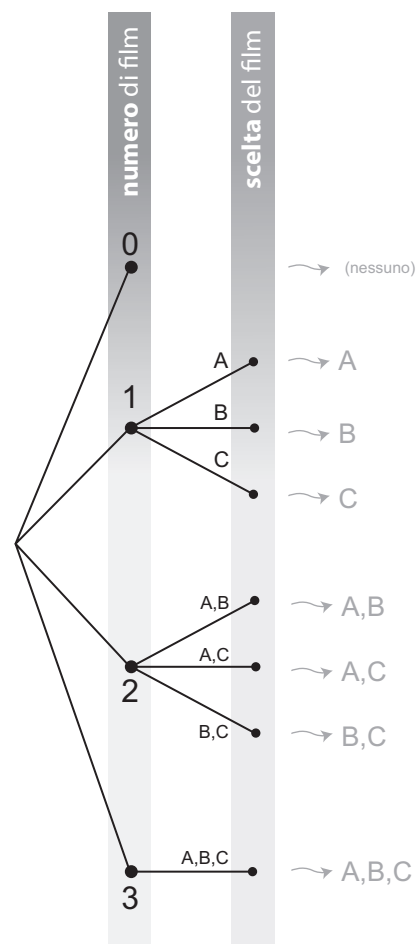
Anche stavolta affrontiamo il problema con una rappresentazione ad albero: essa ci permetterà di contare tutte le opzioni una volta soltanto e quindi di arrivare alla soluzione.

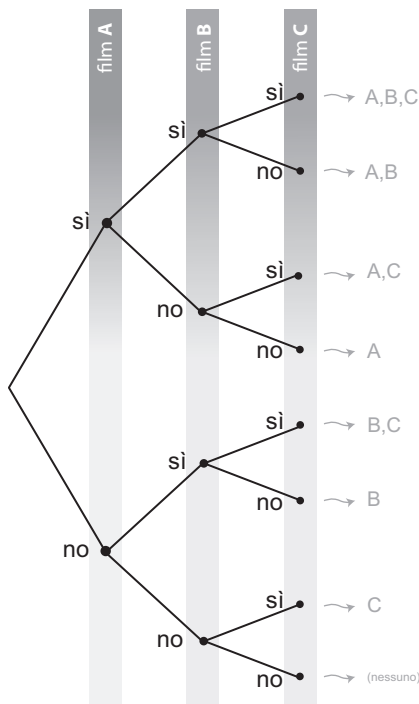
Suddividiamo la scelta in due decisioni distinte:

- 1) Quanti film andare a vedere
- 2) Quali film andare a vedere

L'albero a fianco mostra che le opzioni sono complessivamente 8. A differenza dei due esempi precedenti, il numero di rami di secondo livello è variabile, dipende cioè da quale primo ramo si è percorso: in questo caso non è possibile ridurre il conteggio a una semplice moltiplicazione del numero di diramazioni.

È importante sottolineare che la rappresentazione ad albero ha comunque permesso un'utile schematizzazione e si è dimostrata efficace.





Soluzione 2

Uno stesso problema può essere schematizzato in modi molto diversi, come mostra la rappresentazione a fianco ($\leftarrow$). Essa descrive lo stesso problema di prima (*il ragazzo fortunato*), immaginando che la scelta avvenga in tre fasi: per prima cosa il ragazzo decide se andare a vedere il film A, successivamente se assistere alla proiezione di B e soltanto alla fine se andare a vedere C. Anche questo modo di vedere il problema assicura il conteggio completo di tutte le possibili scelte. L'albero che si crea è semplicissimo ($\leftarrow$), e prevede ad ogni diramazione lo stesso numero di opzioni. Il conteggio può nuovamente essere ricondotto ad un prodotto, per la precisione $2 \times 2 \times 2 = 8$, in accordo con quanto ottenuto in precedenza.

Gli esempi proposti hanno messo in luce, come, in certi casi, il conteggio del numero di foglie di una rappresentazione ad albero possa essere ricondotto ad un prodotto. Per la precisione vale che...

Definizione

Chiamiamo **regolare** un albero nel quale da tutti i nodi di uno stesso livello L parte lo stesso numero di rami R_L .

Proposizione

In un albero regolare composto da n livelli, il numero di foglie è uguale al prodotto $R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n$.

Riconoscere che un albero è regolare o comunque intuire qualche regolarità nel numero di diramazioni senza dover materialmente disegnare nodi e rami, è una competenza che va acquisita nel Calcolo Combinatorio. Essa vi permetterà anche di capire come "spezzare" un problema in sotto-problemi.

• Immaginare l'albero

Per trovare una nuova strategia di calcolo adatta a problemi più complessi, cerchiamo di analizzare il problema "GAS" in modo più astratto, senza elencare tutti i casi possibili. Per la scelta della prima lettera abbiamo tre possibilità e qualunque lettera venga scelta essa non potrà più essere usata. Questo vuol dire che per la seconda posizione restano due scelte. In altre parole, i nomi dei nodi di secondo livello dipendono dal ramo percorso, ma il loro numero resta costante. Abbiamo quindi a che fare con un albero regolare, composto da 3 livelli. Percorrendo l'albero dalla radice alle foglie, vediamo che ad ogni nodo il numero di diramazioni diminuisce di 1. Il numero di foglie è allora $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, in accordo con quanto già trovato prima.

Notiamo che questo modo di procedere permette un calcolo veloce e non necessita di alcun laborioso disegno. Come già accennato, si tratta di una schematizzazione ideale, nella quale contiamo i rami senza disegnarli.

Se avessimo dovuto contare gli anagrammi della parola COSA, avremmo ragionato in maniera identica, arrivando a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, gli anagrammi di ABITO ci avrebbero portato a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e così via.

Applicando questo metodo, dovrete essere in grado di risolvere i seguenti problemi:

Esempio 4 – Gara dei 100m

In quanti modi diversi può finire una corsa con 8 concorrenti?

Soluzione

Naturalmente esistono 8 possibili vincitori. Fissato un vincitore esistono 7 possibili secondi classificati. Fissati il primo e il secondo, esistono 6 possibili terzi e così via. Iterando il ragionamento otteniamo il numero richiesto: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$.

Da notare che se avessimo voluto disegnare anche solo le foglie dell'albero delle possibilità, avremmo dovuto tratteggiare 40.320 nodi!

Esempio 5 – L'assegnazione del podio

In quanti modi diversi possono essere assegnate le medaglie nella gara precedente?

Soluzione

Notiamo che in questo caso ci interessa solo sapere in quanti modi diversi possono essere occupate le prime tre posizioni ed è irrilevante conoscere il quarto, il quinto o così via. Il modo di procedere è praticamente identico a quello già visto:

Esistono 8 possibili vincitori. Fissato un vincitore esistono 7 possibili secondi classificati e fissati il primo e il secondo esistono ancora 6 possibili terzi.

Il risultato è quindi $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Esempio 6 – Rappresentanza sindacale

In un'azienda lavorano 24 operai, 8 impiegati e 3 addetti al trasporto. Bisogna costituire un comitato formato da 1 rappresentante per categoria. In quanti modi è possibile formare il comitato?

Soluzione

Per gli operai esistono 24 possibili rappresentanti, per gli impiegati 8 e per i trasportatori 3. La soluzione è quindi $24 \cdot 8 \cdot 3 = 576$.

• **Moltiplicare, sommare, dividere foglie**

Complichiamo l'esempio 6 (rappresentazione sindacale) appena descritto, introducendo una differenziazione all'interno del gruppo:

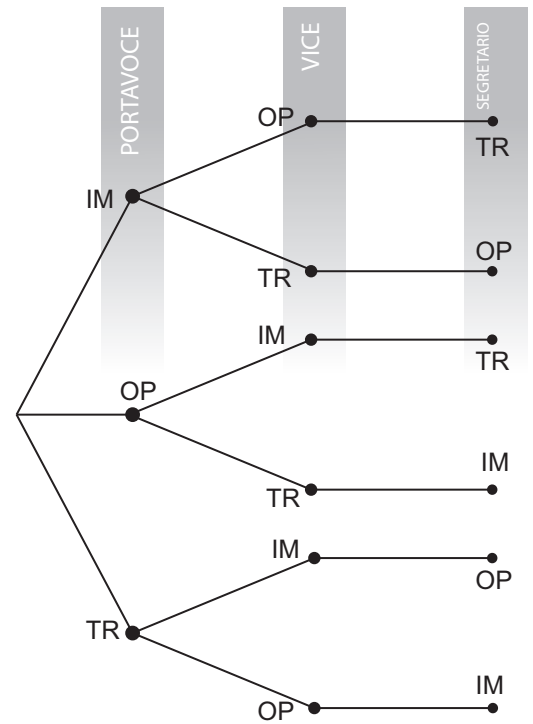
Esempio 7 – Rappresentanza sindacale con incarichi

In un'azienda lavorano 24 operai, 8 impiegati e 3 addetti al trasporto. Bisogna costituire un comitato formato da 1 rappresentante per categoria. I tre membri del gruppo avranno incarichi diversi, dovranno cioè essere nominati il portavoce, il vice e il segretario. Complessivamente, per composizione e incarichi, quanti comitati diversi esistono?

Soluzione

Supponiamo per semplicità che il comitato sia già stato scelto e che sia il momento di ripartire i compiti. Risolviamo quest'ultimo problema con una rappresentazione ad albero, suddividendo la scelta in tre decisioni successive: i nodi di primo livello descrivono la scelta del portavoce, quelli di secondo livello del vice e quelli di terzo livello del segretario. Lo schema a fianco è quello di un albero regolare con $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ foglie (a titolo di esempio: la prima diramazione dell'illustrazione individua come portavoce l'impiegato, come vice l'operaio e come segretario l'addetto al trasporto).

La soluzione dell'esempio precedente, assicura che un'ipotetica rappresentazione ad albero (regolare o meno che sia) del problema 6, sarebbe costituita da 576 foglie. Possiamo immaginare di collegare a ciascuna di esse una copia dell'albero rappresentato a fianco, generando così un numero di foglie pari a $576 \cdot 6 = 3456$. Si tratta evidentemente della soluzione al problema 7.

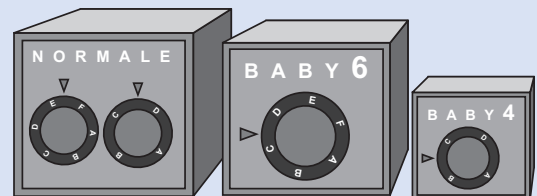


L'ultimo esempio mostra che un problema può essere scomposto in sottoproblemi e un albero in sottoalberi, una strategia che va sempre tenuta presente in Calcolo Combinatorio. Il prossimo esempio è molto importante: verrà introdotto un modo per compattare graficamente i rami di un albero e soprattutto osserveremo sotto-alberi che si innestano in modo inedito.

Esempio 8 – Casseforti giocattolo

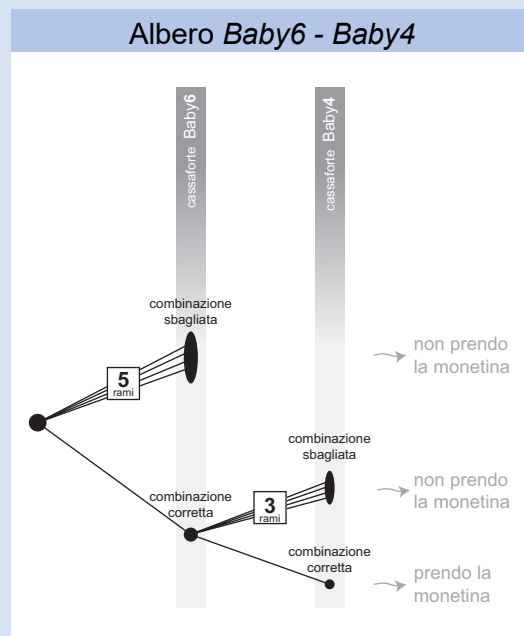
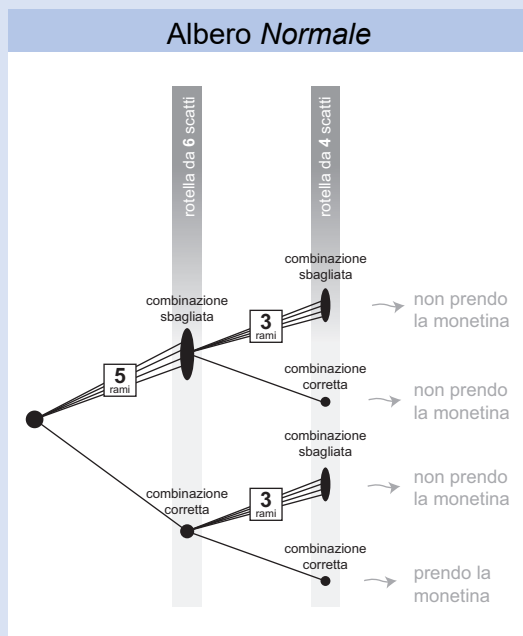
Considera 3 casseforti giocattolo: la *Baby4* ha una meccanismo a 4 scatti (ovviamente la scatolina si apre soltanto se la rotellina è nella posizione giusta), la *Baby6* ha un meccanismo a 6 scatti, mentre la *Normale* ha due rotelline, rispettivamente da 4 e da 6 scatti e si apre soltanto se entrambi i meccanismi sono nella posizione corretta.

È più sicuro mettere una monetina nella *Normale* oppure mettere la monetina nella *Baby4* e questa dentro una *Baby6*?



Soluzione

Per rispondere alla domanda costruiamo due alberi a rappresentare le due situazioni. Introduciamo in questo problema un "ramo multiplo", cioè una ramificazione che accorpa una moltitudine di possibilità dagli esiti equivalenti.

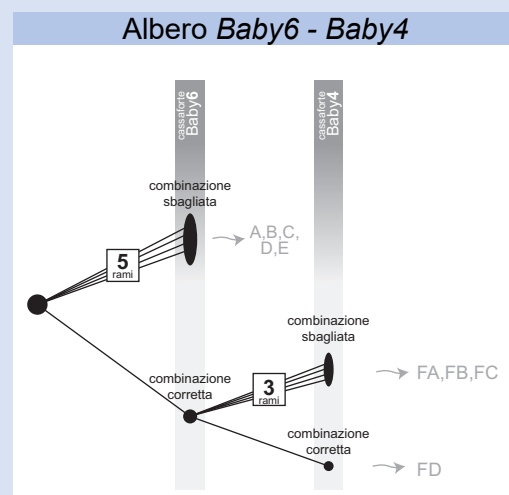


Nel primo caso rappresentato (cassaforte *Normale* a doppio meccanismo), l'ordine dei livelli è arbitrario e si sarebbe potuto tranquillamente invertire. L'accorpamento delle ramificazioni è invece una conseguenza dello schema di rappresentazione *combinazione giusta / combinazione sbagliata*: se supponiamo per semplicità che la combinazione corretta sia $\boxed{F}\boxed{D}$, si hanno infatti 5 posizioni sbagliate (da $\boxed{A}$ a $\boxed{E}$) per la prima rotella e tre posizioni sbagliate (da $\boxed{A}$ a $\boxed{C}$) per la seconda.

Per quanto riguarda il secondo albero, i livelli corrispondono rispettivamente alle casseforti *Baby6* e *Baby4*: l'ordine è in questo caso necessariamente quello rappresentato, visto che non è possibile manovrare la rotellina della *Baby4* prima di avervi accesso.

Cerchiamo ora di rispondere al quesito. Nel primo caso tutte le 6 combinazioni della prima rotella sono compatibili con tutte e 4 le posizioni della seconda, per cui un "ladro sfortunato" dovrebbe fare $6 \cdot 4 = 24$ tentativi per rubare la monetina. Il conteggio delle foglie suffraga questo calcolo ma deve essere fatto con cura: la prima "foglia cumulativa" accorpa $5 \cdot 3 = 15$ casi, la seconda $5 \cdot 1 = 5$, la terza $1 \cdot 3 = 3$ e la quarta $1 \cdot 1 = 1$. Complessivamente si hanno appunto $15 + 5 + 3 + 1 = 24$ casi diversi.

Nel secondo caso il "ladro sfortunato" dovrebbe fare 6 tentativi per aprire la cassaforte contenitore. Una volta indovinata la $\boxed{F}$, potrebbe estrarre la cassaforte piccola e concentrare l'attenzione su di essa. Dopo altri 4 tentativi la monetina sarebbe sua. Il numero di prove, cioè di posizioni diverse fatte assumere da una delle rotelline, è quindi $6 + 4 = 10$. Il calcolo delle foglie "elementari" del secondo albero fornisce però un valore diverso: $5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 9$. La differenza è data da una sottigliezza interpretativa che soltanto l'elencazione precisa delle foglie elementari mette in luce. Supponendo che la combinazione corretta sia $\boxed{F}\boxed{D}$, l'elenco dei tentativi rappresentati a fianco è il seguente: $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$, $\boxed{F}\boxed{A}$, $\boxed{F}\boxed{B}$, $\boxed{F}\boxed{C}$, $\boxed{F}\boxed{D}$. Rispetto al conteggio precedente, manca il caso singolo $\boxed{F}$, perché l'apertura della cassaforte contenitore dà immediato accesso alla cassaforte interna, cioè alla seconda rotella, e quindi al tentativo $\boxed{F}\boxed{A}$.

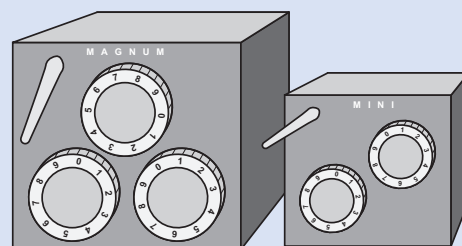


È difficile stabilire quale delle due interpretazioni sia quella più ragionevole, cioè più attinente al concetto di “tentativo”, il che mette in luce l'importanza di definire in modo univoco qualsiasi problema di Calcolo Combinatorio. Cionondimeno il quesito, per come è posto, ha una risposta inequivoca: è meglio mettere la monetina nella cassaforte *Normale*.

Il prossimo esempio è molto simile al precedente, la sua formulazione è però al riparo da interpretazioni contrastanti.

Esempio 9 – Il miliardario smemorato

La *Arsenio Lupin* produce due modelli di cassaforte di dimensioni diverse: la *Mini* ha due ruote da 10 combinazioni ciascuna, la *Magnum* è provvista di una ruota in più. Il meccanismo è semplice: una volta inserite le combinazioni, bisogna azionare la manopola di apertura. Se tutte le ruote sono nella posizione corretta, lo sportello si apre, in caso contrario il meccanismo si blocca per un minuto esatto (per cui bisogna aspettare un po' di tempo per fare un nuovo tentativo).



Uno smemorato miliardario mette un diamante dentro una *Mini*, questa dentro una *Magnum* e poi dimentica la combinazione. Nel caso peggiore, quanto tempo gli occorrerà per rimettere le mani sulla pietra preziosa (senza ovviamente forzare le casseforti)?

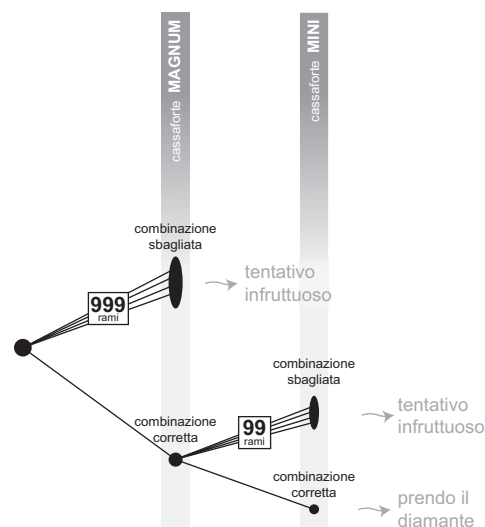
Soluzione

Assumendo che il tempo necessario ad azionare la manopola ed eventualmente ad aprire lo sportello siano trascurabili rispetto alle attese forzate, possiamo calcolare il tempo complessivo determinando il numero di tentativi infruttuosi. Per aprire la *Mini* sono necessari $10 \cdot 10 = 100$ tentativi (e quindi al massimo 99 minuti, visto che il centesimo tentativo non comporta alcuna attesa), per aprire la *Magnum* invece $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (che corrispondono a 999 minuti).

La difficoltà del problema non risiede in questi semplici calcoli, ma nel comprendere cosa farne: i numeri ottenuti vanno sommati o moltiplicati?

Per quanto visto nell'esempio precedente, possiamo concludere che la rappresentazione a fianco ($\rightarrow$) a rami multipli sia quella più adatta a descrivere il problema:

Ciascuna foglia etichettata come “tentativo infruttuoso” comporta 1 minuto di attesa. Nel caso peggiore, il miliardario impiegherà $999 + 1 \cdot 99 = 1098$ minuti a riavere il diamante, cioè poco più di 18 ore.



L'ultimo esempio di questo foglio di lavoro è il più sottile e per certi versi il più importante di questa parte introduttiva. Si tratta di un conteggio concettualmente sbagliato effettuato mediante una rappresentazione ad albero. Sarà fondamentale analizzare e comprendere l'errore, non solo per non incorrervi mai nella risoluzione dei problemi, ma soprattutto per capire come "aggiustare" il ragionamento e il conteggio finale. Questo modo di procedere, effettuare cioè un calcolo sbagliato "in modo controllato" e poi sistemare il risultato in un secondo momento, si rivelerà una strategia molto fertile.

Esempio 10 – Alzare tre dita di una mano

In quanti modi si possono alzare tre dita di una mano? *Conviene introdurre la seguente notazione per le dita: pollice (P), indice (I), medio (M), anulare (A) e mignolo (m).*

Tentativo di risoluzione

Per risolvere il problema immaginiamo di alzare un dito per volta. Ciò ci consentirà di costruire l'albero rappresentato (integralmente) a fianco. Come si vede, ciascun livello individua l'ordine in cui un dito viene mosso, nell'ipotesi (non restrittiva) che i movimenti non avvengano contemporaneamente. Come c'era da aspettarsi, il conteggio delle foglie fornisce il valore $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Il problema è che tale valore è sbagliato. Perché?

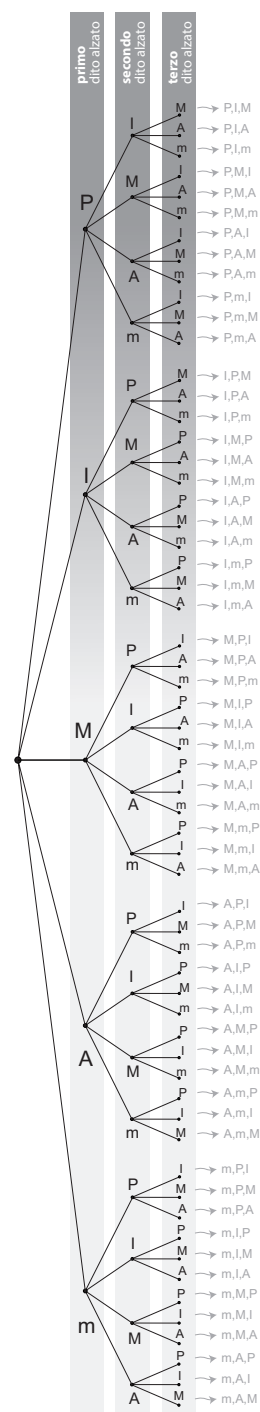
È evidente che l'ordine con il quale vengono alzate le dita semplifica sì il conteggio, ma introduce un elemento estraneo al problema stesso. Vediamo un esempio per capirne il motivo: le configurazioni "pollice, indice, medio" e "medio, pollice, indice" rappresentano la stessa identica posizione finale (l'unica che ci interessa), eppure vengono conteggiate separatamente. Si pone quindi la seguente domanda:

Utilizzando l'albero a fianco, esattamente, quante volte viene conteggiata una stessa soluzione?

Si tratta di contare il numero di modi in cui è possibile riordinare le lettere P,I,M (visto che ciascun riordino è necessariamente separatamente presente nell'albero sovrastante). Abbiamo già calcolato il numero di anagrammi della parola "GAS" e il numero di anagrammi di "PIM" è evidentemente lo stesso: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Siamo ora in grado di dare la soluzione al quesito dal quale eravamo partiti:

Soluzione (Alzare tre dita di una mano)

Supponendo che l'ordine di alzata sia rilevante, esistono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modi per alzare tre dita. Ogni configurazione finale verrà ottenuta in questo modo in 6 modi diversi. Disinteressandoci però dell'ordine, vi sono solo $60 / 6 = 10$ modi per tenere alzate tre dita di una mano.



- **Problemi con soluzione (riportata alla fine)**

1.1) Assegnazione degli incarichi

In un'assemblea di 100 persone si devono scegliere un presidente e un segretario. Stabilire in quanti modi è possibile effettuare la scelta...

- a) se gli incarichi sono fra loro incompatibili
- b) se gli incarichi sono compatibili

1.2) Il problema delle sedie

Ci sono 4 sedie libere, una di fianco all'altra. In quanti modi diverse possono essere occupate se ci sono

- a) una persona
- b) due persone
- c) tre persone
- d) quattro persone
- e) cinque persone (una resta in piedi)
- f) sei persone (due restano in piedi)

1.3) Estrazioni ordinate

In un'urna ci sono quattro palline contrassegnate dai numeri 1,2,3,4. Se si effettuano 3 estrazioni quanti sono gli esiti possibili? (naturalmente va tenuto conto dell'ordine d'estrazione, per cui per esempio le estrazioni 1,2,3 e 2,1,3 sono diverse fra loro)

1.4) Il gruppo multiculturale

Un gruppo multiculturale è composto da 4 australiani, 4 brasiliani e 4 croati. All'interno del gruppo di 12 persone vanno designati un coordinatore, un supervisore e relatore, tenendo presente che le tre cariche devono essere assunte da persone di nazionalità diversa (se ad esempio il supervisore fosse australiano e il relatore croato, il coordinatore dovrebbe essere brasiliano). In quanti modi può essere effettuata la scelta?

1.5) X e Y

Si vuole formare una "parola" da 5 lettere utilizzando esclusivamente i simboli "X" e "Y" (per cui le parole saranno del tipo YXXYX, YYYYYY e così via). Quante parole del genere esistono?

• Soluzioni dei problemi 1.1 – 1.5

1.1) Assegnazione degli incarichi

- a) Supponiamo che gli incarichi siano fra loro incompatibili. Ci sono 100 modi per scegliere il presidente. Una volta eletto ci sono ancora 99 persone che possono ricoprire il ruolo di segretario. La risposta è quindi $100 \cdot 99 = 9900$.
- b) Se gli incarichi sono compatibili (cioè il presidente può anche essere il segretario) per entrambe le scelte ci sono 100 alternative. La risposta è quindi $100^2 = 10.000$.

1.2) Il problema delle sedie

Chiamiamo le persone con le lettere dell'alfabeto: $A, B, C, \dots$

- a) A ha ovviamente 4 alternative.
- b) A può scegliere fra 4 sedie. Una volta effettuata la scelta a B restano 3 alternative. La soluzione è quindi $4 \cdot 3 = 12$.
- c) Ragionando come sopra A ha quattro possibilità, B tre e C due. Complessivamente ci sono quindi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilità.
- d) Questo problema è in verità identico a quello precedente (infatti una volta che A, B, C si sono seduti D non ha che una scelta) e quindi la soluzione è 24.
- e) Supponendo che si stia svolgendo una gara il cui primo premio è la prima sedia, il secondo premio è la seconda e così via, il problema si riduce a calcolare il numero di possibili vincitori moltiplicato per il numero di possibili secondi arrivati (una volta fissato il primo), e così via. In sintesi la risposta è $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
- f) Possiamo ragionare come sopra è dire che le alternative sono $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Osserviamo che in questo problema abbiamo implicitamente ammesso che le sedie e le persone fossero fra loro distinguibili e che quindi per esempio le soluzioni A, B, C, D e D, C, A, B fossero considerate distinte.

1.3) Estrazioni ordinate

Ragionando come al solito possiamo dire che la prima estrazione può concludersi in 4 modi diversi, la seconda in 3 (perché ora l'urna contiene solo 3 palline) e la terza 2. La soluzione è quindi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

1.4) Il gruppo multiculturale

Supponiamo di designare nell'ordine, il coordinatore, supervisore e il relatore.

Chiunque può essere eletto coordinatore, per cui vi sono 12 possibilità per la prima scelta.

Una volta stabilito il coordinatore, restano "in gioco" per la carica di supervisore, solo 8 persone (quelli delle altre nazionalità).

Il titolo di relatore è appannaggio del gruppo nazionale non ancora rappresentato e composto da 4 persone.

Riassumendo, la soluzione è $12 \cdot 8 \cdot 4 = 384$.

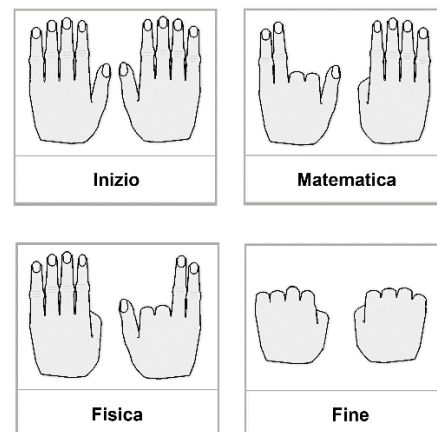
1.5) X e Y

Scegliamo una lettera per volta. La prima lettera può essere una X o una Y (2 possibilità), la seconda lettera, nuovamente, può essere una X o una Y (2 possibilità) e così via fino alla quinta lettera. La soluzione è quindi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

• Problemi aggiuntivi

1.6) Gli studenti del Majorana, svelti di ingegno e di articolazioni, hanno sviluppato un codice, detto **majorenese muto**, basato sull'apertura/chiusura delle dieci dita. Ad ogni possibile configurazione corrisponde esattamente una parola, come mostrato nell'illustrazione a fianco ($\rightarrow$).

Di quante parole è composto il vocabolario majoreanese?



1.7) La "Matematica" è un'automobile elettrica appena lanciata sul mercato: esistono svariate scelte per colore, tipo di allestimento interno e potenza del motore, per un totale di ben 105 possibili personalizzazioni. Sapendo che fra tutti, il colore offre il ventaglio di scelte più ampio, quanti colori diversi stanno in catalogo?

1.8) La cultura cinese attribuisce ai numeri un significato che va al di là del loro semplice valore: così ad esempio il "9" è il numero dell'imperatore, mentre l' "8" indica prosperità. Il "4" invece è di malaugurio, una cifra talmente sfortunata da contagiare tutti i numeri che la contengono: così ad esempio sono sfortunati il 24, il 540, il 4942 (non c'è imperatore che tenga) eccetera. Quanti numeri "sfortunati" esistono tra da 1 e 5000 (come ad esempio 24, 444 o 3947)?

1.9) Una "tavola pitagorica" è un griglia numerica costruita in modo che il numero posto alla riga R e colonna C sia $R \cdot C$ (controllare per credere). A fianco è mostrata una tavola pitagorica virtualmente infinita. Nonostante l'assenza di confini, tutti i numeri vi compaiono un numero finito di volte (gli scettici sono invitati a contare gli "8" nella tabella a fianco e ad osservare che espandendo la griglia, nessun "8" si aggiungerebbe al conteggio). In una tavola pitagorica infinita, quante volte compare il numero 1400?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

1.10) In una piccola fabbrica lavorano tre categorie di lavoratori: vi sono 4 ingegneri, 16 operai specializzati e 24 operai semplici. Si vuole costituire un piccolo gruppo di lavoro costituito da un coordinatore, un segretario e un portavoce, in modo che ciascuna categoria prenda parte al terzetto. In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

1.11) Sul pavimento della prima stanza del sinistro labirinto del Liceo Matematico, è inciso a tinte scure il numero “5”, a indicare che sulla stanza si affacciano cinque porte, quattro di esse contrassegnate da un numero: vi sono quindi le porte “1”, “2”, “3” e “4”. Il quinto uscio è la porta d’ingresso al labirinto (che avete percorso con sconsiderata spavalderia) e non reca alcun segno.

Infilando la porta “1”, si giunge a una piccola stanza con inciso sul pavimento un “1”, nuovamente a indicare le porte presenti. Si tratta di un vicolo cieco perché la porta in questione è proprio quella dalla quale siete entrati (e che, sul retro, non reca segni).

Infilando la porta “2”, si giunge ad una stanza con inciso sul pavimento il numero “2”, il numero delle porte che vi si affacciano. Una l’avete già percorsa, l’altra è contrassegnata da un “1”.

La struttura del labirinto si ripete sempre allo stesso modo: ogni porta con inciso il numero “N” si apre su una stanza con N porte, quella di ingresso e le altre N-1 contrassegnate da “1” a “N-1”.

- a)** Quante stanze cieche (cioè con una porta soltanto), vi sono del labirinto?
- b)** Complessivamente, quante porte vi sono nel labirinto?
- c)** Se la prima stanza avesse avuto 11 porte (ingresso compreso), quante stanze cieche avrebbe avuto il labirinto?